Поверхностные интегралы первого рода

Рассмотрим скалярную функцию $f\left(x, y, z\right)$ и поверхность S. Пусть S задана векторной функцией

$$\mathbf{r}\left(u, v\right) = x\left(u, v\right)\mathbf{i} + y\left(u, v\right)\mathbf{j} + z\left(u, v\right)\mathbf{k},$$

где координаты $\left(u, v\right)$ изменяются в пределах некоторой области определения $D\left(u, v\right)$ в плоскости uv.

Заметим, что функция $f\left(x, y, z\right)$ рассматривается только в точках, принадлежащих поверхности S, то есть

$$f\left[\mathbf{r}\left(u, v\right)\right] = f\left[x\left(u, v\right), y\left(u, v\right), z\left(u, v\right)\right].$$

Поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S определяется следующим образом:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D(u,v)} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv,$$

где частные производные $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ равны

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\,\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\,\mathbf{k},$$

а $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ означает векторное произведение.

Вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ перпендикулярен поверхности в точке $\mathbf{r}(u,v)$.

Абсолютное значение $dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$ называется *элементом площади*: оно соответствует изменению площади dS в результате приращения координат u и v на малые значения du и dv (рисунок 1).

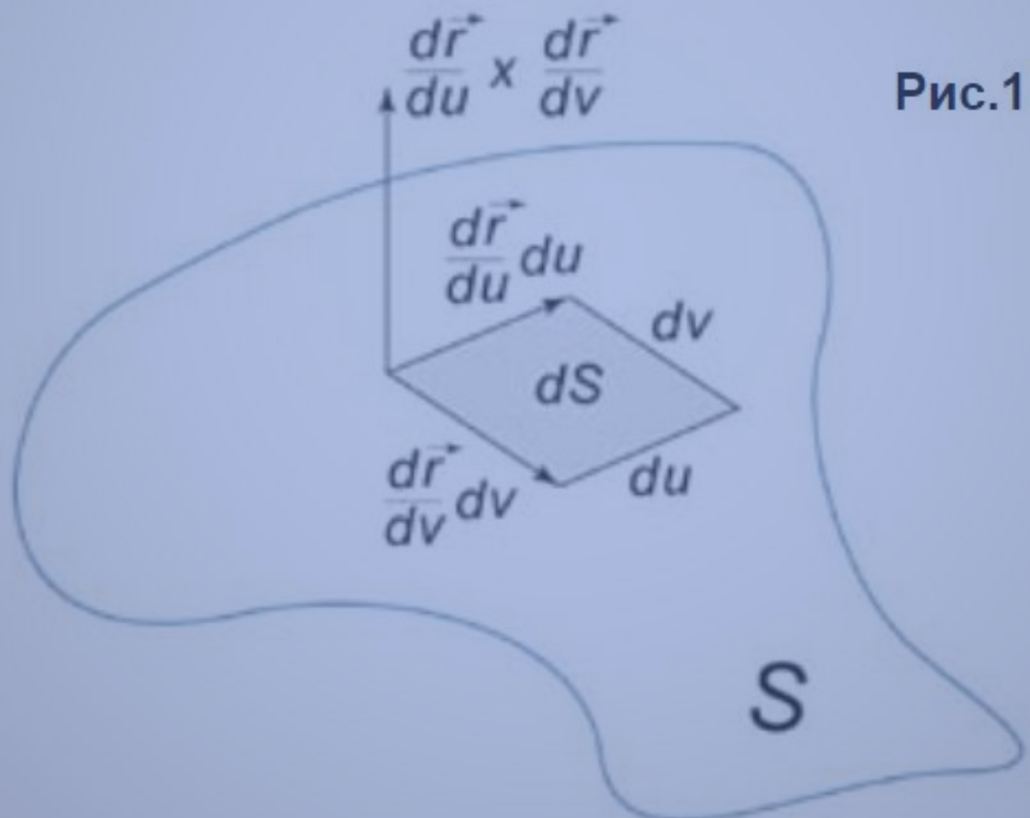


Рис.1

Площадь поверхности S выражается с помощью поверхностного интеграла в виде

$$A = \iint\limits_S dS.$$

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, где $z(x, y)$ – дифференцируемая функция в области $D(x, y)$, то поверхностный интеграл находится по формуле

