ЭЛЕМЕНТЫ
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

- *элементы комбинаторики;*
- *вероятность случайного события, схема случаев;*
- *основные теоремы теории вероятностей;*
- *формулы Бернулли, Лапласа, Пуассона;*
- *числовые характеристики дискретной случайной величины;*
- *числовые характеристики непрерывной случайной величины;*
- *некоторые законы распределения случайных величин;*
- *предельные теоремы;*
- *статистический анализ выборки;*
- *точечные и интервальные оценки параметров распределения;*
- *проверка статистических гипотез;*
- *критерий согласия Пирсона;*
- *элементы теории корреляции.*

Схема изложения материала каждого занятия следующая:

1. *Справочный теоретический материал, необходимый для успешного усвоения темы;*
2. *Разбор типовых задач (с подробным их решением и анализом);*
3. *Перечень задач для самостоятельного решения;*
4. *Ответы.*

Для контроля полученных знаний предложены две контрольные работы и перечень контрольных вопросов по теории.

В каждом параграфе нумерация формул, таблиц, рисунков и примеров с решениями самостоятельная. Нумерация задач для самостоятельного решения и ответов к ним начинается с указания номера параграфа.

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. *Размещениями* из n различных элементов по m в каждом называются комбинации, составленные из n элементов по m различных элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m (читается: "A из n по m") и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Определение 2. *Перестановками* из n различных элементов ываются комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов и ичающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначается волом P_n (читается: "P из n") и вычисляется по формуле:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!\ .$$

Замечание 1. Перестановки из n элементов являются част- случаем размещений из n элементов по n в каждом, то есть аведлива формула:

$$P_n = A_n^n\ .$$

Определение 3. <u>*Сочетаниями*</u> из n элементов по m в каж-
[й] называются комбинации, составленные из n элементов по m раз-
[н]ых элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. При
[это]м порядок расположения элементов не играет роли.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m (читается: "C из n по m") и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m},$$

то есть

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

З а м е ч а н и е 2. Справедливы следующие ***свойства числа сочетаний***:

$$C_n^0 = 1,$$

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (m = \overline{0; n}),$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \quad \left(m = \overline{1; n}\right),$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

О п р е д е л е н и е 4. *Размещениями с повторениями* из n элементов по m элементов в каждом называются комбинации, составленные из n элементов по m элементов, возможно повторяющиеся, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число всех возможных размещений с повторениями из n элементов по m элементов обозначается символом $\overline{A_n^m}$ (читается: "A из n по m с чертой") и вычисляется по формуле:

$$\overline{A_n^m} = n^m .$$

З а м е ч а н и е 3. При решении задач *полезно знание следующих правил:*

Правило суммы. Если объект A может быть выбран из некоторой совокупности объектов m способами, а другой объект B — k способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+k$ способами.

Правило умножения. Если объект A может быть выбран из некоторой совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать k способами, то пара объектов A и B в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot k$ способами.

Задача 1. Студенты изучают 6 различных дисциплин. Если ежедневно в расписание включается по три дисциплины, то сколькими различными способами могут быть распределены уроки в день ?

Решение. Различные комбинации трех дисциплин, выбранных из шести, составляют расписание на один день. При этом они различаются либо составом дисциплин, либо их порядком. Поэтому искомое число определяется формулой числа размещений:

$$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Ответ: 120.

З а д а ч а 2. Сколько всего шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1; 3; 4; 5; 7 и 9, если в каждом из этих чисел ни одна цифра не повторяется ?

Р е ш е н и е. Чтобы число было четным, последняя его цифра (число единиц) должна быть четной. Из заданных цифр только одна четная – 4. Поэтому последней цифрой искомого числа может быть только 4. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Значит, задача сводится к нахождению числа перестановок из пяти элементов:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Следовательно, всего можно составить 120 чисел искомого вида.

О т в е т: 120.

З а д а ч а 3. Сколько всего шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1; 3; 4; 5; 7; 9, если цифры могут повторяться ?

Р е ш е н и е. Чтобы число было четным, его последняя цифра (то есть число единиц) должна быть четной. Из заданных цифр только одна удовлетворяет этому условию – 4. Поэтому последней цифрой искомого числа является 4.

Остальные пять цифр искомого числа могут быть любыми из предложенных в задаче, причем могут повторяться.

Значит, задача сводится к нахождению числа размещений с повторениями из шести элементов по пять в каждом;

$$\overline{A_6^5} = 6^5 = 8376.$$

Следовательно, можно составить 8376 чисел, удовлетворяющих всем требованиям задачи.

О т в е т: 8376 чисел.

З а д а ч а 4. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 10 книг по математике, имеющихся в библиотеке ?

Р е ш е н и е. Искомое число способов равно числу сочетаний из 10 книг по три, так как порядок выбора трех книг не имеет значения. Следовательно, находим:

$$C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Поэтому указанную в условии задачи выборку читатель может осуществить 120 способами.

О т в е т: 120.

Задача 5. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе могут повторяться ?

Решение. При составлении трехзначного четного числа из данных цифр в качестве первой цифры (числа сотен) можно взять любую цифру, кроме 0. Значит, есть 6 возможностей выбора первой цифры.

В качестве второй цифры (числа десятков) можно выбрать любую из предложенных в задаче цифр. Значит, есть 7 возможностей выбора второй цифры.

В качестве последней цифры (числа единиц) можно взять любую из цифр 0, 2, 4, 6. Значит, есть 4 возможности выбора третьей цифры.

Следовательно, согласно правилу умножения находим количество способов составления числа, удовлетворяющего условию задачи:

$$6 \cdot 7 \cdot 4 = 168.$$

Ответ: 168.

З а д а ч а 6. Сколько различных чисел можно составить из цифр 4 и 5, если количество цифр в числе не более пяти и не менее трех ?

Р е ш е н и е. По условию задачи количество цифр в числе не более пяти и не менее трех. Значит, их либо три, либо четыре, либо пять.

