

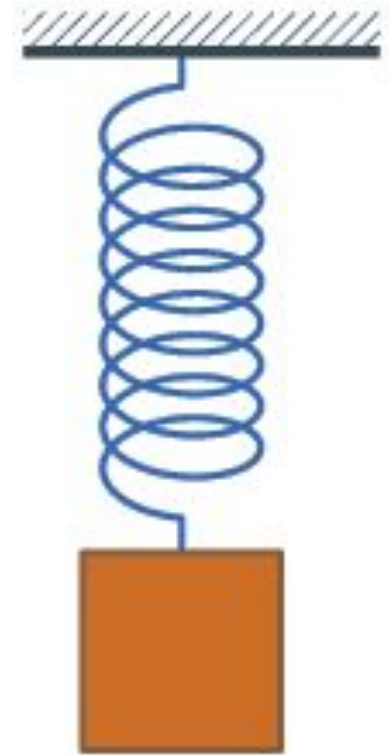
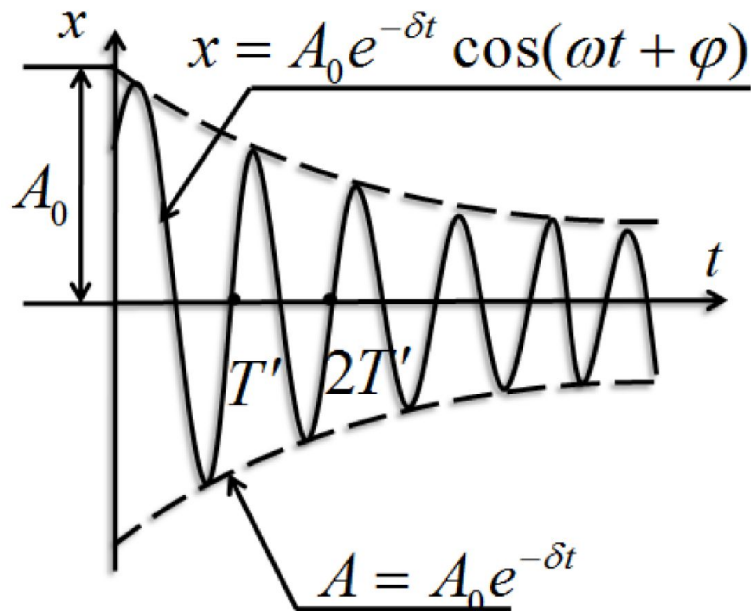
## Лекция 17.

Затухающие и вынужденные колебания.  
Дифференциальное уравнение колебаний.  
Явление резонанса.

## Затухающие колебания.

**Затуханием** колебаний называется их постепенное ослабление, то есть уменьшение амплитуды со временем.

Затухание связано с потерями энергии системы. В механических системах затухание колебаний обусловлено, главным образом, трением.



# Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Свободные затухающие колебания в линейной системе

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$x = x(t)$  - колеблющаяся величина,

$\delta$  - коэффициент затухания,

$\omega_0$  - частота незатухающих колебаний (при  $\delta = 0$ ).

Колебательная система является **линейной**, если параметры  $\delta$  и  $\omega_0$  не изменяются со временем.

## Системы со слабым трением ( $\delta \ll \omega_0$ )

В случае, если трение в системе мало, ее динамика остается колебательной, хотя амплитуда со временем уменьшается, а период колебаний, наоборот, увеличивается.

