Глава 4. Симплексный метод

4.1. Графическая интерпретация

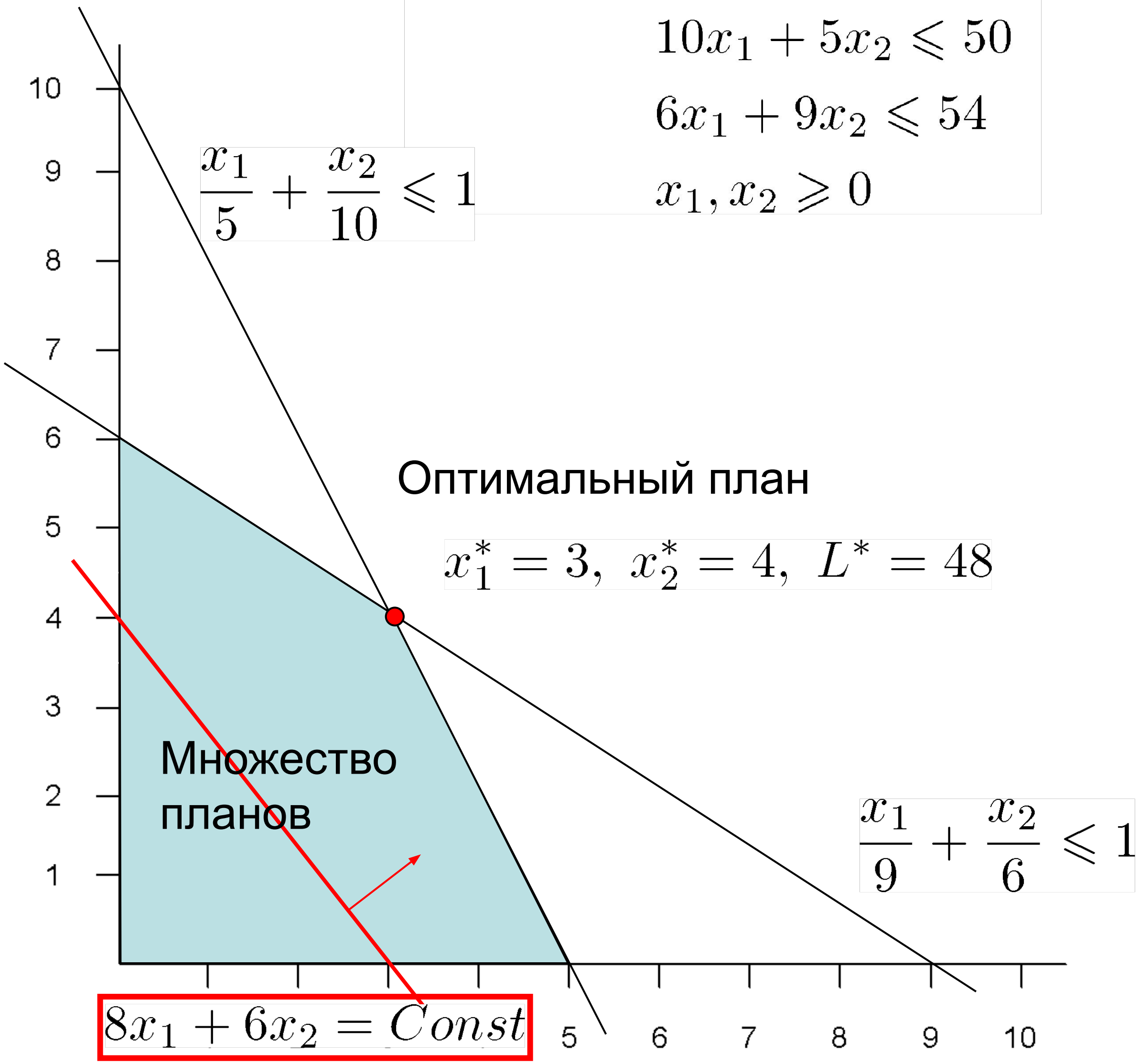
Пример

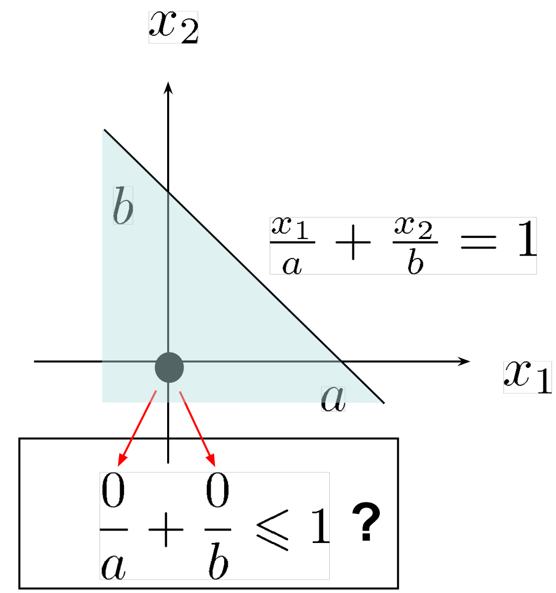
$$L(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$10x_1 + 5x_2 \leqslant 50$$

$$6x_1 + 9x_2 \leqslant 54$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$





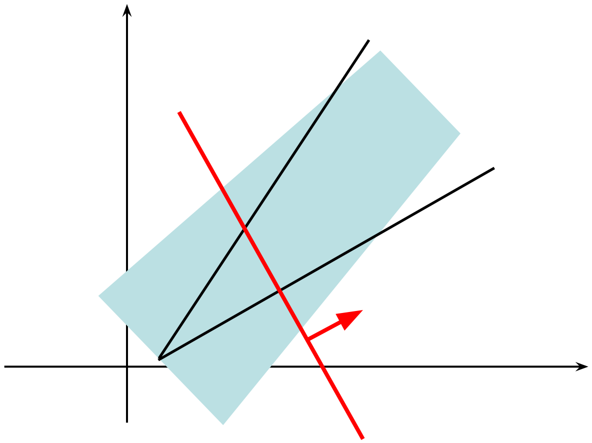
2

Гипотезы

1. Множество планов задачи линейного программирования является выпуклым многогранником с конечным числом крайних точек или выпуклой неограниченной многогранной областью.