Если число, состоящее из четверок и пятерок, содержит три цифры, то таких чисел будет

$$\overline{A_2^3} = 2^3 = 8.$$

Если число, состоящее из четверок и пятерок, содержит четыре цифры, то таких чисел будет

$$\overline{A_2^4} = 2^4 = 16.$$

Если число, состоящее из четверок и пятерок, содержит пять цифр, то таких чисел будет

$$\overline{A_2^5} = 2^5 = 32.$$

Следовательно, согласно правилу суммы находим количество способов составления числа, удовлетворяющего условию задачи:

$$8 + 16 + 32 = 56.$$

Ответ: 56.

- Говорят, что события $A_1, \ldots, A_n$ образуют *полную группу равновозможных попарно несовместных событий*, если в данном испытании события $A_1, \ldots, A_n$ являются равновозможными и любые два из них – несовместные. Такие события будем называть *элементарными событиями* (или *случаями*, *исходами*).

- Элементарное событие A_1 называется *благоприятствующим* для появления события A, если наступление события A_1 влечет за собой появление события A.

- Событие, обозначаемое $\overline{A}$, называется *противоположным событием* по отношению к событию A, если появление одного из них в результате данного испытания исключает появление другого.

2. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Определения.

- *Суммой* (или *объединением*) событий A и B называется событие, обозначаемое $A+B$, которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий A или B.

- *Произведением* (или *совмещением*) событий A и B называется такое событие, обозначаемое $A \cdot B$, состоящее в одновременном наступлении и события A, и события B.

Замечание 1. Если события $A_1, \dots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, то справедливы равенства:

$$A_1 + \dots + A_n = E, \quad A_i \cdot A_j = \overline{E} \quad (i \neq j).$$

Замечание 2. Для событий A и $\overline{A}$ справедливы равенства:

$$A + \overline{A} = E, \quad A \cdot \overline{A} = \overline{E}.$$

Следовательно, события A и $\overline{A}$ всегда образуют полную группу несовместных событий.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Пусть для данного испытания события $A_1, \ldots, A_n$ образуют полную группу равновозможных попарно несовместных событий.

О п р е д е л е н и е. *Вероятностью случайного события A* в данном испытании называется число, обозначаемое $p(A)$ и вычисляемое по формуле:

$$p(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где n – число всех возможных элементарных событий рассматриваемого испытания, m – число тех элементарных событий из всех возможных, которые благоприятствуют появлению события A.

З а м е ч а н и е 3. Ситуация, когда полную группу составляют равновозможные события, называется *классической*. Поэтому определение вероятности (1), опирающееся на такое условие, называется *классическим определением вероятности*.

З а м е ч а н и е 4. Нетрудно видеть, что в формуле (1) числа m, n связаны неравенствами:

$$0 \le m \le n.$$

Поэтому вероятность любого события A удовлетворяет неравенству:

$$0 \le p(A) \le 1.$$

Причем, если $A = E$ – достоверное событие, то

$$m = n \quad \text{и} \quad p(A) = 1;$$

если $A = \overline{E}$ – невозможное событие, то

$$m = 0 \quad \text{и} \quad p(A) = 0.$$

З а д а ч а 1. Монета подбрасывается два раза.

а) Опишите полную группу возможных элементарных событий.

б) Если событие A – выпало не менее одного «герба», B – выпало не менее одной «решки», укажите, что собой представляют события:

$$\overline{A}, \quad \overline{B}, \quad A+B, \quad A\cdot B?$$

Р е ш е н и е. В данной задаче испытанием является подбрасывание монеты два раза подряд.

а) Обозначим события:

C_1 – выпал первым «герб», второй - «решка»,

C_2 – выпала первой «решка», вторым - «герб»,

C_3 – оба раза выпал «герб»,

C_4 – оба раза выпала «решка».

Тогда перечисленные события C_1, C_2, C_3, C_4 образуют полную группу, так как при двух подбрасываниях монеты обязательно произойдет одно из них. Значит, справедливо равенство:

$$C_1+C_2+C_3+C_4=E.$$

Кроме того, никакие два из указанных событий не могут произойти одновременно. Следовательно, имеет место равенство:

$$C_i \cdot C_j = \overline{E} \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Таким образом, , указанные события попарно несовместны. Причем наступление любого из событий C_1, C_2, C_3, C_4 не имеет преимущества перед остальными, а значит, эти события являются равновозможными.

Таким образом, события C_1, C_2, C_3, C_4 образуют полную группу равновозможных попарно несовместных событий. Следовательно, они являются в данном испытании полной группой элементарных событий.

б) Так как $\overline{A}$ – не выпал ни один раз «герб», то $\overline{A} = C_4$ – оба раза выпадает «решка».

Аналогично, $\overline{B}$ – не выпала ни одного раза «решка». Следовательно, $\overline{B} = C_3$ – оба раза выпал «герб».

Так как A означает, что выпадает не менее одного раза "герб", то $A = C_1 + C_2 + C_3$.

Аналогично заключаем: $B = C_1 + C_2 + C_4$.

Следовательно, по определению суммы и произведения событий получаем:

$$A + B = (C_1 + C_2 + C_3) + (C_1 + C_2 + C_4) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = E;$$
$$A \cdot B = (C_1 + C_2 + C_3) \cdot (C_1 + C_2 + C_4) = C_1 + C_2.$$

Ответ: а) C_1, C_2, C_3, C_4;

б) $\overline{A} = C_4$, $\overline{B} = C_3$, $A + B = E$, $A \cdot B = C_1 + C_2$.

З а д а ч а 2. В ящике имеется 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из ящика наугад выбирается один шар. Какова вероятность, что этот шар

а) белый, б) черный ?

Р е ш е н и е. В данной задаче полную группу элементарных событий составляют 10 событий, так как выбор любого одного шара можно осуществить 10 способами.

Из этих событий только 3 события благоприятствуют выбору белого шара и 7 – выбору черного шара.

Поэтому, если A – выбор белого шара, то

$$p(A)=\frac{3}{10}=0{,}3;$$

если B – выбор черного шара, то

$$p(B)=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

О т в е т: а) 0,3; б) 0,7.

