Интервальные оценки параметров распределения

План:

I. Точность оценки. Доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал.

II. Интервальные оценки параметров нормального распределения.

1) Доверительный интервал для оценки математического ожидания при известном σ.

2) Доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестном σ.

3) Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ.

III. Оценка истинного значения измеряемой величины и точности измерений.

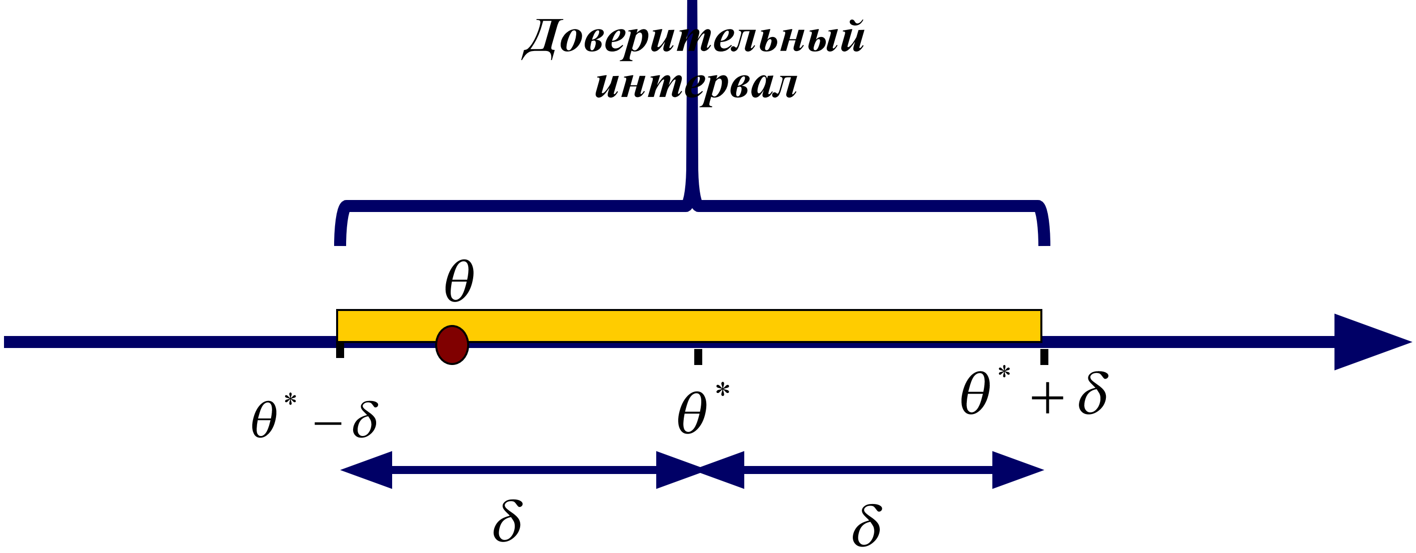
I. Точность оценки.
Доверительная вероятность (надежность).
Доверительный интервал.

$$P\left(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right) = \gamma$$

- γ – доверительная вероятность (надежность оценки)

- $\delta > 0$ – точность оценки

I. Точность оценки.
Доверительная вероятность (надежность).
Доверительный интервал.



Ежи Нейман
(*1894-1981*)

Рональд Фишер
(*1890-1962*)

II. Интервальные оценки параметров нормального распределения.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

$$X \sim N(a, \sigma)$$

$$a = M(X) \qquad \sigma = \sigma(X)$$

1) *Доверительный интервал для оценки математического ожидания при известном σ*

- **Дано:** случайная выборка объема ***n*** из генеральной совокупности имеющей нормальное распределение. Среднее квадратическое отклонение **σ** предполагается **известным**.

- **Требуется:** оценить математическое ожидание ***a*** по его выборочной средней $\bar{x}$ с заданной надежностью γ.

$$\bar{x} - \delta < a < \bar{x} + \delta$$

1) *Доверительный интервал для оценки математического ожидания при известном σ*

$$\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

- $\delta = \dfrac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ - *точность оценки*;
- t - *значение аргумента функции Лапласа, при котором* $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$;

ПРИМЕР 1.

- Случайная величина прочности бетона X имеет нормальное распределение с известным стандартом $\sigma = 3$ МПа. Найти доверительный интервал для оценки средней прочности a по выборочной средней $\bar{x}$ =16,8 МПа, если объем выборки $n = 36$ и задана доверительная вероятность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Таблица значений функции Ф(x)

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
1,31	0,4049	1,61	0,4463	1,91	0,4719	2,42	0.4922
1,32	0,4066	1,62	0,4474	1,92	0,4726	2.44	0,4927
1.33	0,4082	1,33	0,4484	1,93	0,4732	2,46	0,4931
1,34	0,4099	1,64	0,4495	1,94	0,4738	2,48	0,4934
1,35	0,4115	1,65	0,4505	1,95	0,4744	2.50	0,4938
1,36	0,4131	1,60	0.4515	1,96	0,4750	2,52	0,4941
1,37	0,4147	1.67	0,4525	1,97	0,4756	2,54	0,4945
1,38	0,4162	1,68	0,4535	1,98	0,4761	2,56	0,4948
1,39	0,4177	1,69	0.4545	1,99	0,4767	2,58	0,4951

Таблица значений функции Ф(x)

