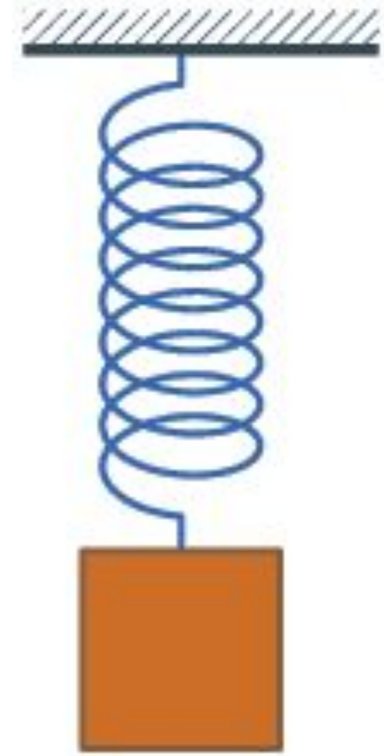
Лекция 17.

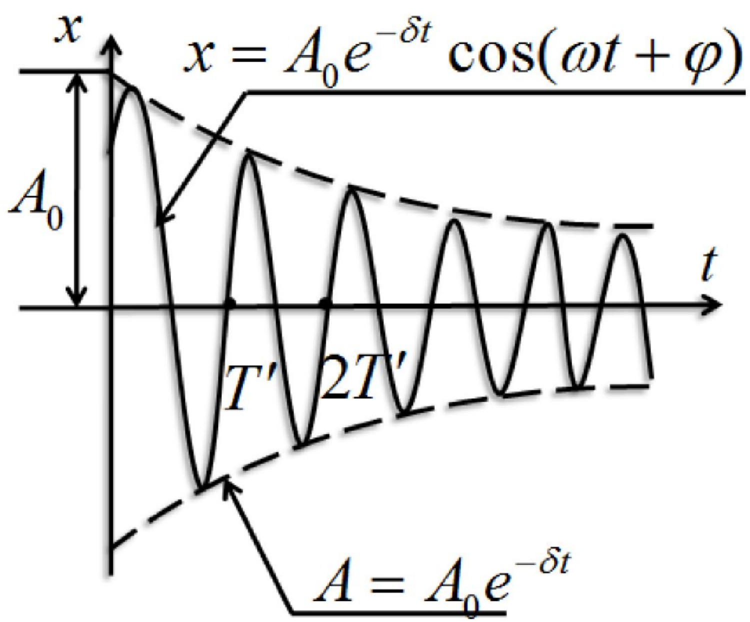
Затухающие и вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение колебаний. Явление резонанса.

Затухающие колебания.

Затуханием колебаний называется их постепенное ослабление, то есть уменьшение амплитуды со временем.

Затухание связано с потерями энергии системы. В механических системах затухание колебаний обусловлено, главным образом, трением.





Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Свободные затухающие колебания в линейной системе

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$x = x(t)$ - колеблющаяся величина,
δ - коэффициент затухания,
ω_0 - частота незатухающих колебаний (при $\delta = 0$).

Колебательная система является **линейной**, если параметры δ и ω_0 не изменяются со временем.

Системы со слабым трением ($\delta << \omega_0$)

В случае, если трение в системе мало, ее динамика остается колебательной, хотя амплитуда со временем уменьшается, а период колебаний, наоборот, увеличивается.

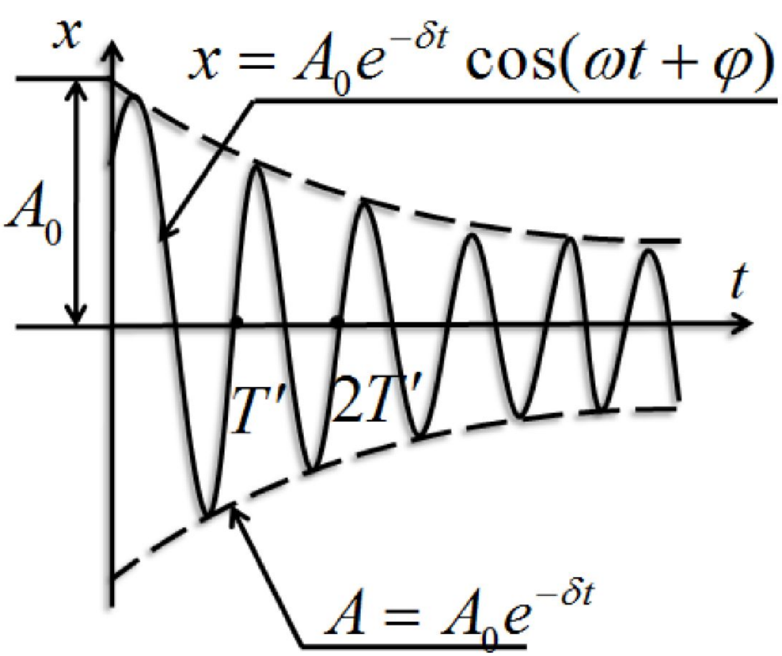
$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Амплитуда

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t}$$

Частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$



Время релаксации

Промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в е раз, называется **временем релаксации**

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

Затухание нарушает периодичность колебаний. Однако если оно мало, то можно условно пользоваться понятием периода затухающих колебаний как промежутка времени между двумя последующими максимумами колеблющейся физической величины

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Декремент затухания.