2. Задача может не иметь решения только в двух случаях:

- когда множество планов пусто, т. е. условия задачи противоречивы;
- когда множество планов неограничено в сторону оптимизации.



2

Гипотезы

3. Оптимальный план, если он существует, находится в крайней точке множества планов. Если изоцелевая гиперплоскость совпадает с одной из граней многогранника, то все крайние точки, лежащие на этой грани, имеют равное значение целевой функции.

<u>В общем многомерном случае эти гипотезы нужно доказать!</u>

4.2. Свойства планов задачи ЛП

Алгебраический подход

Алгебраический подход

$$L(\vec{X}) = \overrightarrow{c}^T \overrightarrow{X} \to \min,$$
$$A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{b},$$
$$\overrightarrow{X} \geqslant 0.$$

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{P}_j = \vec{P}_0,$$
$$x_j \geqslant 0.$$

1

Свойство 1

Множество планов задачи линейного программирования выпукло.

Пусть $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ – планы. Это значит, что

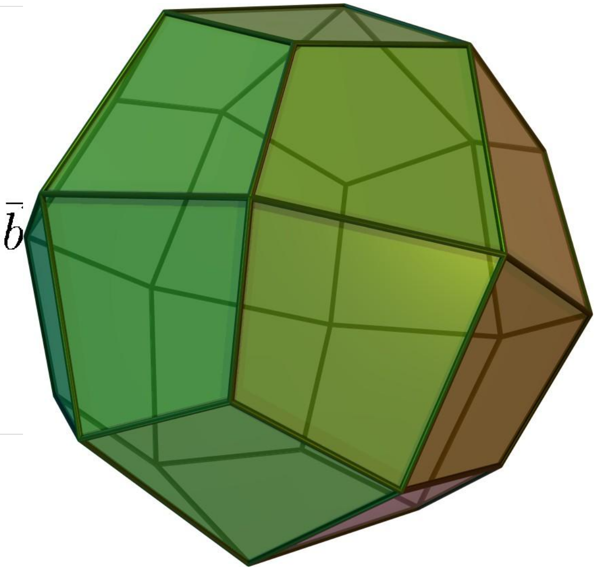
$$A\vec{X}_1 = \vec{b},\ \vec{X}_1 \geqslant 0,$$
$$A\vec{X}_2 = \vec{b},\ \vec{X}_2 \geqslant 0.$$

Возьмем выпуклую комбинацию планов $\vec{X}_1, \vec{X}_2$

$$\vec{X} = (1-\lambda)\vec{X}_1 + \lambda\vec{X}_2, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Проверим ее на удовлетворение условиям задачи:

$$A\vec{X} = A[(1-\lambda)\vec{X}_1 + \lambda\vec{X}_2] =$$
$$(1-\lambda)A\vec{X}_1 + \lambda A\vec{X}_2 = (1-\lambda)\vec{b} + \lambda\vec{b}$$
$$\vec{X} = \underbrace{(1-\lambda)}_{\geqslant 0}\underbrace{\vec{X}_1}_{\geqslant 0} + \underbrace{\lambda}_{\geqslant 0}\underbrace{\vec{X}_2}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$



2

Свойство 2

Оптимальный план находится в крайней точке множества планов.

Допустим противное, т. е. предположим, что оптимальный план $\vec{X}$ – не крайняя точка. Тогда по теореме о представлении она является выпуклой комбинацией крайних точек $\vec{X}_k$ множества планов D:

$$\vec{X}^* = \sum \alpha_k \vec{X}_k, \quad \text{где } \alpha_k \geqslant 0, \ \sum \alpha_k = 1.$$

Тогда

$$L(\vec{X}^*) = \vec{c}^T \vec{X}^* = \vec{c}^T \sum \alpha_k \vec{X}_k =$$

$$= \sum \alpha_k c^T \vec{X}_k = \sum \alpha_k L(X_k) \geqslant \sum \alpha_k \min_k L(\vec{X}_k) =$$

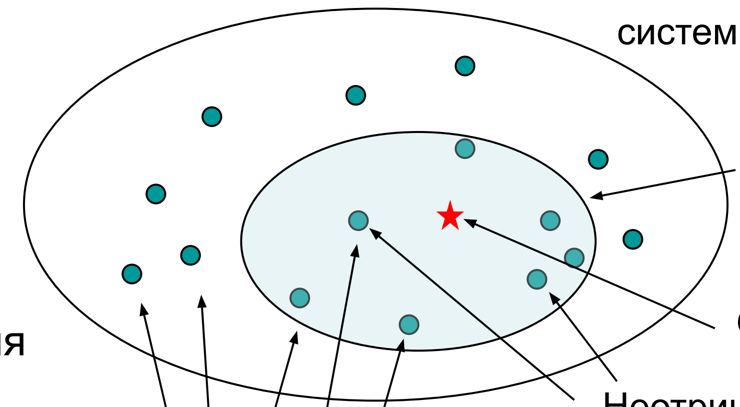
$$= \min_k L(\vec{X}_k) \sum \alpha_k = \min_k L(\vec{X}_k)$$

