

## Поверхностные интегралы первого рода

Рассмотрим скалярную функцию  $f(x, y, z)$  и поверхность  $S$ . Пусть  $S$  задана векторной функцией

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

где координаты  $(u, v)$  изменяются в пределах некоторой области определения  $D(u, v)$  в плоскости  $uv$ .

Заметим, что функция  $f(x, y, z)$  рассматривается только в точках, принадлежащих поверхности  $S$ , то есть

$$f[\mathbf{r}(u, v)] = f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)].$$

Поверхностный интеграл первого рода от функции  $f(x, y, z)$  по поверхности  $S$  определяется следующим образом:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D(u,v)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv,$$

где частные производные  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  и  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  равны

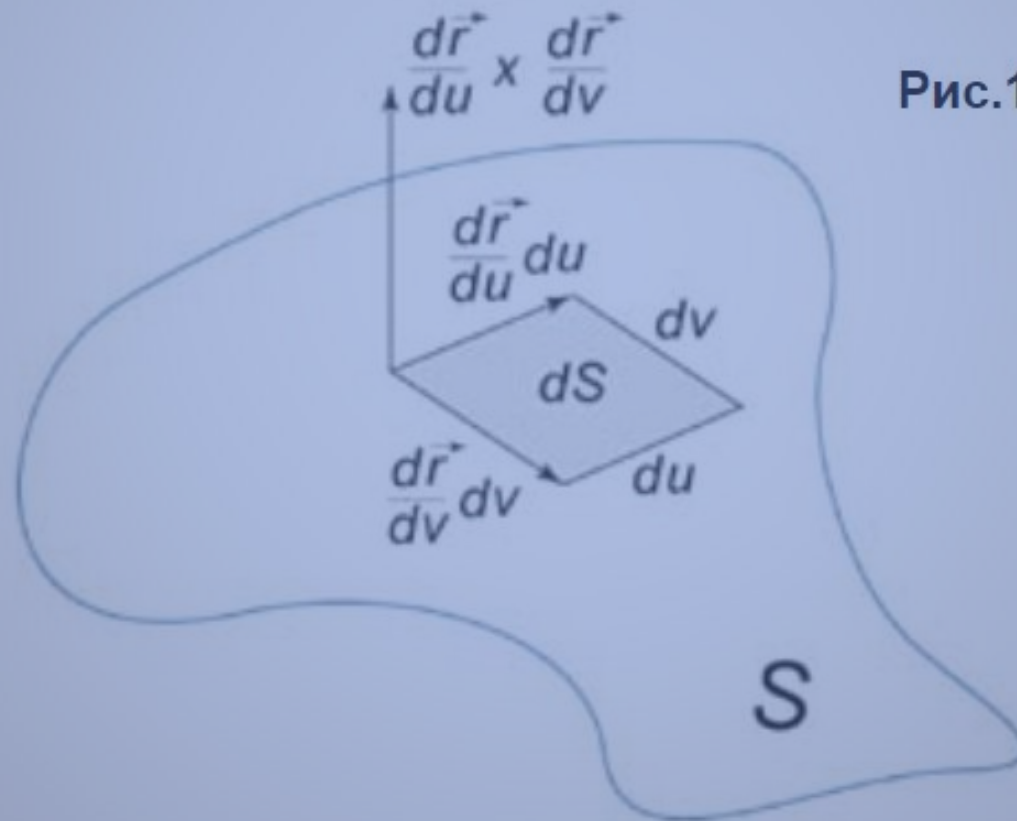
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \mathbf{k},$$

а  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  означает векторное произведение.

Вектор  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  перпендикулярен поверхности в точке  $\mathbf{r}(u, v)$ .

Абсолютное значение  $dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$  называется элементом площади: оно соответствует изменению площади  $dS$  в результате приращения координат  $u$  и  $v$  на малые значения  $du$  и  $dv$  (рисунок 1).