Задача 3. Из пяти карточек с буквами $А$, $Б$, $В$, $Г$, $Д$ наугад выбираются одна за другой три карточки и располагаются в ряд (в порядке появления) слева направо. Какова вероятность, что получится слово «*ДВА*» ?

Решение. Выбор трех карточек из имеющихся пяти можно осуществить A_5^3 способами, так как порядок карточек имеет значение при этом условии. Вычисляем:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Значит, число всех возможных элементарных событий равно 60. Из этих событий только одно благоприятствует событию – получению слова «*ДВА*». Следовательно, $p = \frac{1}{60}$.

Ответ: $\frac{1}{60}$.

З а д а ч а 4. В ящике 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Из ящика наугад выбирается два шара. Какова вероятность того, что

а) оба шара белые; б) оба шара черные;

в) один шар белый, другой черный ?

Р е ш е н и е. Число выбора двух шаров из 10 имеющихся определяется всевозможными сочетаниями из 10 по 2:

$$C_{10}^{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

Значит, полную группу элементарных событий рассматриваемого испытания (выбор двух шаров) составляют 45 событий. Следовательно,

$$n = 45.$$

а) Если из элементарных событий рассматривать только те, которые состоят в выборе двух белых шаров, то находим:

$$m = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Следовательно, вероятность того, что оба шара будут белыми, вычисляется по формуле:

$$p_1 = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

б) Если рассматривать событие – выбор только двух черных шаров, то число благоприятствующих ему событий равно:

$$m = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Значит, вероятность выбора только двух черных шаров вычисляется по формуле:

$$p_2 = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

в) Если рассматривать событие – выбор одного белого и одного черного шаров, то для него число благоприятствующих событий равно:

$$m = C_4^1 \cdot C_6^1 = \frac{4}{1} \cdot \frac{6}{1} = 24.$$

Значит, вероятность выбора одного белого и одного черного шаров вычисляется по формуле:

$$p_3 = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{3}$, б) $\frac{2}{15}$, в) $\frac{8}{15}$.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 1 (*вероятность суммы несовместных событий*). Вероятность наступления одного из двух несовместных событий (безразлично какого) равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие 1. Вероятность наступления одного из нескольких попарно несовместных событий (безразлично какого) равна сумме вероятностей этих событий;

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

С л е д с т в и е 2. Вероятность события A равна единице минус вероятность его противоположного события $\overline{A}$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Т е о р е м а 2 (*вероятность суммы совместных событий*). Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

2. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Определение. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ называется вероятность события B при условии, что событие A уже наступило.

3. УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 3 (*вероятность произведения двух независимых событий*). Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема 4 (*вероятность произведения двух зависимых событий*). Вероятность совместного наступления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Следствие 3. Вероятность совместного наступления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n).$$

4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Теорема 5 (*формула полной вероятности*). Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии наступления одного из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Замечание 1. Появление события A изменит вероятности $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ элементарных событий. Причем вероятность осуществления события H_k $(1 \le k \le n)$ после наступления события A

определяется *формулой Бейеса*:

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}.$$

5. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Теорема 6 (*формула Бернулли*). Пусть в серии из n одинаковых независимых испытаний в каждом испытании может наступить либо событие A с вероятностью p, либо событие $\overline{A}$ с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в этой серии испытаний событие A наступит ровно m раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad \text{где} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

6. ФОРМУЛЫ ЛАПЛАСА

Эти формулы дают приближенное значение вероятности наступления события A определенное число раз в серии из n независимых испытаний, если число n достаточно велико.

Пусть p $(0 < p < 1)$ – вероятность события A в каждом испытании; $q = 1 - p$ – вероятность наступления события $\overline{A}$.

Теорема 7 (*локальная формула Лапласа*). Вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз в серии из n одинаковых независимых испытаний приближенно вычисляется по формуле Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

З а м е ч а н и е 2. В приложении приведена таблица 1 значений функции $\varphi(x)$ при положительных x. Для отрицательных x пользуются свойством четности функции: $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

З а м е ч а н и е 3. Формула Лапласа тем точнее приближает формулу Бернулли, чем больше число n (более нескольких десятков) и $n\cdot p>10$.

Т е о р е м а 8 (*интегральная формула Лапласа*). Вероятность $P_n(m_1,m_2)$ того, что событие A наступит от m_1 до m_2 раз в серии из n одинаковых независимых испытаний приближенно вычисляется по формуле Лапласа:

$$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \text{и} \quad x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\ \ x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Замечание 4. В приложении приведена таблица 2 значений функции $\Phi(x)$ при $0 < x \le 5$. При $x < 0$ пользуются той же таблицей с учетом свойства нечетности функции: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для $x > 5$ можно считать $\Phi(x) = 0{,}5$.

7. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Теорема 9 (*формула Пуассона*). Пусть p – вероятность события A в каждом испытании. Тогда вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз в серии из n независимых испытаний приближенно вычисляется по формуле Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$.

Замечание 5. Формула Пуассона тем точнее, чем меньше p и больше число n (более нескольких сотен), причем $n \cdot p < 10$.

8. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Вероятность попадания в первую область $0{,}4$, во вторую – $0{,}3$. Найдите вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую область, либо во вторую.

Решение. Обозначим события: A – стрелок попал в первую область, B – стрелок попал во вторую область. Эти события несовместны, так как они не могут произойти одновременно (попадание пули в одну область мишени исключает ее попадание в другую область).

Поэтому верна теорема 1 сложения вероятностей, откуда находим:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

Ответ: 0,7.

Задача 2. Для Московской области среднее число дождливых дней в августе равно 15. Какова вероятность, что первые два дня августа не будут дождливыми?

Решение. Обозначим события:

A – «1 августа не будет дождя»,

B – «2 августа не будет дождя».

Необходимо рассмотреть событие $A \cdot B$ – «1 и 2 августа не будет дождя».

В данной задаче

$$P(A) = \frac{16}{31},$$

так как в августе 31 день, а недождливых дней из них $31 - 15 = 16$.

При вычислении вероятности $P(B)$ результат зависит от того, будет ли дождь 1-го августа.