3

Опорные планы

<u>Как найти крайнюю точку чисто алгебраическим способом?</u>

$$L(\vec{X}) = \vec{c}^{\,T}\vec{X} \to \min,$$
$$A\vec{X} = \vec{b},$$
$$\vec{X} \geqslant 0.$$



С алгебраической точки зрения решить задачу линейного программирования – значит найти

1) неотрицательное

2) частное решение системы линейных уравнений,

3) дающее экстремум целевой функции

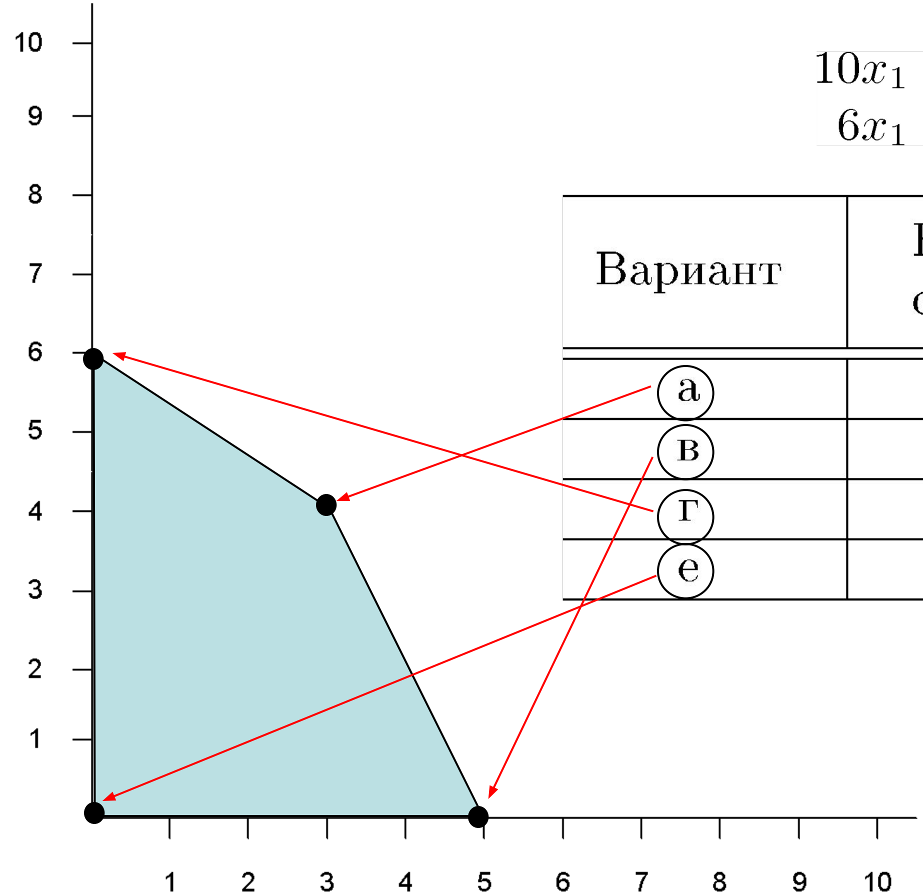
Определение *План* $\vec{X} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ *задачи линейного программирования называется* опорным, *если векторы-столбцы матрицы* A, *соответствующие ненулевым компонентам вектора* $\vec{X}$, *являются линейно независимыми.*

Опорные планы

В опорном плане имеется не более $r = Rank(A)$ ненулевых компонент. Если нет линейно зависимых уравнений, то $r = m$. Если ненулевых компонент ровно m, то план является *невырожденным*, в противном случае — *вырожденным*.

Пример

$$\begin{array}{lllll} 10x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = 50 \\ 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & = 54 \end{array}$$



Вариант	Базисные столбцы	x_1	x_2	x_3	x_4
а	1, 2	3	4	0	0
в	1, 4	5	0	0	24
г	2, 3	0	6	20	0
е	3, 4	0	0	50	54

Гипотеза?

Свойство 3

План $\vec{X}$ является крайней точкой множества планов тогда и только тогда, когда он опорный.

Доказательство необходимости. Пусть план $\vec{X} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — опорный. Докажем, что он является крайней точкой.

Reducio ad absurdum. Допустим, что он не является крайней точкой. Тогда найдутся два такие **различные** векторы $\vec{X}_1 \geqslant \vec{0}$ и $\vec{X}_2 \geqslant \vec{0}$, что

$$\vec{X} = (1-\lambda)\vec{X}_1 + \lambda\vec{X}_2, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{1}$$

Т. к. план $\vec{X}$ опорный, то он имеет следующую структуру:

$$\vec{X} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T,$$

где $\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_m$ линейно независимы. Из (1) следует, что $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ имеют такую же структуру:

$$\vec{X}_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}, 0, \ldots, 0)^T,$$

$$\vec{X}_2 = (x_1^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}, 0, \ldots, 0)^T.$$

4

Свойство 3

Поскольку $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ – планы, то

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(1)} \vec{P}_i = \vec{P}_0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(2)} \vec{P}_i = \vec{P}_0.$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\sum_{i=1}^{m} [x_i^{(1)} - x_i^{(2)}] \vec{P}_i = \vec{0}.$$

Так как векторы $\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_m$ линейно независимы, такое равенство возможно, если выражения в квадратных скобках одновременно равны нулю. Следовательно, $x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$ и предположение о том, что векторы $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ различны, ложно.

Достаточность самостоятельно

Общая схема решения задачи ЛП

Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между крайними точками и опорными планами. Этот фундаментальный вывод открывает следующий путь решения задачи линейного программирования.