Площадь поверхности  $S$  выражается с помощью поверхностного интеграла в виде

$$A = \iint_S dS.$$

Если поверхность  $S$  задана уравнением  $z = z(x, y)$ , где  $z(x, y)$  – дифференцируемая функция в области  $D(x, y)$ , то поверхностный интеграл находится по формуле

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D(x,y)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Если поверхность  $S$  состоит из нескольких частей  $S_i$ , то для вычисления поверхностного интеграла можно использовать свойство аддитивности:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f(x, y, z) dS_i.$$



### Пример 1

Вычислить поверхностный интеграл  $\iint (x + y + z) dS$ , где  $S$  — часть плоскости  $x + 2y + 4z = 4$ , лежащая в первом октанте ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ).

*Решение.*

Запишем уравнение плоскости в виде  $z = z(x, y) = 1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{2}$ .

Найдем частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{4}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}$ .

Применяя формулу

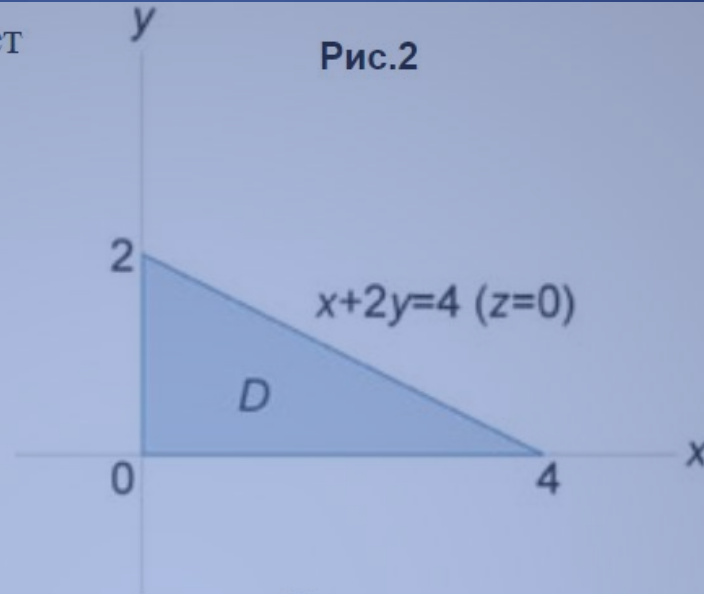
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

поверхностный интеграл можно выразить через двойной интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (x + y + z) dS = \iint_D \left(x + y + 1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \left(\frac{3x}{4} + \frac{y}{2} + 1\right) \frac{\sqrt{21}}{4} dx dy. \end{aligned}$$

Область интегрирования  $D$  представляет собой треугольник на рисунке 2.

Вычисляем окончательно заданный интеграл:



$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\sqrt{21}}{4} \int_0^2 \left[ \int_0^{4-2y} \left( \frac{3x}{4} + \frac{y}{2} + 1 \right) dx \right] dy = \frac{\sqrt{21}}{16} \int_0^2 \left[ \int_0^{4-2y} (3x + 2y + 4) dx \right] dy \\
 &= \frac{\sqrt{21}}{16} \int_0^2 \left[ \left( \frac{3x^2}{2} + 2yx + 4x \right) \Big|_{x=0}^{4-2y} \right] dy = \frac{\sqrt{21}}{16} \int_0^2 \left[ \frac{3}{2}(4-2y)^2 + 2(4-2y)y + 4(4-2y) \right] dy \\
 &= \frac{\sqrt{21}}{32} \int_0^2 \left[ 3(16 - 16y + 4y^2) + 16y - 8y^2 + 32 - 16y \right] dy = \frac{\sqrt{21}}{32} \int_0^2 (80 - 48y + 4y^2) dy \\
 &= \frac{\sqrt{21}}{4} \int_0^2 (20 - 12y + y^2) dy = \frac{\sqrt{21}}{4} \left[ \left( 20y - 6y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \right] = \frac{\sqrt{21}}{4} \left( 40 - 24 + \frac{8}{3} \right) = \frac{7\sqrt{21}}{3}.
 \end{aligned}$$

## Пример 2

Вычислить интеграл  $\iint_S z^2 dS$ , где  $S$  представляет собой полную поверхность конуса  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$ .