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D(x,y)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Если поверхность S состоит из нескольких частей S_i, то для вычисления поверхностного интеграла можно использовать свойство аддитивности:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} f(x, y, z)\, dS_i.$$

Пример 1

Вычислить поверхностный интеграл $\iint (x+y+z)\,dS$, где S – часть плоскости $x+2y+4z=4$, лежащая в первом октанте $(x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0)$.

Решение.

Запишем уравнение плоскости в виде $z = z(x,y) = 1 - \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2}$.

Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}$.

Применяя формулу

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy,$$

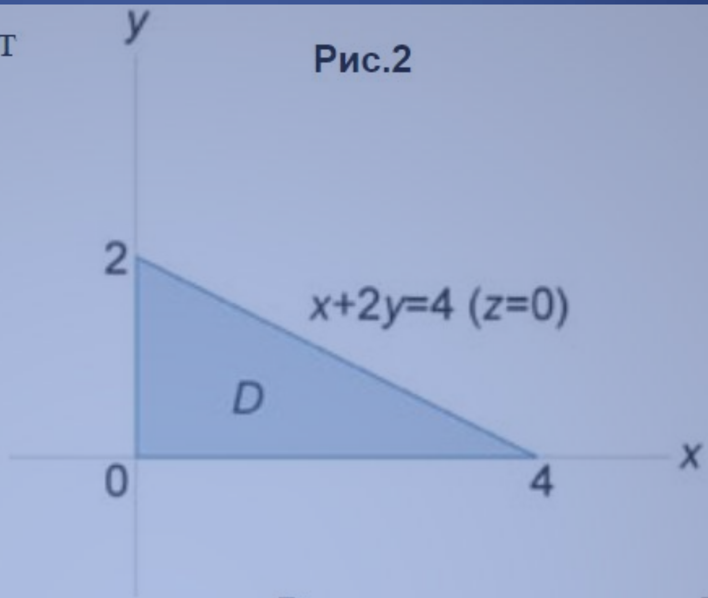
поверхностный интеграл можно выразить через двойной интеграл:

$$I = \iint_S (x+y+z)\,dS = \iint_D \left(x+y+1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\right)\sqrt{1+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}dxdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}+1\right)\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy.$$

Область интегрирования D представляет собой треугольник на рисунке 2.

Рис.2



Вычисляем окончательно заданный интеграл:

$$I = \frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^2\left[\int_0^{4-2y}\left(\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}+1\right)dx\right]dy = \frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2\left[\int_0^{4-2y}(3x+2y+4)\,dx\right]dy$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2\left[\left(\frac{3x^2}{2}+2yx+4x\right)\Bigg|_{x=0}^{4-2y}\right]dy = \frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2\left[\frac{3}{2}(4-2y)^2+2(4-2y)y+4(4-2y)\right]dy$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{32}\int_0^2\left[3\left(16-16y+4y^2\right)^2+16y-8y^2+32-16y\right]dy = \frac{\sqrt{21}}{32}\int_0^2\left(80-48y+4y^2\right)dy$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^2\left(20-12y+y^2\right)dy = \frac{\sqrt{21}}{4}\left[\left(20y-6y^2+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2\right] = \frac{\sqrt{21}}{4}\left(40-24+\frac{8}{3}\right) = \frac{7\sqrt{21}}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\iint\limits_S z^2 dS$, где S представляет собой полную поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$.

Решение.