Для нахождения оптимального плана нужно:

- найти все базисные решения соответствующей системы линейных уравнений;
- выбрать из них неотрицательные;
- подставляя выбранные решения в целевую функцию, найти наилучшее.

Пример

Вариант	x_1	x_2	x_3	x_4	L
а	3	4	0	0	48
в	5	0	0	24	40
г	0	6	20	0	36
е	0	0	50	54	0

Чем плох этот метод? $C_{100}^{20} \approx 10^{20} = 100000000000000000000$

4.3. Теория симплексного метода

1

Общая идея – упорядочение перебора

Приемы упорядочения перебора

1. **Ограничение перебора.** Состоит в том, что следующий анализируемый вариант выбирается не где попало, а в некоторой связи с предыдущим.

2. **Направленность перебора.** При переборе целевая функция должна все время улучшаться. Таким образом, каждый раз отсекается множество заведомо неперспективных вариантов.

3. **Критерий оптимальности.** Неоценимую роль для любого метода играет критерий оптимальности, который позволяет распознать в текущем варианте оптимальный без перебора всех оставшихся.

Каждой крайней точке соответствует опорный план – неотрицательное базисное решение системы уравнений; перебор крайних точек сводится к перебору базисов.

2

Ограничение перебора

В симплексном методе ограничение перебора состоит в том, что новый базис получается из текущего замещением всего одного вектора.

Имеем задачу ЛП в векторном виде:

$$L(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{P}_j = \vec{P}_0,$$

$$x_j \geqslant 0.$$

Пусть включаемый вектор $\vec{P}_k$ нам известен. Спрашивается, какой вектор следует исключить из базиса? Любой или конкретный $\vec{P}_l$?

2

Ограничение перебора

Пусть имеется текущий опорный план $\vec{X} = (x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$. Векторы $B = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_m\}$ образуют текущий базис. Поскольку $\vec{X}$ – план, то

$$x_1\vec{P}_1 + \cdots + x_m\vec{P}_m = \vec{P}_0. \qquad (1)$$

Попытаемся ввести вектор $\vec{P}_k$ в базис. Для этого разложим его по текущему базису:

$$x_{1k}\vec{P}_1 + \cdots + x_{mk}\vec{P}_m = \vec{P}_k.$$

Это выражение можно переписать в виде:

$$-x_{1k}\vec{P}_1 - \cdots - x_{mk}\vec{P}_m + \vec{P}_k = \vec{0}. \qquad (2)$$

Возьмем некоторое число $\theta > 0$, умножим на него равенство (2) и прибавим к (1):

$$(x_1 - \theta x_{1k})\vec{P}_1 + \cdots + (x_l - \theta x_{lk})\vec{P}_l + \ldots + (x_m - \theta x_{mk})\vec{P}_m + \theta\vec{P}_k = \vec{P}_0. \qquad (3)$$

2

Ограничение перебора

$$(x_1 - \theta x_{1k})\vec{P}_1 + \cdots + (x_l - \theta x_{lk})\vec{P}_l + \ldots + (x_m - \theta x_{mk})\vec{P}_m + \theta \vec{P}_k = \vec{P}_0. \quad (3)$$

Выражение (3) представляет собой разложение $\vec{P}_0$ по системе векторов $\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_m, \vec{P}_k$. Если число θ очень мало, то все коэффициенты разложения будут положительными, следовательно они образуют план

$$\vec{X}' = ((x_1 - \theta x_{1k}), \ldots, (x_l - \theta x_{lk}), \ldots, (x_m - \theta x_{mk}), \theta, 0, \ldots, 0)^T.$$

План $\vec{X}'$ не является опорным, так как содержит $m+1$ ненулевую компоненту (система из $m+1$ вектора не может быть линейно независимой).

Будем постепенно увеличивать значение θ и посмотрим, что произойдет с компонентами плана $\vec{X}'$. Те скобки, где $x_{ik} \leqslant 0$, останутся положительными при любых θ, а те, где $x_{ik} > 0$, будут уменьшаться. Наконец наступит момент, когда одна из скобок, скажем, l-я обратится в нуль. Это произойдет при $x_l - \theta x_{lk} = 0$, откуда

$$\theta = \theta_0 = \frac{x_l}{x_{lk}} = \min_{x_{ik}>0} \frac{x_i}{x_{ik}}. \quad (4)$$

Ограничение перебора

Таким образом, при $\theta = \theta_0$ образуется новый опорный план

$$\vec{X}' = (x'_1, \ldots, x'_{l-1}, 0, x'_{l+1}, \ldots, x'_m, x'_k, 0, \ldots, 0)^T,$$

который будет содержать ровно m ненулевых компонент. Согласно (4) при $\theta = \theta_0$

$$\boxed{\begin{aligned} x'_i &= x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i \neq k \\ x'_k &= \frac{x_l}{x_{lk}}. \end{aligned}}$$

2

Ограничение перебора

Пример

$$\begin{array}{lllll} 10x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = 50 \\ 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & = 54. \end{array}$$

Вариант	Базисные столбцы	x_1	x_2	x_3	x_4
а	1, 2	3	4	0	0
в	1, 4	5	0	0	24
г	2, 3	0	6	20	0
е	3, 4	0	0	50	54

Возьмем исходный опорный план (вариант«е»):

$$\vec{X} = (0, 0, 50, 54)^T = (0, 0, x_3, x_4)^T$$

Ему соответствует базис $B = \{\vec{P}_3, \vec{P}_4\}$.

Для того, чтобы ввести вектор $\vec{P}_1$, в базис, разложим его по текущему базису.