Следовательно, необходимо найти условную вероятность $P_A(B)$ – ве-
роятность того, что 2-го августа не будет дождя в предположении, что
1 августа – недождливый день.

Тогда получаем:

$$P_A(B) = \frac{15}{30},$$

так как в августе 30 дней, начиная со 2 августа, из них недождливых дней осталось 15 (ведь один день пришелся по предположению на 1 августа).

Итак, получаем:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{16}{31} \cdot \frac{15}{30} = \frac{8}{31}.$$

Ответ: $\frac{8}{31}$.

З а д а ч а 3. В ящике 10 деталей, среди которых 6 стандартных. Найдите вероятность того, что среди трех наугад взятых деталей есть хотя бы одна стандартная.

Р е ш е н и е. События «среди взятых деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди взятых деталей нет ни одной стандартной» – противоположные, так как наступление первого события исключает наступление второго. Обозначим первое событие A, а второе – $\overline{A}$.

По следствию 2 теоремы 1 известно, что

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Найдем $P(\overline{A})$.

Общее число элементарных событий испытания – выбрать 3 детали из имеющихся 10 – можно найти с помощью формулы сочетаний:

$$C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Число нестандартных деталей равно $10 - 6 = 4$.

Число благоприятствующих событию $\overline{A}$ исходов можно найти тоже с помощью формулы сочетаний:

$$C_4^3 = C_4^{4-3} = C_4^1 = 4.$$

Тогда получаем:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{120} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}.$$

Ответ: $\frac{29}{30}$.

З а д а ч а 4. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру (валет, дама, король, туз) любой масти или карту трефовой масти ?

Р е ш е н и е. Обозначим события:

A – извлечение из колоды карты-фигуры;

B – извлечение из колоды карты трефовой масти.

Необходимо найти вероятность суммы этих событий.

События A и B совместны, так как они могут наступить одновременно, если извлекается карта–фигура трефовой масти. Поэтому для подсчета вероятности суммы этих событий используем теорему 2:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

В рассматриваемой задаче

$$P(A)=\frac{16}{52}=\frac{4}{13},$$

так как всего элементарных исходов 52, что равно числу карт в колоде, из них 16 благоприятствуют событию A, что равно числу фигур в колоде.

Аналогично вычисляем:

$P(B)=\dfrac{13}{52}$ (благоприятствуют этому событию 13 исходов, что равно количеству карт трефовой масти);

$$P(A \cdot B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$ (благоприятствуют этому событию 4 исхода, что равно количеству карт-фигур трефовой масти).

Итак, находим:

$$P(A+B) = \frac{4}{13} + \frac{13}{52} - \frac{1}{13} = \frac{25}{52}.$$

Ответ: $\frac{25}{52}$.

Задача 5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а потом другая. Какова вероятность того, что полученное двузначное число является четным?

Решение. Обозначим события:

A – «двузначное число является четным»;

H_1 – «первая цифра четная»;

H_2 – «первая цифра нечетная».

Тогда вычисляем:

$$P(H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(H_2) = \frac{3}{5}.$$

Найдем условные вероятности $P_{H_1}(A)$ и $P_{H_2}(A)$.

$P_{H_1}(A)=\dfrac{1}{4}$ – вероятность выбора второй четной цифры в предположении, что первая цифра тоже четная. (Цифр для выбора осталось 4 и из них только один благоприятствующий исход.)

$P_{H_2}(A)=\dfrac{2}{4}$ – вероятность выбора второй четной цифры в предположении, что первая цифра нечетная. (Цифр для выбора осталось 4 и из них благоприятствующих исходов 2.)

Теперь по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)$$

находим:

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2+6}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $\frac{2}{5}$.

Задача 6. В ящике 20 белых и 10 черных шаров. Поочередно извлекают 4 шара, причем каждый извлеченный шар возвращают в ящик перед извлечением следующего. Какова вероятность того, что из четырех извлеченных шаров окажется два белых ?

Решение. Вероятность извлечения белого шара одна и та же во всех четырех испытаниях, так как каждый извлеченный шар возвращается в ящик:

$$p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Тогда вероятность извлечения черного шара во всех четырех испытаниях равна:

$$q = 1 - p = \frac{1}{3}.$$

Используя формулу Бернулли, находим вероятность того, что из четырех извлеченных шаров два шара будут белыми:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{27}.$$

Ответ: $\frac{8}{27}$.

Задача 7. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

Решение. По условию задачи

$$n = 100,\ \ m = 75,\ \ p = 0{,}8,\ \ q = 1 - p = 0{,}2.$$

Так как n – достаточно большое число, воспользуемся локальной фор

мулой Лапласа $P_n(m) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$:

$$P_{100}(75) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\varphi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{16}}\varphi\left(\frac{75 - 80}{\sqrt{16}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{1}{4}\varphi(1{,}25).$$

По таблице 1 из приложения находим:

$$\varphi(1{,}25) = 0{,}1826.$$

Следовательно, $P_{100}(75) = \dfrac{0{,}1826}{4} = 0{,}04565.$

З а д а ч а 8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле рав на 0,8. Найдите вероятность того, что при 100 выстрелах мишень буде поражена

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;

б) не менее 75 раз;

в) не более 74 раз.

Р е ш е н и е. Воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

а) По условию задачи

$$n=100,\ \ p=0{,}8,\ q=0{,}2,\ m_1=75,\ m_2=90.$$

Тогда, воспользовавшись таблицей 2 из приложения, получаем:

$$P_{100}(75;90)=\Phi\left(\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=\Phi\left(\frac{10}{4}\right)-\Phi\left(\frac{-5}{4}\right)=$$

$$=\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25)=0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882.$$

б) Требование того, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает следующее: число появлений события может быть равно

либо 75, либо 76, ..., либо 100.

Тогда следует принять

$$m_1=75;\ m_2=100.$$

Воспользовавшись таблицей 2 из приложения, получаем:

$$P_{100}(75;100) = \Phi\left(\frac{100-80}{4}\right) - \Phi\left(\frac{75-80}{4}\right) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) =$$

$$= \Phi(5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944.$$

в) Событие «мишень поражена не более 74 раз» и событие «мишень поражена не менее 75 раз» являются противоположными. Поэтому сумма их вероятностей равна 1.