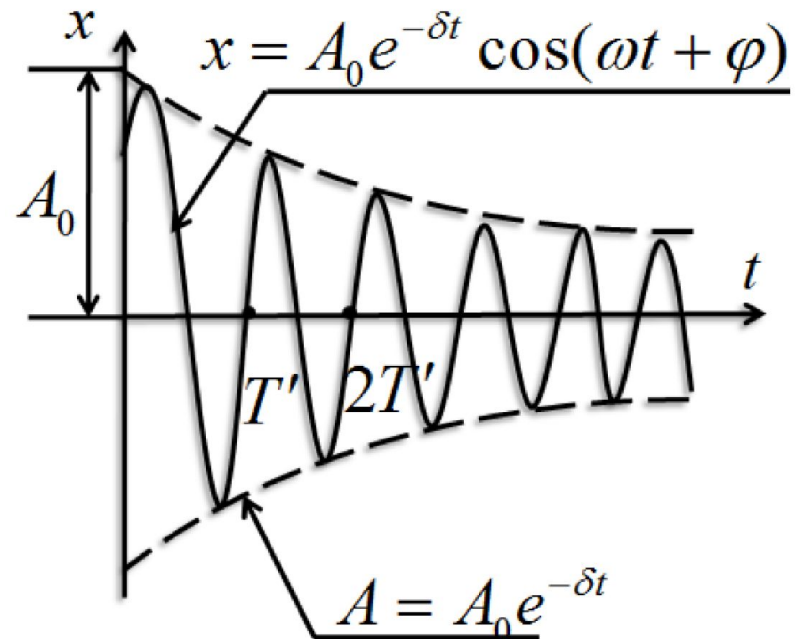
$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Амплитуда

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t}$$

Частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$



## Время релаксации

Промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется **временем релаксации**

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

Затухание нарушает периодичность колебаний. Однако если оно мало, то можно условно пользоваться понятием периода затухающих колебаний как промежутка времени между двумя последующими максимумами колеблющейся физической величины

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

## Декремент затухания.

Пусть  $A(t)$  и  $A(t+T)$  – амплитуды двух последовательных колебаний, отличающихся на период. Тогда

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \frac{1}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$$

Это отношение называется **декрементом затухания**, а его логарифм – логарифмическим декрементом затухания.

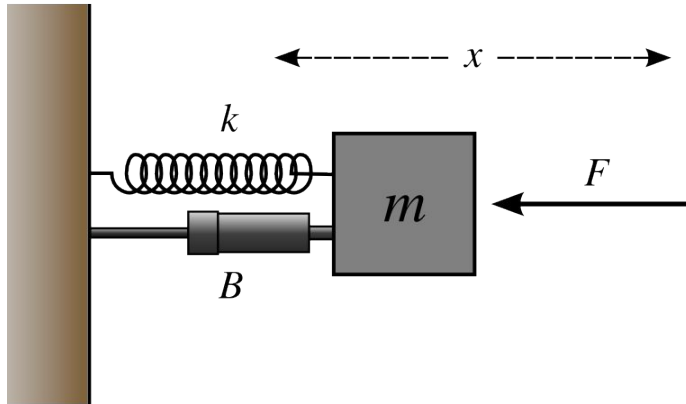
$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$$

Здесь  $N$  – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз.

# Пружинный маятник с трением

$F$  – внешняя сила

$B$  - демпфер



Возвращающая сила (сила упругости)

$$F_{\text{упр}} = -kx$$

Сила трения

$$F_{\text{тр}} = -rv = -r\dot{x}$$

II-й закон Ньютона

$$m\ddot{x} = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}}$$

Дифференциальное уравнение маятника с трением

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\delta = \frac{r}{2m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# Решение дифференциального уравнения

Запишем ДУ в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad \gamma = \frac{\delta}{2\omega_0}$$

Линейное ДУ с постоянными коэффициентами – решение ищем в следующем виде

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Подставляя решение в исходное ДУ, получаем **характеристическое уравнение**

$$\lambda^2 + 2\gamma\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Корни характеристического уравнения