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = x_{31}\vec{P}_3 + x_{41}\vec{P}_4 = x_{31}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{41}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 10\vec{P}_3 + 6\vec{P}_4.$$

$$\frac{x_l}{x_{l1}} = \frac{x_3}{x_{31}} = \min_{i\in\{3,4\}} \frac{x_i}{x_{i1}} = \min\left(\frac{x_3}{x_{31}}, \frac{x_4}{x_{41}}\right) = \min\left(\frac{50}{10}, \frac{54}{6}\right) = 5.$$

2

Ограничение перебора

$$\frac{x_l}{x_{l1}} = \frac{x_3}{x_{31}} = \min_{i\in\{3,4\}} \frac{x_i}{x_{i1}} = \min\left(\frac{x_3}{x_{31}}, \frac{x_4}{x_{41}}\right) = \min\left(\frac{50}{10}, \frac{54}{6}\right) = 5.$$

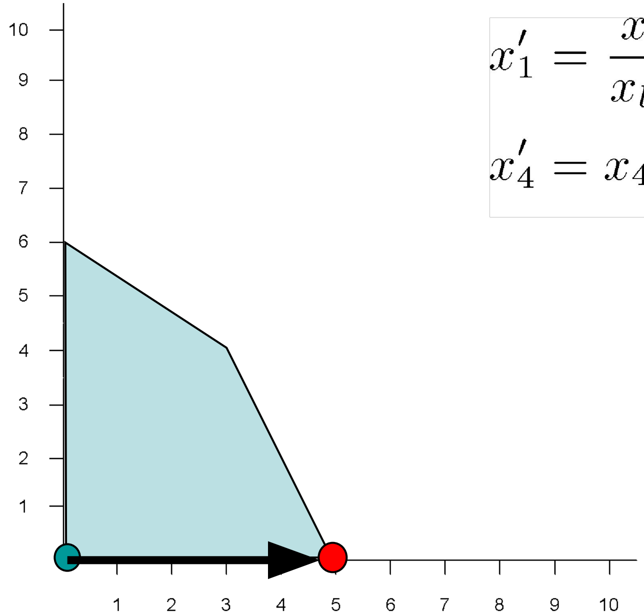
Минимум достигается при $l = 3$, следовательно из текущего базиса нужно исключить вектор $\vec{P}_3$.

$$B = \{\vec{P}_3, \vec{P}_4\} \xrightarrow[-\vec{P}_3]{+\vec{P}_1} \{\vec{P}_1, \vec{P}_4\} = B'$$

Новый опорный план $\vec{X}' = (x'_1, 0, 0, x'_4)^T$

$$x'_1 = \frac{x_l}{x_{lk}} = 5$$

$$x'_4 = x_4 - x_{41}\frac{x_l}{x_{lk}} = 54 - 6\cdot 5 = 24.$$



Вариант	Базисные столбцы	x_1	x_2	x_3	x_4
а	1, 2	3	4	0	0
в	1, 4	5	0	0	24
г	2, 3	0	6	20	0
е	3, 4	0	0	50	54

3

Направленность перебора

Поскольку выбор вектора, исключаемого из базиса, предопределен предыдущими рассуждениями, остается одна степень свободы – выбор вектора, подлежащего включению в базис. Это нужно сделать так, чтобы целевая функция при переходе от текущего опорного плана $\vec{X}$ к новому опорному плану $\vec{X}'$ улучшилась (уменьшилась).

Напомним формулы преобразования компонент плана:

$$x_i' = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i \neq k \tag{1}$$

$$x_k' = \frac{x_l}{x_{lk}}, \tag{2}$$

3

Направленность перебора

$$L(\vec{X}) = \sum_{i \neq l} c_i x_i + c_l x_l.$$

$$L(\vec{X}') = \sum_{i \neq l} c_i x_i' + c_k x_k'.$$

$$L(\vec{X}') = \sum_{i \neq l} c_i \left(x_i - x_{ik} \frac{x_l}{x_{lk}} \right) + c_k \frac{x_l}{x_{lk}} =$$

раскроем скобки, прибавим и вычтем $c_l x_l = c_l x_l \frac{x_{lk}}{x_{lk}}$

$$= \sum_{i \neq l} c_i x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} \sum_{i \neq l} c_i x_{ik} + c_k \frac{x_l}{x_{lk}} + \boxed{c_l x_l - c_l x_l \frac{x_{lk}}{x_{lk}}} =$$

$$= \underbrace{\sum_{i \neq l} c_i x_i + c_l x_l}_{L(\vec{X})} - \frac{x_l}{x_{lk}} \Big(\underbrace{\sum_{i \neq l} c_i x_{ik} + c_l x_{lk}}_{z_k} - c_k \Big) =$$

$$= L(\vec{X}) - \frac{x_l}{x_{lk}} (z_k - c_k) = L(\vec{X}) - \theta_0 (z_k - c_k),$$

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik}.$$

3

Направленность перебора

Поскольку $\theta_0 > 0$, то возможность улучшения целевой функции целиком зависит от знака величины $(z_k - c_k)$. Для того, чтобы в наибольшей степени уменьшить целевую функцию, следует в базис ввести такой вектор $\vec{P}_k$, для которого выражение $(z_k - c_k)$ не только положительно, но и максимально:

$$\boxed{(z_k - c_k) = \max_j (z_j - c_j).}$$

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik}.$$

3

Направленность перебора

Величина z_j представляет собой значение целевой функции, если в нее подставить коэффициенты разложения вектора $\vec{P}_j$ по текущему базису. Интерпретация на примере задачи о диете. Пусть текущий базисный набор продуктов

$$B = \{\vec{P}_1(\text{Рыба}), \vec{P}_2(\text{Масло}), \vec{P}_3(\text{Сахар})\}$$

Любой продукт может быть замещен эквивалентным набором базисных продуктов.

$$\vec{P}_6(\text{Хлеб}) = x_{16}\vec{P}_1 + x_{26}\vec{P}_2 + x_{36}\vec{P}_3 = 0,58\vec{P}_1 + 0 \cdot \vec{P}_2 + 0,5\vec{P}_3,$$

то есть 1 кг хлеба эквивалентен смеси 0,58 кг рыбы и 0,5 кг сахара.