Пусть A(t) и A(t+T) – амплитуды двух последовательных колебаний, отличающихся на период. Тогда

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \frac{1}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$$

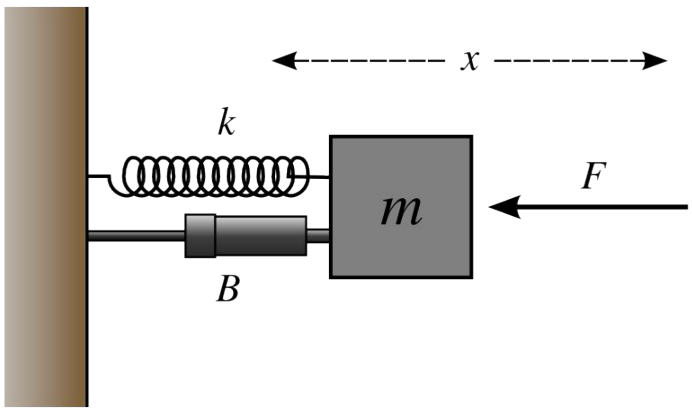
Это отношение называется **декрементом затухания**, а его логарифм – логарифмическим декрементом затухания.

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$$

Здесь N – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

Пружинный маятник с трением

F – внешняя сила
B - демпфер



Возвращающая сила (сила упругости)

$$F_{\text{упр}} = -kx$$

Сила трения

$$F_{\text{тр}} = -rv = -r\dot{x}$$

II-й закон Ньютона

$$\mathrm{m}\ddot{x} = F_{\text{тр}} + F_{\text{тр}}$$

Дифференциальное уравнение маятника с трением

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

$$\delta = \frac{r}{2m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Решение дифференциального уравнения

Запишем ДУ в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \gamma = \frac{\delta}{2\omega_0}$$

Линейное ДУ с постоянными коэффициентами – решение ищем в следующем виде

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Подставляя решение в исходное ДУ, получаем **характеристическое уравнение**

$$\lambda^2 + 2\gamma\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

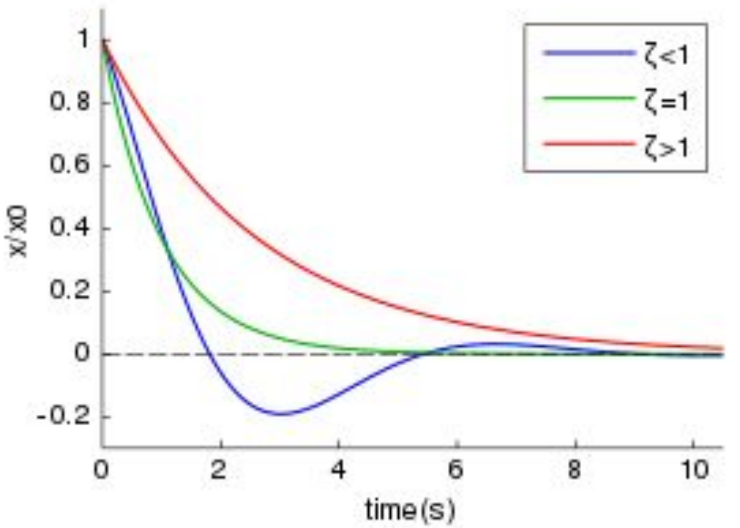
Корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \omega_0\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)$$

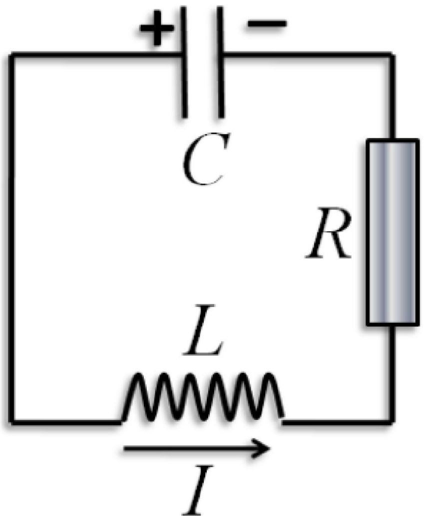
Три режима затухающих колебаний

В зависимости от величины $\gamma = \dfrac{\delta}{2\omega_0}$

1. квазипериодический режим (слабое трение) $\gamma < 1$
2. граница периодичности $\gamma = 1$
3. апериодический режим (сильное трение) $\gamma > 1$



