

Лекция 2.

Динамика материальной точки. Движение системы материальных точек. Движение тел переменной массы.

Динамика материальной точки

Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обуславливают тот или иной характер движения. Взаимодействие тел характеризуется физической величиной, которая называется *силой*.

Сила является количественной мерой действия тел друг на друга, в результате которых они изменяют состояние своего движения.

Изменение состояния движения какого-либо тела всегда вызывается действием на него сил, исходящих от определённых других тел.

Сила, как количественная мера взаимодействия тел характеризуется не только своей *величиной*, но и *направлением*, а также *точной приложением*, т.к. является векторной величиной.

В современной физике до недавних пор различали четыре вида взаимодействий:

1. гравитационное (взаимодействие обусловлено всемирным тяготением);
2. сильное (обеспечивает связь частиц в атомном ядре);
3. слабое (ответственное за многие процессы распада элементарных частиц);
4. электромагнитное (осуществляется через электрические и магнитные поля).

В механике принято рассматривать три вида сил:

1. *гравитационные*;
2. *упругие силы* действуют как между соприкасающимися телами, так и между соседними слоями одного и того же тела (по своей природе являются электромагнитными);
3. *силы трения*, действующие на соприкасающиеся поверхностные слои тел и зависящие как от состояния поверхностей соприкосновения, так и от относительной скорости тел.

Статическое и динамическое проявление сил

Силы могут проявляться *динамически* и *статически*.

Динамическое проявление сил состоит в том, что под их действием тела приобретают ускорения, причём, чем больше величина действующей силы, тем больше будет и ускорение тела, на которое эта сила действует.

Статически силы проявляются в том, что находящиеся под их воздействием тела, хотя и не приобретают ускорений, но так или иначе (в зависимости от величины действующих сил) деформируются и в результате этого воздействуют на другие тела, удерживающие их от движения.

Сила, действующая на тело, проявляется статически только тогда, когда кроме неё на это тело будет действовать, по крайней мере, ещё одна сила со стороны другого тела, препятствующего динамическому действию данной силы.

Первый закон Ньютона

Первый закон механики (1-й закон Ньютона) указывает на причины, вызывающие изменение состояния движения тел, утверждая, что таковыми причинами являются *силы*, действующие на движущиеся тела со стороны других тел.

Первый закон Ньютона: точечное тело пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку действие внешних сил не вынудит его изменить это состояние.

Таким образом, только силы, действующие на данное точечное тело со стороны других тел, могут изменить состояние его движения. Если же на это тело никакие силы не действуют (или, если действующие силы взаимно компенсируют друг друга), то оно будет находиться в одном из неизменных состояний: покоя (когда скорость тела равна нулю) или равномерного прямолинейного движения (когда скорость тела постоянна, а его ускорение равно нулю).

Свойство тел сохранять скорость неизменной (в частности, равной нулю) при отсутствии действующих на них сил называют *инерцией* (инертностью). Поэтому равномерное прямолинейное движение тел часто называют движением по инерции, а первый закон механики — *законом инерции*. Например, движение автобуса с выключенным двигателем **не является** движением по инерции, т.к. это движение замедленное. Движение с работающим двигателем, но *равномерное и прямолинейное, будет движением по инерции*.

Закон инерции имеет глубокий физический смысл. Из него вытекают представления об окружающем нас пространстве. Так как закон инерции выполняется вне зависимости от направления, то свойства пространства должны быть одинаковы по всем направлениям — *свойство изотропности*.

Далее из закона инерции вытекает, что пространство должно быть *однородным*, т.е. в нём нет «особых точек». В самом деле, при движении тела его скорость не изменяется от того, что оно переходит из одной точки пространства в другую. Следовательно, у этих точек нет особых свойств, все точки пространства равноправны.

Справедливость первого закона Ньютона подтверждается тем, что все следствия из него соответствуют опытным фактам.

Второй закон Ньютона

Установленный Ньютоном второй закон механики указывает, каким будет характер движения точечного тела при действии на него заданных сил. Опыт показывает, что чем больше величина силы, действующей на тело, тем больше будет и его ускорение. Если движущие силы измерять статически (например, по величине деформации проградуированной пружины), то оказывается, что приобретаемые телами ускорения всегда направлены параллельно действующим на них силам и пропорциональны их величине.