Эквивалентная стоимость хлеба в текущем базисе:

$$z_6 = c_1x_{16} + c_2x_{26} + c_3x_{36} = 60 \cdot 0,58 + 70 \cdot 0 + 20 \cdot 0,5 = 44,8\,\text{руб.}$$

в базисный набор следует включить такой продукт, у которого истинная стоимость меньше эквивалентной, и разница между ними максимальна.

$$C_6 = 20\ \text{руб.},\ \ (z_6 - c_6) = 44,8 - 20 > 0$$

Критерий оптимальности

Если для опорного плана $\vec{X}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*, 0, \ldots, 0)^T$ *справедливы неравенства* $z_j - c_j \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, *то этот план является оптимальным.*

Доказательство. Обозначим базисные векторы, соответствующие плану $\vec{X}^*$, через $\vec{P}_i$, индекс $i = 1, \ldots, m$ будет использоваться при суммировании по базису.

Пусть $\vec{X} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – произвольный план. Поскольку $\vec{X}^*$ и $\vec{X}$ – планы, то

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* \vec{P}_i = \vec{P}_0 \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{P}_j = \vec{P}_0. \qquad (2)$$

Критерий оптимальности

Если разложить каждый из векторов $\vec{P}_j$ по текущему базису

$$\vec{P}_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \vec{P}_i. \tag{3}$$

и подставить коэффициенты разложения в целевую функцию, получится набор эквивалентных стоимостей векторов $\vec{P}_j$ в текущем базисе

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

которые по условию теоремы не менее истинных стоимостей:

$$z_j \geqslant c_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

4

Критерий оптимальности

Для начала подставим (3) в (2) и изменим порядок суммирования:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j x_{ij} \right) \vec{P}_i = \vec{P}_0. \tag{6}$$

Сравним (6) и (1). Поскольку разложение по базису единственно,

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} x_j x_{ij}. \tag{7}$$

4

Критерий оптимальности

Далее, так как все $z_j \geqslant c_j$, то для целевой функции произвольного плана

$$L(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} z_j x_j .$$

Подставляя сюда z_j из (4), меняя порядок суммирования и учитывая (5), имеем:

$$L(\vec{X}) \geqslant \sum_{j=1}^{n} z_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \Big) x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j x_{ij} \Big) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^* = L(\vec{X}^*).$$

4

Критерий оптимальности

Возможен случай, когда при переходе к новому базису ни один старый вектор исключить не удастся, потому что при $z_k - c_k > 0$ все $x_{ik} \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$. Докажем, что тогда задача не имеет решения.

Действительно, как мы показали, в этом случае можно построить план, содержащий $m + 1$ положительную компоненту:

$$\vec{X}' = ((x_1 - \theta x_{1k}), \ldots, (x_l - \theta x_{lk}), \ldots, (x_m - \theta x_{mk}), \theta, 0, \ldots, 0)^T,$$

где θ — сколь угодно большое положительно число.

Значение целевой функции для этого плана равно

$$L(\vec{X}') = \sum_{i=1}^{m} c_i(x_i - \theta x_{ik}) + c_k\theta = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i - \theta \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik}}_{z_k} + c_k\theta =$$

$$= L(\vec{X}) - \theta(z_k - c_k).$$

4

Критерий оптимальности

Поскольку $(z_k - c_k) > 0$, то при $\theta \to \infty$ $L(\vec{X}') \to -\infty$, то есть задача не имеет решения по причине неограниченности целевой функции в сторону оптимизации (в канонической форме целевая функция минимизируется).

5

Схема симплексного метода

Подготовительный этап. Задача приводится к канонической форме Выбирается исходный базис $B_0 = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_m\}$, строится исходный опорный план $\vec{X}_0 = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$.

Отдельная итерация.

Шаг 1. Текущий опорный план проверяется на оптимальность. Для этого: а) все векторы $\vec{P}_j$ разлагаются по базису:

$$\vec{P}_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \vec{P}_i;$$

б) вычисляются их эквивалентные стоимости $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$; в) если $(z_j - c_j) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n$, то задача решена. Текущий опорный план является оптимальным. Если нет, то переход на шаг 2.