Обозначим через S_1 боковую поверхность конуса, и через S_2 − его основание. Запишем данный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$I = I_1 + I_2 = \iint\limits_{S_1} z^2 dS_1 + \iint\limits_{S_2} z^2 dS_2.$$

Найдем сначала первый интеграл I_1, используя формулу

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} z^2 dS_1 = \iint\limits_{D} f\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Частные производные здесь равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тогда

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}.$$

Поскольку $z=2$ для основания конуса, то область интегрирования $D\,(x,y)$ определяется неравенством $z^2+y^2\le 4$ (рисунок 3).

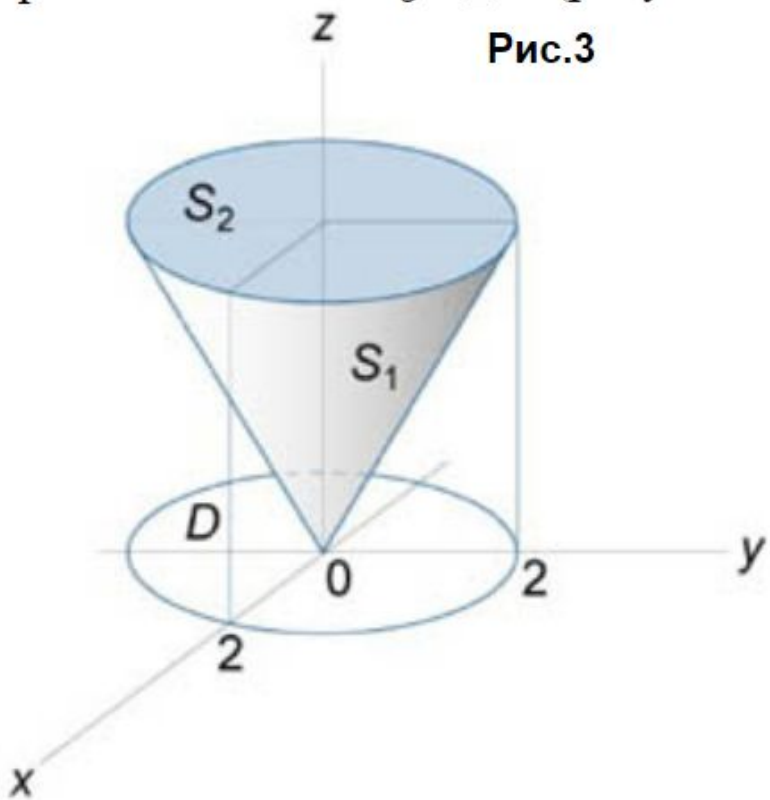


Рис.3

Следовательно, интеграл I_1 записывается в виде

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} z^2 dS_1 = \sqrt{2} \iint\limits_{D(x,y)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

Его легко вычислить в полярных координатах:

$$I_1 = \sqrt{2} \iint\limits_{D(x,y)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^2 r^2 \cdot r dr d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 dr = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\left. \left(\frac{r^4}{4} \right) \right|_0^2 \right] = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \left(2^4 - 0\right) = 8\sqrt{2}\pi.$$

Рассмотрим теперь второй интеграл I_2. Уравнение основания конуса имеет вид $z = 2$. Поэтому,

$$I_2 = \iint\limits_{S_2} 2^2 dS_2 = 4 \iint\limits_{S_2} dS_2,$$

где $\iint\limits_{S_2} dS_2$ равно площади основания $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$. Тогда

$$I_2 = 4 \iint\limits_{S_2} dS_2 = 4 \cdot 4\pi = 16\pi.$$

Таким образом, полное значение поверхностного интеграла равно

$$I = I_1 + I_2 = 8\sqrt{2}\pi + 16\pi = 8\pi \left(\sqrt{2} + 2\right).$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,dS$, где S – часть конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ внутри поверхности $x^2 + y^2 = 2ax$.