*Решение.*

Обозначим через  $S_1$  боковую поверхность конуса, и через  $S_2$  – его основание. Запишем данный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$I = I_1 + I_2 = \iint_{S_1} z^2 dS_1 + \iint_{S_2} z^2 dS_2.$$

Найдем сначала первый интеграл  $I_1$ , используя формулу

$$I_1 = \iint_{S_1} z^2 dS_1 = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Частные производные здесь равны

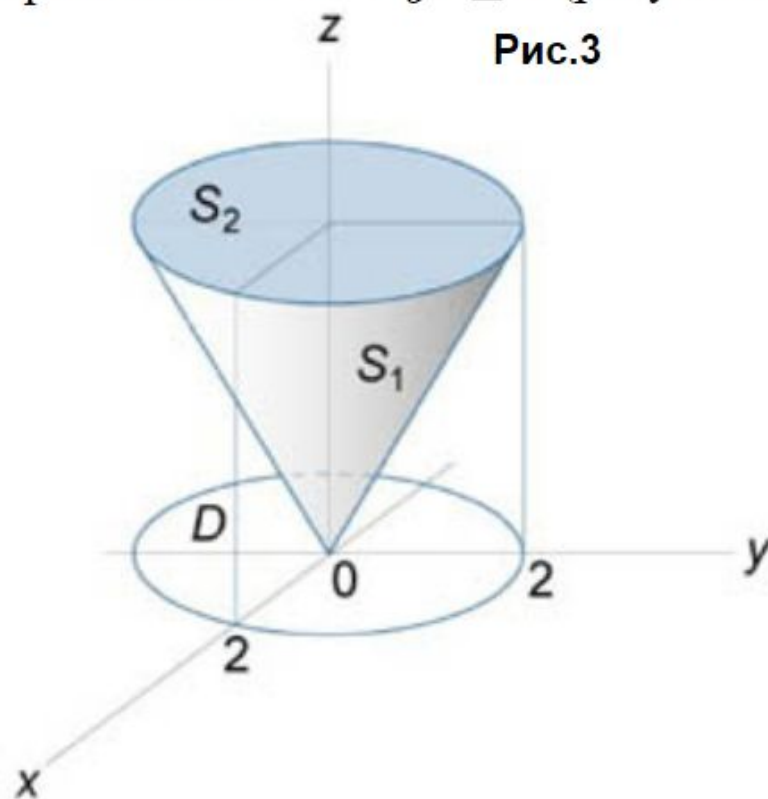
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Поскольку  $z = 2$  для основания конуса, то область интегрирования  $D(x, y)$  определяется неравенством  $x^2 + y^2 \leq 4$  (рисунок 3).





Следовательно, интеграл  $I_1$  записывается в виде

$$I_1 = \iint_{S_1} z^2 dS_1 = \sqrt{2} \iint_{D(x,y)} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Его легко вычислить в полярных координатах:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{2} \iint_{D(x,y)} (x^2 + y^2) dx dy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cdot r dr d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \left[ \left( \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 \right] = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} (2^4 - 0) = 8\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй интеграл  $I_2$ . Уравнение основания конуса имеет вид  $z = 2$ . Поэтому,

$$I_2 = \iint_{S_2} 2^2 dS_2 = 4 \iint_{S_2} dS_2,$$

где  $\iint_{S_2} dS_2$  равно площади основания  $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$ . Тогда

$$I_2 = 4 \iint_{S_2} dS_2 = 4 \cdot 4\pi = 16\pi.$$

Таким образом, полное значение поверхностного интеграла равно

$$I = I_1 + I_2 = 8\sqrt{2}\pi + 16\pi = 8\pi (\sqrt{2} + 2).$$

### Пример 3

Вычислить интеграл  $\iint_S (xy + yz + zx) dS$ , где  $S$  – часть конуса

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$  внутри поверхности  $x^2 + y^2 = 2ax$ .