5

Схема симплексного метода

Шаг 2. Определяется вектор $\vec{P}_k$, подлежащий включению в базис. Для него

$$(z_k - c_k) = \max_j (z_j - c_j).$$

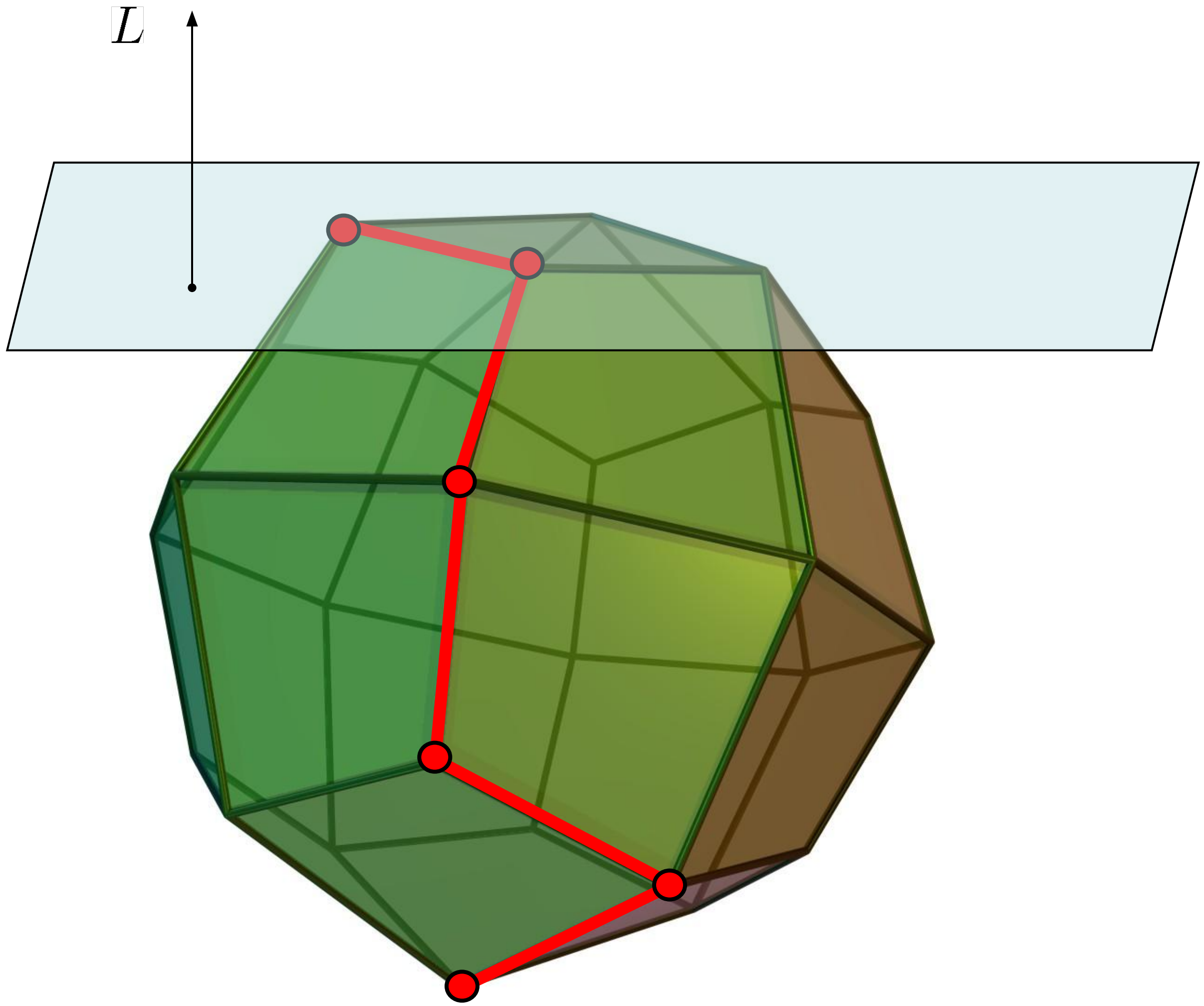
Шаг 3. Определяется вектор $\vec{P}_l$, подлежащий исключению из базиса. Для него

$$\frac{x_l}{x_{lk}} = \min_{x_{ik}>0} \frac{x_i}{x_{ik}}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Если все $x_{ik} \leqslant 0$, то задача не имеет решения по причине неограниченности целевой функции.

Шаг 4. Производится преобразование базиса и пересчет опорного плана по формулам преобразования Жордана с ведущим элементом x_{lk}. Возврат на Шаг 1.

Иллюстрация в трехмерном пространстве



4.4. Практический алгоритм симплексного метода

1

Симплексная таблица

i	Ба-	c_i	План	c_1	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
	зис		$\vec{X}$	$\vec{P}_1$	$\cdots$	$\vec{P}_j$	$\cdots$	$\vec{P}_k$	$\cdots$	$\vec{P}_n$
1	$\vec{P}_1$	c_1	x_1	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	$\vec{P}_i$	c_i	x_i	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{ik}	$\cdots$	x_{in}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
l	$\vec{P}_l$	c_l	x_l	x_{l1}	$\cdots$	x_{lj}	$\cdots$	$\boxed{x_{lk}}$	$\cdots$	x_{ln}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m	$\vec{P}_m$	c_m	x_m	x_{m1}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mk}	$\cdots$	x_{mn}
$m+$ $+1$			L	z_1- $-c_1$	$\cdots$	z_i- $-c_i$	$\cdots$	z_k- $-c_k$	$\cdots$	z_n- $-c_n$

2

Алгоритм

Подготовительный этап

На данном этапе производится первоначальное заполнение симплексной таблицы. Пока мы будем предполагать, что матрица ограничений задачи в канонической форме содержит единичную подматрицу. Такая ситуация возникает, в частности, когда система неравенств вида $\leqslant$ приводится к каноническим равенствам. Тогда исходный базис будет естественным единичным базисом $B_0 = I = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m\}$, и первоначальное заполнение основной части симплексной таблицы сведется к копированию в нее матрицы условий. После заполнения основной части производится вычисление элементов $m+1$ строки:

$$x_{m+1,0} = L = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i; \quad x_{m+1,j} = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j, \ j = 1, \ldots, n.$$

2

Алгоритм

Отдельная итерация

Шаг 1. Сканируется дополнительная $m+1$-я строка (кроме нулевого элемента). Если все $x_{m+1,j} = z_j - c_j \leqslant 0$, то текущий опорный план $\vec{X}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*, 0, \ldots, 0)^T$ является оптимальным. Если нет, то на следующий шаг.