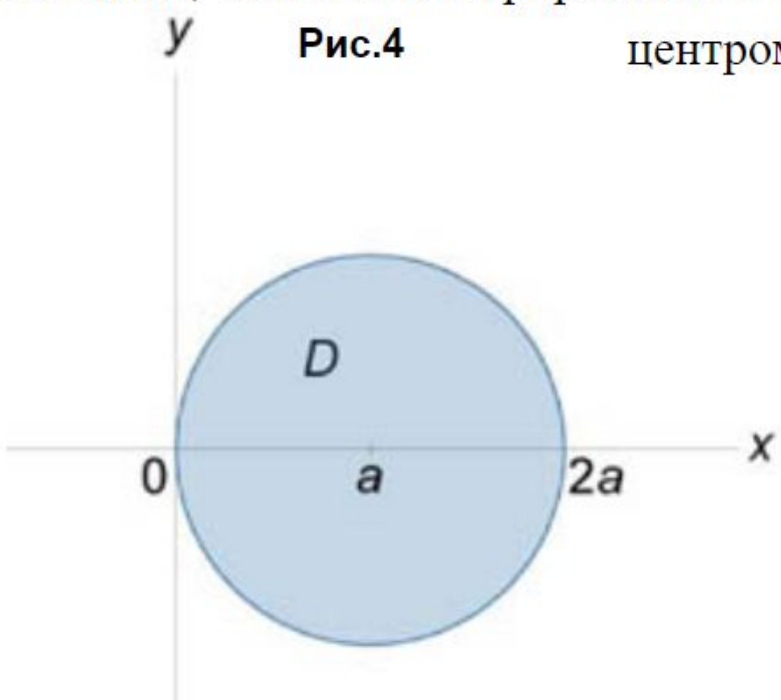
Решение.

Определим сначала область интегрирования D, которая является проекцией поверхности S на плоскость Oxy. Запишем уравнение $x^2 + y^2 = 2ax$ в следующем виде:

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0, \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2, \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Как видно, область интегрирования D представляет собой круг с центром в точке $(a, 0)$ (рисунок 4).

Рис.4



Поскольку частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

то элемент площади конической поверхности имеет вид

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy =$$

$$= \sqrt{2}dxdy.$$

Следовательно, по формуле

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

получаем

$$I = \iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS = \sqrt{2}\iint\limits_{D(x,y)}\left(xy+(y+x)\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

Для вычисления полученного интеграла удобно перейти к полярным координатам. Область интегрирования D при этом принимает вид

$$D = \left\{ (r,\varphi) \mid 0 \le r \le 2a\cos\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Тогда интеграл равен

$$I = \sqrt{2} \iint\limits_{D(r,\varphi)} \left[r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi + (r\sin\varphi + r\cos\varphi)\sqrt{r^2} \right] r dr d\varphi$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\, d\varphi \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} r^3 dr$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi) \cdot \left(\left(\frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^{2a\cos\varphi} \right) \right] d\varphi$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\cos^4\varphi d\varphi = 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos^5\varphi + \cos^4\varphi)\sin\varphi + \cos^5\varphi \right] d\varphi$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5\varphi + \cos^4\varphi)\sin\varphi d\varphi + 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = I_1 + I_2.$$

В последней формуле интеграл I_1 равен нулю, поскольку подынтегральная функция является нечетной, а интегрирование выполняется в интервале, симметричном относительно начала координат. Отсюда следует, что

$$I = I_2 = 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \cos\varphi d\varphi = 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\varphi\right)^2 d\left(\sin\varphi\right)$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\varphi\right)^2 d\left(\sin\varphi\right) = 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\right) d\left(\sin\varphi\right)$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \left[\left(\sin\varphi - \frac{2\sin^3\varphi}{3} + \frac{\sin^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = 8\sqrt{2}a^4 \left[\sin\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\sin^5\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 8\sqrt{2}a^4 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{64\sqrt{2}a^4}{15}.$$