Так, если, на тело вначале подействовала сила \vec{F}_1 и сообщила ему ускорение \vec{a}_1 , а затем на это же тело начала действовать другая сила \vec{F}_2 , сообщающая ему ускорение \vec{a}_2 , то оказывается, что

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Далее, из опыта следует, что одна и та же сила различным телам сообщает различные ускорения. Это значит, что ускорения, приобретаемые телами, зависят не только от действующих на них внешних сил, но и от свойств самих ускоряемых тел, т.е. от их *инертности*. Инертность тел отражает их свойство не обладать ускорением при отсутствии действующих на них сил со стороны других тел. Инертность также характеризует способность тел приобретать ускорения под действием сил. Чем больше инертность тела, тем меньше ускорение, которое оно приобретает под действием данной силы.

Количественной мерой инертности является физическая величина, называемая массой. Чем более инертно тело, тем больше его масса. Поскольку инертностью и, следовательно, массой обладает любая частица вещества, то чем больше определённых одинаковых частиц содержится в теле, тем большей будет и его масса.

Второй закон Ньютона: ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе, параллельной ей направленной и обратно пропорционально массе материальной точки.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ или } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}. \text{ Сила — причина, ускорение — следствие.}$$

В написанном виде закон выполняется только для движений с $v \ll c$.

Введём новую величину, равную произведению массы тела на его скорость. Эта векторная величина, имеющая направление вектора скорости, называется импульсом тела $\vec{P} = m\vec{v}$.

По второму закону Ньютона $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$. Освободившись от дробей и, подведя массу под знак дифференциала ($m = \text{const}$), получим $d(m\vec{v}) = \vec{F} dt$.

Величина, равная произведению силы на элементарное время её действия, называется *импульсом силы*.

Сформулируем второй закон Ньютона через элементарный импульс силы.

Изменение импульса материальной точки равно элементарному импульсу действующей на неё силы и происходит по направлению силы



$$d\vec{P} = \vec{F} dt .$$



Из второго закона Ньютона в импульсной форме видно, что для изменения скорости тела необходимо действие силы в течение определённого промежутка времени. Поэтому нельзя мгновенно остановить (заставить двигаться) тело.

Если мы хотим подсчитать изменение импульса материальной точки под действием переменной силы за конечный интервал времени, то мы должны вычислить интегралы от левой и правой части равенств

$$\int_{v_1}^{v_2} d(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad \text{или} \quad \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt .$$

Закон независимости действия сил

Если на материальную точку m одновременно действует n сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$), то, согласно второму закону Ньютона, каждая i -ая сила сообщает этому телу ускорение $\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$. Результирующая сила, действующая на данное

тело, равна векторной сумме всех приложенных к нему сил $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ или, так

каждая из слагаемых сил равна $\vec{F}_i = m\vec{a}_i$, то

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m\vec{a}_i = m \sum_{i=1}^n \vec{a}_i .$$

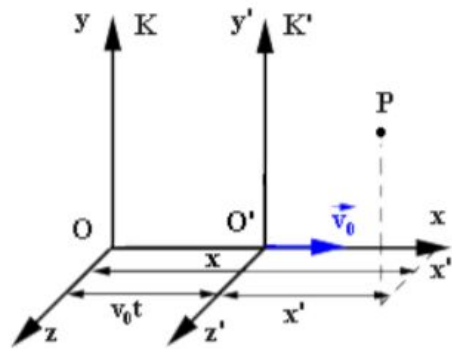
Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта.

Преобразования Галилея

Система отсчёта, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется *инерциальной*. Система отсчёта, в которой первый закон Ньютона не выполняется, называется *неинерциальной*.

Рассмотрим две системы отсчёта, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью \vec{v}_0 (рис. 21).

Систему К условно будем считать неподвижной, тогда как К' движется



равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}_0 = const$. Выберем оси так, чтобы оси x и x' совпадали, а оси $y \parallel y'$ и $z \parallel z'$. Найдём связь между координатами x, y, z некоторой точки Р в системе К и координатами x', y', z' той же точки в системе К'.

Рис. 21. К выводу преобразований Галилея

Если начать отсчёт времени с того момента, когда начала координат обеих систем отсчёта совпадали, то $x = x' + v_0 t'$. Очевидно, что $y = y', z = z'$.