*Решение.*

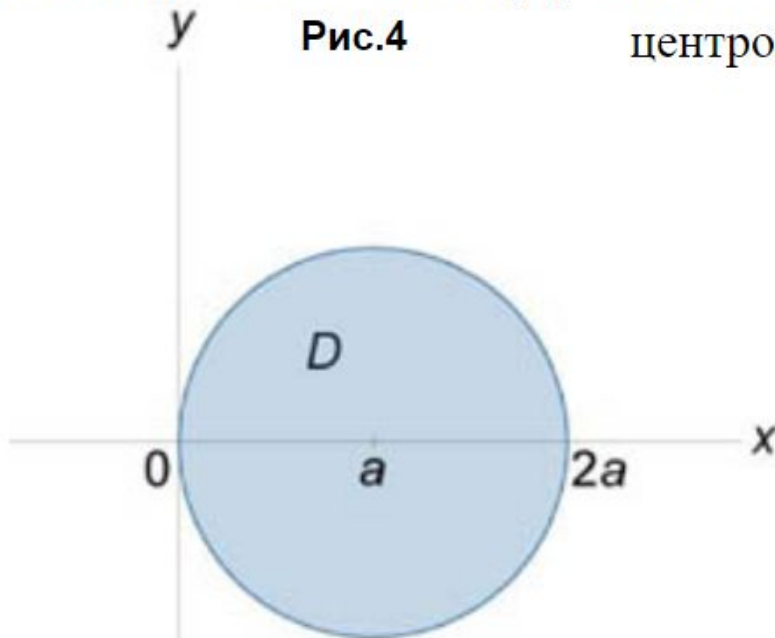
Определим сначала область интегрирования  $D$ , которая является проекцией поверхности  $S$  на плоскость  $Oxy$ . Запишем уравнение

$x^2 + y^2 = 2ax$  в следующем виде:

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0, \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2, \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Как видно, область интегрирования  $D$  представляет собой круг с

**Рис.4** центром в точке  $(a, 0)$  (рисунок 4).



Поскольку частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

то элемент площади конической поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy = \\ &= \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

получаем

$$I = \iint_S (xy + yz + zx) dS = \sqrt{2} \iint_{D(x,y)} \left( xy + (y + x) \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy.$$

Для вычисления полученного интеграла удобно перейти к полярным координатам.

Область интегрирования  $D$  при этом принимает вид

$$D = \left\{ (r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Тогда интеграл равен

$$I = \sqrt{2} \iint_{D(r, \varphi)} \left[ r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi + (r \sin \varphi + r \cos \varphi) \sqrt{r^2} \right] r dr d\varphi$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 dr$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ (\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) \cdot \left( \left( \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{2a \cos \varphi} \right) \right] d\varphi$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) \cos^4 \varphi d\varphi = 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(\cos^5 \varphi + \cos^4 \varphi) \sin \varphi + \cos^5 \varphi] d\varphi$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5 \varphi + \cos^4 \varphi) \sin \varphi d\varphi + 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = I_1 + I_2.$$



В последней формуле интеграл  $I_1$  равен нулю, поскольку подынтегральная функция является нечетной, а интегрирование выполняется в интервале, симметричном относительно начала координат. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} I &= I_2 = 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \cos \varphi d\varphi = 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi)^2 d(\sin \varphi) \\ &= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi)^2 d(\sin \varphi) = 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) d(\sin \varphi) \\ &= 4\sqrt{2}a^4 \left[ \left( \sin \varphi - \frac{2\sin^3 \varphi}{3} + \frac{\sin^5 \varphi}{5} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] = 8\sqrt{2}a^4 \left[ \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \sin^3 \left( \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \sin^5 \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= 8\sqrt{2}a^4 \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{64\sqrt{2}a^4}{15}. \end{aligned}$$

















