Следовательно, искомая вероятность вычисляется по формуле:

$$P_{100}(0;\ 74) = 1 - P_{100}(75;\ 100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$$

Ответ: а) 0,8882;
б) 0,8944;
в) 0,1056.

Задача 9. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что один учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Решение. По условию задачи

$$n = 100\,000, \quad p = 0{,}0001.$$

События «из n книг ровно m книг сброшюрованы неправильно», где $m = 0, 1, 2, \ldots, 100000$, являются независимыми.

Так как число n велико, а вероятность p мала, вероятности $P_n(m)$ можно вычислить по формуле Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^m}{m!},$$

где $\lambda = np$.

В рассматриваемой задаче

$$\lambda = 100\,000 \cdot 0{,}0001 = 10.$$

Поэтому искомая вероятность $P_{100\,000}(5)$ определяется равенством:

$$P_{100\,000}(5) = \frac{e^{-10} \cdot 10^5}{5!} = 10^5 \cdot \frac{0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

О т в е т: 0,0375.

§ 4. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определения.

- *Случайной* называется величина, принимающая в результате испытания только одно значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Различают два типа случайных величин: *дискретные и непрерывные.*

- Случайная величина X называется *дискретной*, если в результате испытания она принимает одно из конечного или бесконечного множества значений $x_1, x_2, \ldots$
- Случайная величина называется *непрерывной*, если множество ее значений заполняет полностью некоторый промежуток (a, b).

2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. *Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины* (или короче: *законом распределения дискретной случайной величины*) называется зависимость между возможными значениями x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ дискретной случайной величины и их вероятностями p_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

- Закон распределения может быть задан в виде *таблицы* (табл. 1), в первой строке которой указывают все возможные значения x_k случайной величины X, расположенные в возрастающем порядке, а во второй строке таблицы – вероятности p_k этих значений.

Таблицу 1 называют также *рядом распределения* (или *вероятностным рядом*) дискретной случайной величины X.

Таблица 1

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

Контроль. Сумма чисел из второй строки равна 1, то есть справедливо равенство:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k + \cdots = 1.$$

• Закон распределения может быть задан *графически* в виде многоугольника распределения вероятностей (рис. 1), когда в прямоугольной системе координат строят ломаную, соединяющую последовательно точки с координатами $(x_k; p_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Полученную линию называют *многоугольником распределения.*

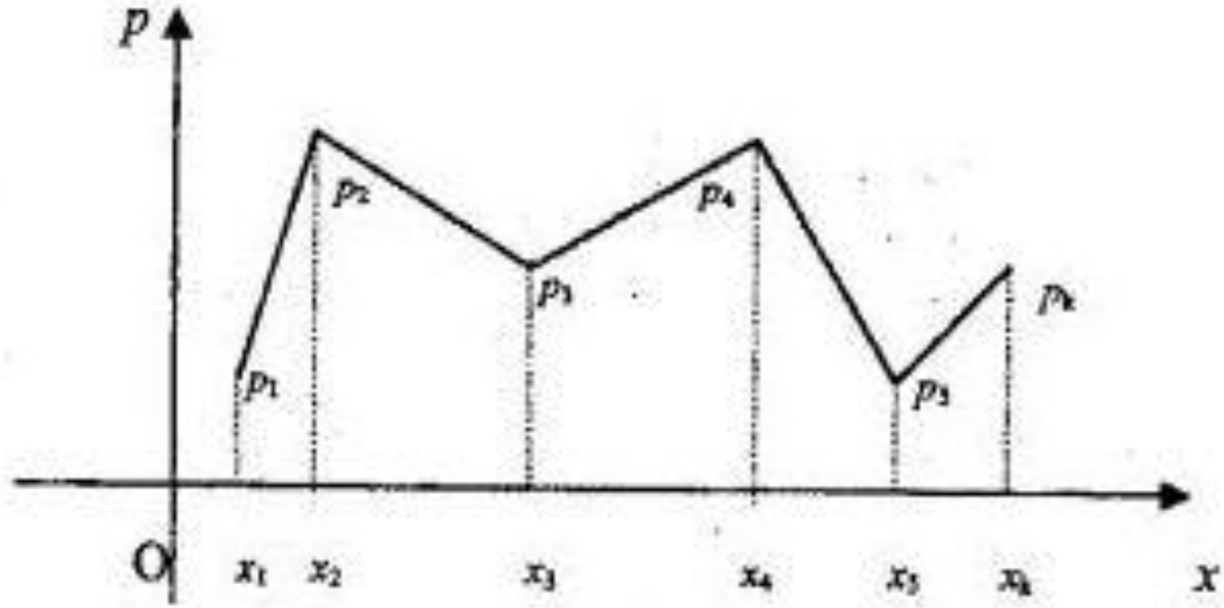

Рис. 1

- Закон распределения может быть задан <u>*аналитически*</u> в виде формулы:

$$p_k = P(X = x_k) = \varphi(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Определение 2. <u>*Биномиальным*</u> называется закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых появляется либо событие A, либо событие $\overline{A}$; и вероятность появления события A равна p, а вероятность появления события $\overline{A}$ равна $q = 1 - p$.

Тогда $P(X=k)$ – вероятность появления события A ровно k раз в n испытаниях – вычисляется по ***формуле Бернулли***:

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

Если число испытаний n очень велико, а вероятность p появления события A в каждом испытании очень мала, то для вычисления $P(X=k)$ используют ***формулу Пуассона***:

$$P(X=k)=P_n(k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!},$$

где $\lambda=np$.

При этом говорят, что случайная величина X распределена по ***закону Пуассона***.

3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение 3. *Функцией распределения* вероятностей дискретной случайной величины X, обозначаемой $F(x)$, называется функция, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения:

1. Определена при $x \in (-\infty; +\infty)$;
2. $0 \le F(x) \le 1$, причем $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$
3. $F(x)$ – неубывающая функция на $(-\infty; +\infty)$;
4. $F(x)$ – непрерывная функция слева в точках $x = x_k$ $(k = 1, 2, ...)$

   и непрерывная функция во всех остальных точках;

5. Для дискретной случайной величины X, заданной табл. 2, функция $F(x)$ определяется формулой:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le x_1 \\ p_1, & \text{если} \quad x_1 < x \le x_2 \\ p_1+p_2, & \text{если} \quad x_2 < x \le x_3, \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 1, & \text{если} \quad x > x_n. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 2.