Добавив к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах течёт одинаковым образом, т.е. $t =$

t' , получим совокупность четырёх уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + v_0 t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \right\}, \text{ называемых}$$

преобразованиями Галилея.

Абсолютной скоростью \vec{v} называется скорость движения относительно условно неподвижной системы отсчёта.

Относительной скоростью \vec{v}' называется скорость относительно движущейся системы отсчёта.

Переносной скоростью \vec{v}_0 называется скорость движения подвижной системы отсчёта относительно неподвижной.

Следовательно, *абсолютная скорость тела равна векторной сумме относительной и переносной скоростей тела.*

Это утверждение носит название *теоремы о сложении скоростей.*

Если продифференцировать по времени равенство $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$, то мы получим

$$\vec{a} = \vec{a}' .$$

Все инерциальные системы отсчёта эквивалентны и никакими механическими опытами, проведёнными в пределах данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли она в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения.

В этом состоит суть принципа относительности Галилея.

Третий закон Ньютона

Силы, с которыми какие-либо тела действуют друг на друга, всегда равны по величине и противоположны по направлению.

Силы $\vec{F} = -\vec{N}$, но они не уравнивают друг друга, так как приложены к различным телам. Третий закон Ньютона говорит о том, что силы всегда возникают попарно, что нет одностороннего действия, что силы носят характер взаимодействия. В этом заключается качественная сторона закона.

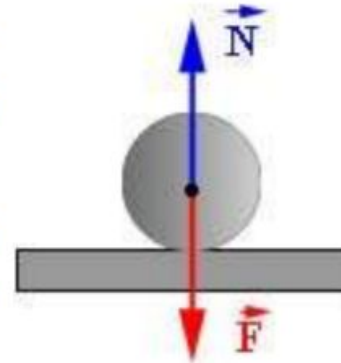


Рис. 22. К третьему закону Ньютона

По третьему закону динамики действие не существует без противодействия, поэтому ни одна машина не может привести сама себя в движение, т.к. всякая машина представляет собой систему пар взаимодействующих тел. Чтобы машина начала перемещаться, необходимо взаимодействие её по крайней мере с одним внешним по отношению к ней телом.

При взаимодействии двух тел сумма их импульсов является постоянной величиной.

Третий закон Ньютона можно сформулировать как требование сохранения суммы импульсов взаимодействующих тел, если нет других внешних сил.

Движение системы материальных

точек

Под *механической системой* понимается группа тел, взаимодействующих между собой так, что движение каждого из них зависит от движения остальных тел.

Силы, действующие на тела системы, можно разделить на *внешние* и *внутренние*. *Внутренними* называются силы, с которыми тела данной системы действуют друг на друга.

Разделение сил на внешние и внутренние условно и зависит от того, какую группу тел мы рассматриваем в качестве системы. Так, например, силы взаимодействия между вагонами поезда являются внешними, если рассматривать каждый вагон как механическую систему, но эти же силы станут внутренними, если весь состав рассматривать как механическую систему.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(m_1 \vec{v}_1)}{dt} &= \vec{f}_1 + \vec{F}_1 \\ \frac{d(m_2 \vec{v}_2)}{dt} &= \vec{f}_2 + \vec{F}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d(m_n \vec{v}_n)}{dt} &= \vec{f}_n + \vec{F}_n \end{aligned} \right\}$$

Напишем уравнения, выражающие второй закон Ньютона, для каждого из n тел механической системы, равнодействующую приложенных к данному телу *внутренних* сил системы обозначим вектором \vec{f} , равнодействующую приложенных к нему *внешних* сил — вектором \vec{F} .

Складывая все эти уравнения, мы получим слева производную по времени от суммы импульсов всех точек системы, а справа — сумму всех сил, действующих в системе.

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Производная по времени от полного импульса системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему. Внешние (и только внешние) силы изменяют импульс системы.

Система, на которую не действуют внешние силы, называется *изолированной системой*. Система, для которой равнодействующая внешних сил равна нулю, называется *замкнутой системой*.

Для замкнутой системы $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$.



Следовательно, $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = 0$ или $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = const$ т.е.