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
1,31	0,4049	1,61	0,4463	1,91	0,4719	2,42	0.4922
1,32	0,4066	1,62	0,4474	1,92	0,4726	2.44	0,4927
1.33	0,4082	1,33	0,4484	1,93	0,4732	2,46	0,4931
1,34	0,4099	1,64	0,4495	1,94	0,4738	2,48	0,4934
1,35	0,4115	1,65	0,4505	1,95	0,4744	2.50	0,4938
1,36	0,4131	1,60	0.4515	1,96	0,4750	2,52	0,4941
1,37	0,4147	1.67	0,4525	1,97	0,4756	2,54	0,4945
1,38	0,4162	1,68	0,4535	1,98	0,4761	2,56	0,4948
1,39	0,4177	1,69	0.4545	1,99	0,4767	2,58	0,4951

Таблица значений функции Ф(x)

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
1,31	0,4049	1,61	0,4463	1,91	0,4719	2,42	0.4922
1,32	0,4066	1,62	0,4474	1,92	0,4726	2.44	0,4927
1.33	0,4082	1,33	0,4484	1,93	0,4732	2,46	0,4931
1,34	0,4099	1,64	0,4495	1,94	0,4738	2,48	0,4934
1,35	0,4115	1,65	0,4505	1,95	0,4744	2.50	0,4938
1,36	0,4131	1,60	0.4515	1,96	0,4750	2,52	0,4941
1,37	0,4147	1.67	0,4525	1,97	0,4756	2,54	0,4945
1,38	0,4162	1,68	0,4535	1,98	0,4761	2,56	0,4948
1,39	0,4177	1,69	0.4545	1,99	0,4767	2,58	0,4951

ПРИМЕР 2.

Найти минимальный объем выборки, на основании которой можно было бы оценить параметры некоторой технической операции с ошибкой, не превышающей 10 и надежностью 0,95, если предположить, что параметр этой технической операции имеет нормальное распределение $X \sim N(a, 50)$

2) Доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестном σ

Дано: $n, \quad X \sim N(a, \sigma), \quad \gamma$

Требуется: $\bar{x} - \delta < a < \bar{x} + \delta$

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}$$

- s -*исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение*;
- t_γ -*определяется по «<u>Таблице значений</u>* $t_\gamma(\gamma, n)$»

ПРИМЕР 3.

- Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	-2	0	1	3
n_i	2	3	4	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание нормально распределенного признака генеральной совокупности при помощи доверительного интервала.

Таблица значений $t_\gamma = t_\gamma(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	2,861
6	2,57	4.03	6,86	25	2,064	2.797	2.797
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2.756	2.756
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	2,720
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2.708	2.708
10	2.26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	2,692
11	2.23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	2,679
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	2,662
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	2,649
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	2,640
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2.633	2.633
16	2,13	2.95	4,07	100	1,984	2,627	2,627
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	2,617
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2.576	2.576
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $t_\gamma = t_\gamma(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	2,861
6	2,57	4.03	6,86	25	2,064	2.797	2.797
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2.756	2.756
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	2,720
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2.708	2.708
10	2.26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	2,692
11	2.23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	2,679
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	2,662
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	2,649
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	2,640
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2.633	2.633
16	2,13	2.95	4,07	100	1,984	2,627	2,627
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	2,617
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2.576	2.576
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $t_{\gamma} = t_{\gamma}(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	2,861
6	2,57	4.03	6,86	25	2,064	2.797	2.797
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2.756	2.756
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	2,720
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2.708	2.708
10	2.26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	2,692
11	2.23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	2,679
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	2,662
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	2,649
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	2,640
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2.633	2.633
16	2,13	2.95	4,07	100	1,984	2,627	2,627
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	2,617
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2.576	2.576
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $t_\gamma = t_\gamma(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	2,861
6	2,57	4.03	6,86	25	2,064	2.797	2.797
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2.756	2.756
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	2,720
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2.708	2.708
10	2.26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	2,692
11	2.23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	2,679
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	2,662
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	2,649
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	2,640
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2.633	2.633
16	2,13	2.95	4,07	100	1,984	2,627	2,627
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	2,617
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2.576	2.576
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $t_\gamma = t_\gamma(\gamma, n)$

n	γ			*n*	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	2,861
6	2,57	4.03	6,86	25	2,064	2.797	2.797
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2.756	2.756
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	2,720
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2.708	2.708
10	**2,26**	3,25	4,78	45	2,016	2,692	2,692
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	2,679
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	2,662
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	2,649
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	2,640
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2.633	2.633
16	2,13	2.95	4,07	100	1,984	2,627	2,627
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	2,617
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2.576	2.576
19	2,10	2,88	3,92				

3) *Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака X с заданной надежностью γ*

$$s \cdot (1-q) < \sigma < s \cdot (1+q)$$ (*при q*<1)

$$0 < \sigma < s \cdot (1+q)$$ (*при q*>1)

- ***s*** - *исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение*;
- $q = q(\gamma, n)$ -*определяется по «Таблице значений q»*

ПРИМЕР 4.

- Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 25$ найдено исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение $s = 0,8$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

III. Оценка истинного значения измеряемой величины и точности измерений

- ***Истинное значение*** *измеряемой величины можно оценивать по среднему арифметическому результатов отдельных измерений при помощи доверительных интервалов.*
- ***Точность измерений* (*точность прибора*)** *характеризуется с помощью среднего квадратического отклонения σ случайных ошибок измерения.*