Колебательный контур с резистором



C – емкость конденсатора
L – индуктивность катушки
R – сопротивление резистора

Закон Ома для участка цепи

$$U_R + U_C + U_L = 0$$

перепишем в виде

$$IR + \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0$$

Учтем далее, что

$$I = dq/dt$$

Дифференциальное уравнение для заряда в контуре

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

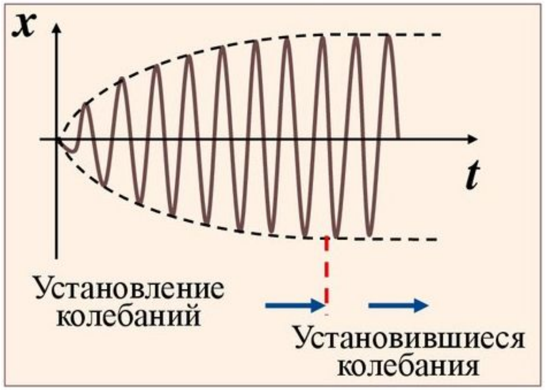
$$\omega_0 = {}^{1}\!/_{\sqrt{LC}}$$

$$\delta = {}^{R}\!/_{L}$$

Вынужденные колебания

Вынужденными называют колебания, возникающие в системе под действием периодических внешних сил.

Вынужденные колебания могут быть незатухающими даже в системах с трением. В этом случае переменная внешняя сила постоянно «накачивает» энергию в систему и компенсирует ее убыль за счет трения.



Режимы вынужденных колебаний

1. переходный (начальный) режим
2. установившиеся колебания

Установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте Ω внешнего источника

$$x(t) = x_0 \cos \Omega t$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = x_0 \cos\Omega t$$

- неоднородное линейное ДУ 2-го порядка с постоянными коэф-ми. Его решение ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\boxed{x(t) = x_1(t) + x_2(t)}$$

$$x_1(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x_2(t) = A\cos(\Omega t + \varphi_1)$$

Таким образом, вынужденные колебания представляют собой наложение двух видов движения: колебаний с собственной частотой ω_0 и колебаний с частотой вынуждающей силы Ω.

Решения ДУ для установившихся колебаний

$$x(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$$

Амплитуда и фаза вынужденных колебаний

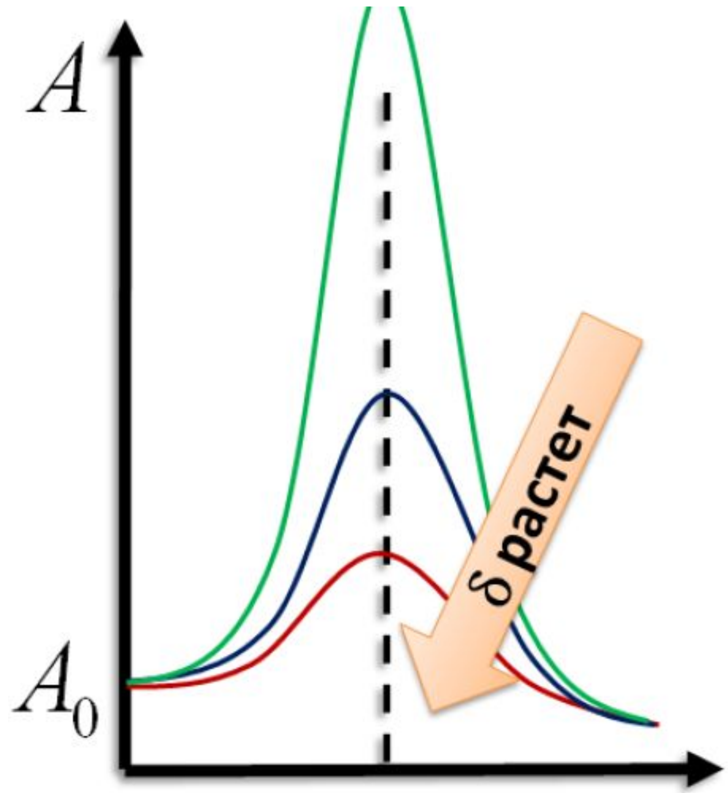
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Явление резонанса

Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы Ω к собственной частоте колебательной системы ω_0.

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$



Максимум амплитуды колебаний (производная знаменателя = 0)

$$\boxed{\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$