полный импульс замкнутой системы есть величина постоянная.

Центр масс

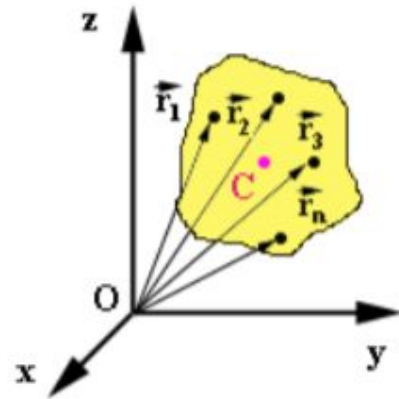
В нерелятивистской механике, ввиду независимости массы от скорости, импульс системы $\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n$ может быть выражен через скорость её *центра масс*.

Пусть система состоит из n точек, радиус-векторы которых $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ (рис. 24).

Центром масс называется такая воображаемая точка, радиус-вектор которой \vec{R} выражается через радиус-векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ материальных точек по формуле

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m}.$$

Эту точку мы будем обозначать буквой С.



Продифференцируем это равенство по времени и избавимся от дробей

$$m \vec{v}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \vec{P}.$$

По второму закону Ньютона в импульсной форме

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{вн}}^{\text{сум}}, \quad \text{тогда} \quad m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{вн}}^{\text{сум}}.$$

Рис. 24. Центр масс системы

Следовательно, *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила — геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.*

Центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно.

Движение тел переменной массы

Общие законы динамики тел с переменной массой были открыты и исследованы И.В.Мещерским и К.Э.Циолковским.

Импульс системы в момент $t + dt$ (после отделения частицы) складывается из импульса массы $[M - (-dM)]$, получившей скорость $(\vec{v} + d\vec{v})$, и импульса массы частицы $-dM$, летящей со скоростью \vec{u} , т.е.

$$\vec{P}_2 = [M - (-dM)](\vec{v} + d\vec{v}) + (-dM)\vec{u}.$$

Изменение импульса системы $d\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ за время dt равно

$$d\vec{P} = [M + dM](\vec{v} + d\vec{v}) - dM\vec{u} - M\vec{v} = \vec{v}dM - \vec{u}dM + Md\vec{v} + dMd\vec{v}.$$

Последнее слагаемое $dMd\vec{v}$ можно отбросить как член второго порядка малости.

Величина $d\vec{P}$ должна (по второму закону Ньютона) быть приравнена элементарному импульсу равнодействующих внешних сил

$$Md\vec{v} - \vec{u}dM + \vec{v}dM = \vec{F}dt.$$

Отсюда, перегруппировав члены и разделив на dt , получим основное уравнение движения точки переменной массы

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt} \text{ — уравнение Мещерского.}$$

Для любого момента времени произведение массы тела на его ускорение равно векторной сумме равнодействующей приложенных к телу внешних сил и реактивной силы.

Формула Циолковского

Рассмотрим движение ракеты в пространстве без учёта гравитации и сопротивления окружающей среды.

Уравнение Мещерского в этом случае будет выглядеть так:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{i\dot{o}} \frac{dM}{dt} \text{ или}$$

$$\text{в скалярном виде } M \frac{dv}{dt} = -v_{i\dot{o}} \frac{dM}{dt} \text{ (учтено, что } dM < 0).$$

Величина $v_{i\dot{o}}$ зависит от особенностей топлива и скорости его горения. Режим работы двигателя можно подобрать таким образом, чтобы $v_{i\dot{o}} = \text{const}$.

$$\text{Тогда } dv = -v_{i\dot{o}} \frac{dM}{M} \text{ и } \int_{v_0}^v dv = -v_{i\dot{o}} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}.$$

$$\text{Отсюда } v - v_0 = -v_{i\dot{o}} \ln \frac{M}{M_0} \text{ или}$$

$$v = v_{i\dot{o}} \ln \frac{M_0}{M} + v_0 \text{ — формула Циолковского.}$$

Пусть m_m — масса топлива,

m_δ — масса двигателя и корпуса ракеты,

m_n — полезная масса,

тогда $M_0 = m_m + m_\delta + m_n$.

После сгорания всего топлива ракета получит максимальную скорость, которую можно рассчитать по формуле Циолковского