Таблица 2

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

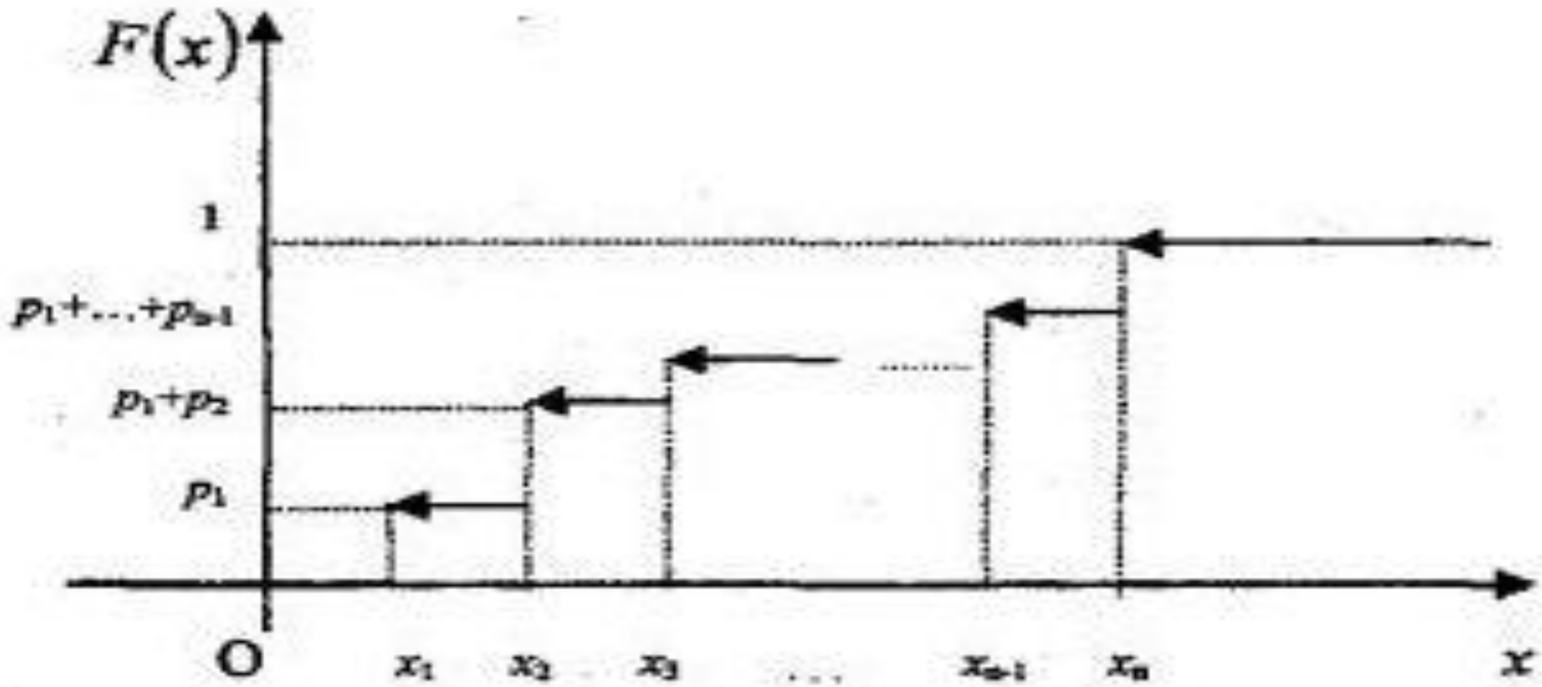

Рис. 2

4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

О п р е д е л е н и е 4. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины X, заданной табл. 1, называется число $M(X)$, вычисляемое по формуле:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

Если случайная величина задана табл. 2, то для нее

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

З а м е ч а н и е 1. При большом числе испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины X близко к ее математическому ожиданию $M(X)$. Точнее, оно стремится к $M(X)$ при неограниченном возрастании числа испытаний.

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$, где C – постоянная величина;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$, где C – постоянная величина;
3. $M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$;
4. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n)$, если $X_1, X_2, ... X_n$ – независимые случайные величины;
5. Математические ожидания случайных величин X и Y, заданных, соответственно, табл. 1 и 3, где a – некоторое постоянное число, связаны равенством: $M(Y) = M(X) - a$.

Таблица 3

Y	$x_1 - a$	$x_2 - a$	$\cdots$	$x_k - a$	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

6. Математические ожидания случайных величин X и Z, заданных, соответственно, табл. 1 и 4, где b – некоторое постоянное число, связаны равенством:

$$M(Z) = b \cdot M(X).$$

Таблица 4

Z	$x_1 \cdot b$	$x_2 \cdot b$	$\cdots$	$x_k \cdot b$	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

7. Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$M(X) = n \cdot p.$$

Определение 5. *Дисперсией* случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

О п р е д е л е н и е 6. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X называют квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

З а м е ч а н и е 2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются числовыми характеристиками, служащими мерами рассеяния возможных значений случайной величины X вокруг ее математического ожидания.

С в о й с т в а   д и с п е р с и и:

1. $D(C) = 0$, где C – постоянная величина;
   $D(X) > 0$, если X – случайная величина;

2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где C – постоянная величина;

3. $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$, если случайные величины $X_1, X_2, \ldots X_n$ взаимно независимы;

4. $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$;

5. Для дискретной случайной величины X, заданной табл. 1, справедливо равенство:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - (M(X))^2.$$

Для дискретной случайной величины X, заданной табл. 2, справедливо равенство:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - (M(X))^2;$$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k-(M(X))^2;$$

6. Дисперсии случайных величин X и Y, заданных, соответственно, табл. 1 и 3, связаны равенством:

$$D(Y)=D(X);$$

7. Дисперсии случайных величин X и Z, заданных, соответственно, табл. 1 и 4, связаны равенством:

$$D(Z)=b^2\cdot D(X);$$

8. Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятность появления и вероятность не появления события в одном испытании:

$$D(X)=np(1-p).$$

З а д а ч а 1. Производятся последовательные независимые испытания трех приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна $0{,}9$.