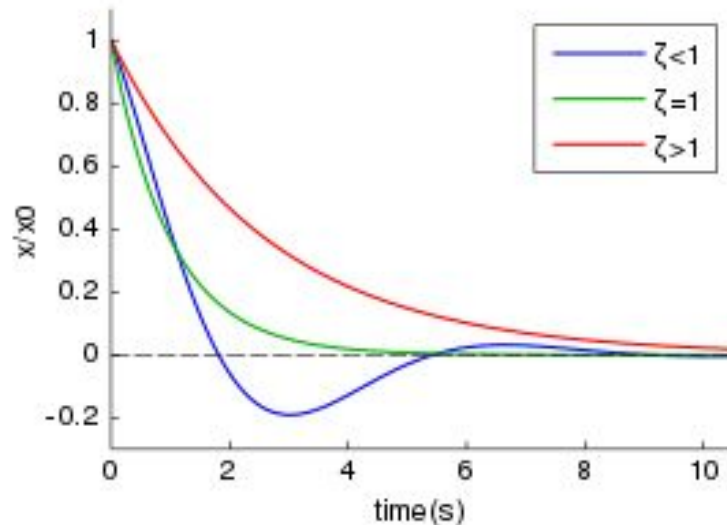
$$\lambda_{1,2} = \omega_0 \left( -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1} \right)$$



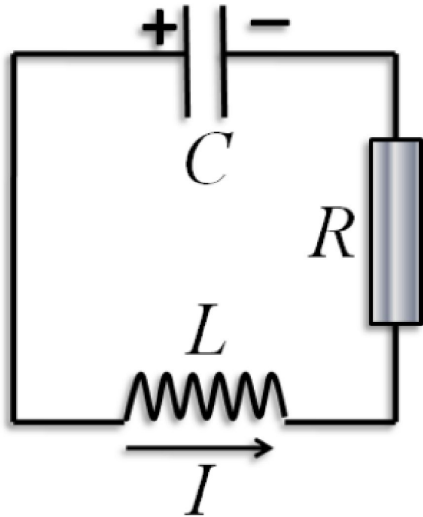
# Три режима затухающих колебаний

В зависимости от величины  $\gamma = \frac{\delta}{2\omega_0}$

1. квазипериодический режим (слабое трение)  $\gamma < 1$
2. граница периодичности  $\gamma = 1$
3. апериодический режим (сильное трение)  $\gamma > 1$



## Колебательный контур с резистором



Закон Ома для участка цепи

$$U_R + U_C + U_L = 0$$

перепишем в виде

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0$$

Учтем далее, что

$$I = dq/dt$$

C – емкость конденсатора  
L – индуктивность катушки  
R – сопротивление резистора

Дифференциальное уравнение для заряда в контуре

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$\delta = R/L$$

# Вынужденные колебания

**Вынужденными** называют колебания, возникающие в системе под действием периодических внешних сил.

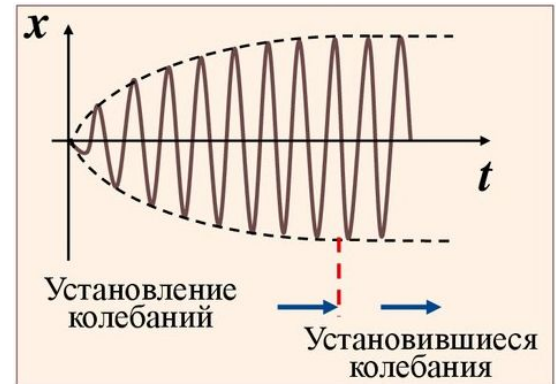
Вынужденные колебания могут быть незатухающими даже в системах с трением. В этом случае переменная внешняя сила постоянно «накачивает» энергию в систему и компенсирует ее убыль за счет трения.

Режимы вынужденных колебаний

1. переходный (начальный) режим
2. установившиеся колебания

Установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте  $\Omega$  внешнего источника

$$x(t) = x_0 \cos \Omega t$$



## Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = x_0 \cos \Omega t$$

- неоднородное линейное ДУ 2-го порядка с постоянными коэф-ми. Его решение ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x_2(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_1)$$

Таким образом, вынужденные колебания представляют собой наложение двух видов движения: колебаний с собственной частотой  $\omega_0$  и колебаний с частотой вынуждающей силы  $\Omega$ .

Решения ДУ для установившихся колебаний

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \varphi)$$

Амплитуда и фаза вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

## Явление резонанса

**Резонансом** называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы  $\Omega$  к собственной частоте колебательной системы  $\omega_0$ .

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

Максимум амплитуды колебаний  
(производная знаменателя = 0)

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$