Шаг 2. Определяется индекс ведущего столбца k. Ему соответствует максимальный положительный элемент управляющей строки, не считая нулевого ее элемента: $z_k - c_k = \max_j (z_j - c_j)$.

Шаг 3. Сканируется ведущий столбец, не считая $m+1$-го элемента. Определяется индекс ведущей строки l. Ей соответствует

$$\frac{x_l}{x_{lk}} = \min_{x_{ik}>0} \frac{x_i}{x_{ik}}.$$

Если же все $x_{ik} \leqslant 0$, то задача не имеет решения по причине неограниченности целевой функции.

Алгоритм

Шаг 4. Таблица пересчитывается калькулятором Жордана относительно ведущего элемента x_{lk}.

ЗАМЕЧАНИЕ

Новые значения L' и $(z'_j - c_j)$ в $m+1$-й управляющей строке можно не вычислять заново, а пересчитывать по тем же формулам преобразования Жордана. Докажем это для L'.

$$L' = L - \theta_0(z_k - c_k) = L - \frac{x_l}{x_{lk}}(z_k - c_k).$$

Если вспомнить правило прямоугольника, то можно увидеть, что $L' = x_{m+1,0}$ действительно пересчитывается по этому правилу.

3

Пример

Задача о производственном плане

$$
\begin{array}{rrrrrl}
L(x_1,x_2,x_3,x_4) = & -8x_1 & -6x_2 & +0x_3 & +0x_4 & \to \min \\
 & 10x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = 50 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & = 54, \\
 & & x_1,\dots,x_4 \geqslant 0. & & &
\end{array}
$$

Подготовительный этап

i	Базис	c_i	План $\vec{X}$	-8 $\vec{P}_1$	-6 $\vec{P}_2$	0 $\vec{P}_3$	0 $\vec{P}_4$
1	$\vec{P}_3$	0	50	$\boxed{10}$	5	1	0
2	$\vec{P}_4$	0	54	6	9	0	1
3			0	8	6	0	0

$$\theta_0 = \min\left(\frac{50}{\underline{10}}, \frac{54}{6}\right) = 5.$$

3

Пример

Итерация 1

	$\vec{X}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$
$\vec{P}_1$	5	1	$0,5$	$0,1$	0
$\vec{P}_4$	24	0	$\boxed{6}$	$-0,6$	1
	-40	0	2	$-0,8$	0

$$\theta_0 = \min\left(\frac{5}{0,5}, \underline{\frac{24}{6}}\right) = 4.$$

	$\vec{X}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$
$\vec{P}_1$	3	1	0	$0,15$	$-0,083$
$\vec{P}_2$	4	0	1	$-0,1$	$0,167$
	-48	0	0	$-0,6$	$-0,333$

$$\vec{X}^* = (3,4,0,0)^T,\ L^* = -48$$

4.5. Метод искусственного базиса

1

Идея

Исходная задача

$$
\begin{array}{lllll}
L = & c_1x_1 + & \dots & +c_nx_n & \to \min \\
, & a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1, \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m, \\
 & x_1 \geqslant 0, & \dots, & x_n \geqslant 0. &
\end{array}
$$

Расширенная задача

$$
\begin{array}{llllllll}
\tilde{L} = & c_1x_1 + & \dots & +c_nx_n & +\$x_{n+1} + & \dots & +\$x_{n+m} & \to \min \\
, & a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & = b_1, \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & & & +x_{n+m} & = b_m, \\
 & x_j \geqslant 0, & \multicolumn{6}{l}{j = 1, \dots, m+n.}
\end{array}
$$

2

Пример

$$
\begin{array}{rrrrl}
L(\vec{X}) = & -x_1 & -4x_2 & -x_3 & \to \min, \\
& x_1 & -x_2 & +x_3 & = 3, \\
& 2x_1 & -5x_2 & -x_3 & = 0, \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$$

<u>Расширенная задача</u>

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
L(\vec{X}) = & -x_1 & -4x_2 & -x_3 & +\$x_4 & +\$x_5 & \to \min, \\
& x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 3, \\
& 2x_1 & -5x_2 & -x_3 & & +x_5 & = 0, \\
\end{array}
$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geqslant 0.$$

2

Пример

<u>Первый этап</u>

i	Ба-зис	c_i	План $\vec{X}$	-1 $\vec{P}_1$	-4 $\vec{P}_2$	-1 $\vec{P}_3$	\$ $\vec{P}_4$	\$ $\vec{P}_5$
1	$\vec{P}_4$	\$	3	1	-1	1	1	0
2	$\vec{P}_5$	\$	0	$\boxed{2}$	-5	-1	0	1
3	руб		0	1	4	1	0	0
4	\$		3	**3**	-6	0	0	0

$$\min\left(\frac{3}{1}, \frac{0}{\underline{2}}\right) = 0$$

	$\vec{X}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$
$\vec{P}_4$	3	0	$\boxed{1,5}$	$1,5$	1	$-0,5$
$\vec{P}_1$	0	1	$-2,5$	$-0,5$	0	$0,5$
руб	0	0	$6,5$	$1,5$	0	$-0,5$
\$	3	0	$\mathbf{1,5}$	$1,5$	0	$-1,5$

2

Пример

Первый этап

	$\vec{X}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$
$\vec{P}_2$	2	0	1	1	$0,67$	$-0,33$
$\vec{P}_1$	5	1	0	2	$1,67$	$-0,33$
руб	-13	0	0	-5	$-4,33$	$1,67$
\$	$\mathbf{0}$	0	0	0	-1	-1

Второй этап

	$\vec{X}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$
$\vec{P}_2$	2	0	1	1
$\vec{P}_1$	5	1	0	2
руб	-13	0	0	-5