а) Найдите закон распределения случайной величины X – числа испытанных приборов.

б) Найдите функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

в) Вычислите $M(X)$ и $D(X)$.

Р е ш е н и е. а) Возможными значениями числа испытанных приборов будут: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Найдем их вероятности.

1) Событие $X=1$ означает, что испытан только один прибор, оказавшийся ненадежным. Поэтому $P(X=1)=0{,}1$.

2) Событие $X=2$ означает, что испытано два прибора, причем первый оказался надежным, а второй – ненадежным. Рассматривается совмещение (произведение) этих двух независимых событий. Поэтому

$$P(X=2)=0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09.$$

3) Событие $X=3$ означает совмещение трех событий: первый прибор надежный, второй – надежный, а третий –любой (их всего три). Поэтому

$$P(X=3)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 1=0{,}81.$$

Следовательно, закон распределения случайной величины X задается табл. 5.

Таблица 5

Следовательно, закон распределения случайной величины X задается табл. 5.

Таблица 5

X	1	2	3
p	0,1	0,09	0,81

Контролем правильности данного закона является проверка равенства единице суммы всех вероятностей:

$$0,1+0,09+0,81=1.$$

б) Найдем функцию $F(x)=P(X<x)$, используя тот факт, что вероятность попадания дискретной случайной величины в некоторый промежу-

ток определяется как сумма вероятностей тех значений, которые находятся в этом промежутке. Поэтому, учитывая табл. 5, находим:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ 0{,}1, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}19, & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

П о я с н е н и я

$P(X < x) = 0$ при $x \le 1$, так как в промежутке $(-\infty; x)$ нет ни одного значения данной случайной величины;

$P(X < x) = P(X = 1) = 0{,}1$ при $1 < x \le 2$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадает только одно значение: $x_1 = 1$;

$P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,09 = 0,19$ при $2 < x \le 3$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают два значения: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$;

$P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,1 + 0,09 + 0,81 =$ при $x > 3$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают все возможные значения: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$.

График фукции $F(x)$ изображен на рис. 3.

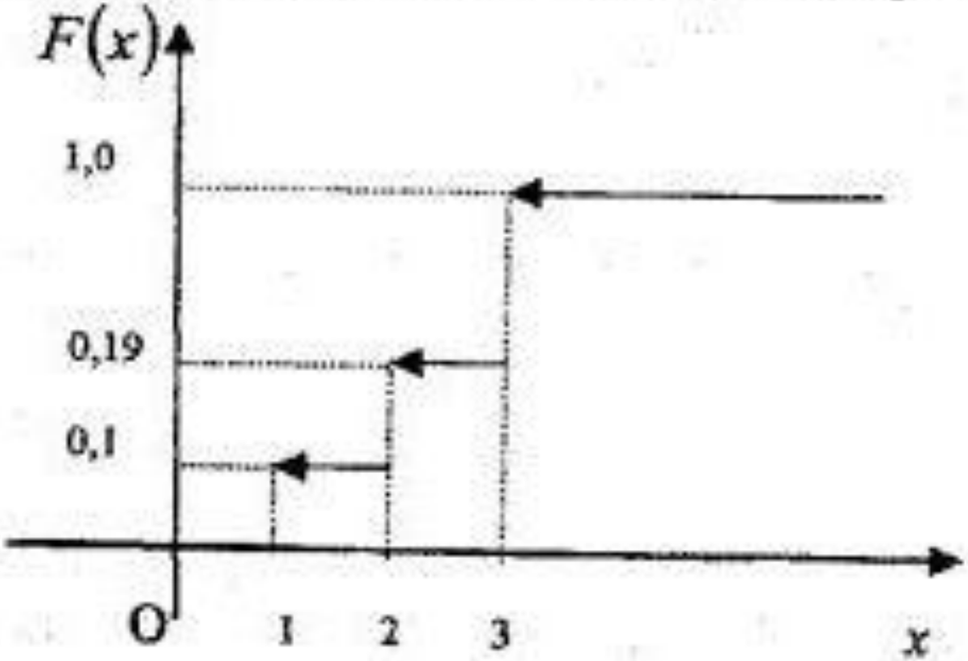

Рис. 3

в) Пользуясь табл. 5 и формулами

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k, \quad D(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k-(M(X))^2,$$

вычислим $M(X)$ и $D(X)$.

$$M(X)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}09+3\cdot 0{,}81=2{,}71;$$

$$D(X)=1^2\cdot 0{,}1+2^2\cdot 0{,}09+3^2\cdot 0{,}81-(2{,}71)^2=0{,}41.$$

Ответ: а) табл. 5; б) рис. 3; в) $M(X)=2{,}71$; $D(X)=0{,}41$.

Задача 2. В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали.

а) Найдите закон распределения случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.

б) Назовите закон распределения.

в) Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. а) Среди четырех отобранных деталей нестандартных может быть либо ни одной, либо одна, две, три или четыре.

Для подсчета вероятностей этих возможных значений величины X воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(X=m)=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

По условию $n=4$ и $p=\frac{1}{10}$, откуда $q=1-p=\frac{9}{10}$.

Тогда получаем:

$$P(X=0)=P_4(0)=C_4^0\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^0\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^4=0,6561;$$

$$P(X=1)=P_4(1)=C_4^1\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^3=0,2916;$$

$$P(X=2)=P_4(2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=0,0486;$$

$$P(X=3)=P_4(3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^1=0{,}0036;$$

$$P(X=4)=P_4(4)=C_4^4\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^0=0{,}0001.$$

К о н т р о л ь:

$$\sum_{i=1}^{4}p_i=0{,}6561+0{,}2916+0{,}0486+0{,}0036+0{,}0001=1.$$

Следовательно, закон распределения вероятностей величины X принимает вид (табл. 6):

Таблица 6

X	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

б) Так как вероятности рассчитывались по формуле Бернулли, то случайная величина X подчиняется *биномиальному закону* распределения.

в) Тогда $M(X) = np = 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4;$

$$D(X) = npq = 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0{,}36.$$

Ответ: а) табл. 6;

б) биномиальный закон;

в) $M(X) = 0{,}4;\ D(X) = 0{,}36.$

Задача 3. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Число поврежденных изделий – случайная величина. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено

а) ровно три изделия; б) менее трех;

в) не менее трех; г) хотя бы одно изделие.

Решение. Пусть X – число поврежденных изделий из 500 отправленных. Число $n = 500$ велико, а вероятность повреждения одного изделия

$p = 0{,}002$ очень мала. Поэтому вероятность $P_{500}(X = m)$ будем вычислять по формуле Пуассона. Значит, X подчинена *закону Пуассона*.

По условию $n = 500$, $p = 0{,}002$, $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

а) Найдем вероятность того, что $X = 3$ (то есть в пути будет повреждено три изделия):

$$P_{500}(X = 3) = \frac{e^{-1} \cdot 1^3}{3!} = \frac{1}{6e} = 0{,}0613.$$

б) Событие «повреждено менее трех изделий» предполагает сумму событий $X = 0$; $X = 1$; $X = 2$.

Поэтому

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = \frac{5}{2} e^{-1} = 0{,}9197.$$

в) Событие «повреждено не менее трех изделий» является противоположным событию "повреждено менее трех изделий", то есть сумме событий: $X = 0$; $X = 1$; $X = 2$.

Поэтому

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$

$$= 1 - 0{,}9197 = 0{,}0803.$$

г) Событие «повреждено хотя бы одно изделие» является противоположным событию «не повреждено ни одного изделия».

Поэтому

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} = 1 - \frac{1}{e} = 1 - 0{,}368 = 0{,}632.$$

Ответ: а) 0,0613; б) 0,9197;
в) 0,0803; г) 0,632.

§ 5. НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение 1. Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее значения заполняют конечный или бесконечный промежуток $(a_1; a_2)$ числовой оси.

Каждому промежутку $(a; b)$ из области значений непрерывной случайной величины X отвечает определенная вероятность $P(a < X < b)$ того, что значения, принятые случайной величиной, попадают в этот промежуток.

Определение 2. Соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения* случайной величины.

О п р е д е л е н и е 3. _Функцией распределения_ (или _интегральной функцией распределения_) случайной величины X называется функция $F(x)$, равная при каждом $x \in R$ вероятности того, что X в результате испытания примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in R.$$

С в о й с т в а функции распределения:

1) значения функции распределения принадлежат отрезку $[0; 1]$;
2) $F(x)$ – неубывающая функция, то есть $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;
3) вероятность попадания случайной величины X в один из промежутков $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$ или $[a; b]$ равна разности значений функции $F(x)$ в точках b и a:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a);$$

4) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна 0;

5) $F(-\infty)=0, \quad F(+\infty)=1;$

6) если X – непрерывная случайная величина, то функция $F(x)$ непрерывна на $(-\infty;+\infty)$.

2. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

О п р е д е л е н и е 4. *Плотностью распределения вероятностей* (или *дифференциальной функцией распределения*) непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$, задаваемая равенством: $f(x)=F'(x), \quad x\in R$.

О п р е д е л е н и е 5. График функции $f(x)$ называется *кривой распределения величины* X.

Свойства
функции плотности распределения вероятностей:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R;$

2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx;$

3) $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx;$

4) геометрически вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(a;b)$ равна площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 1);

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (<u>*условие нормировки*</u>);

6) Если все значения случайной величины X заключены в промежутке $(a_1;a_2)$, то $\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)dx = 1$.

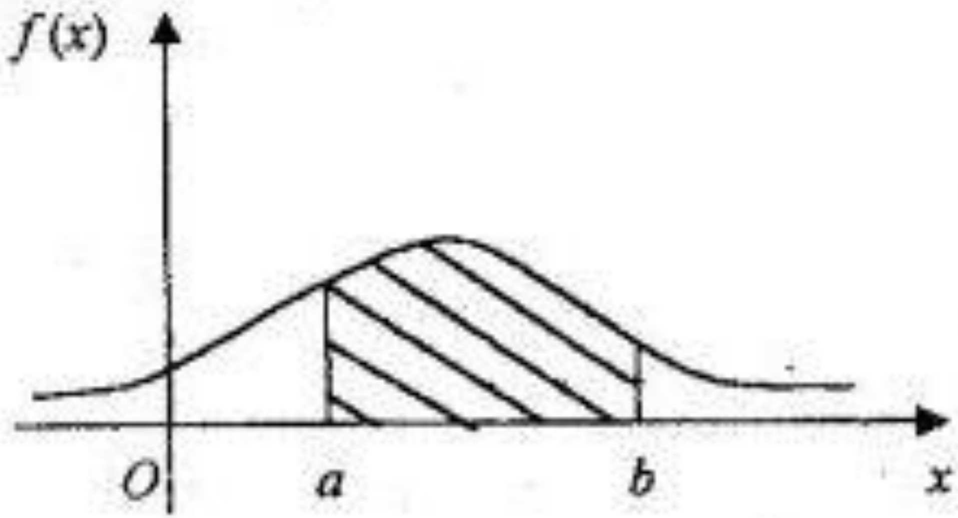

Рис. 1

З а м е ч а н и е 1. Название закона распределения непрерывной случайной величины зависит от вида функции $f(x)$ (или $F(x)$).

Например, непрерывная случайная величина имеет

1) *равномерное распределение* (рис. 2),

если $f(x) = c = const$ для $x \in [a;b]$ и $f(x) = 0$ вне $[a;b]$;

Например, непрерывная случайная величина имеет

1) *равномерное распределение* (рис. 2),

если $f(x) = c = const$ для $x \in [a;b]$ и $f(x) = 0$ вне $[a;b]$;

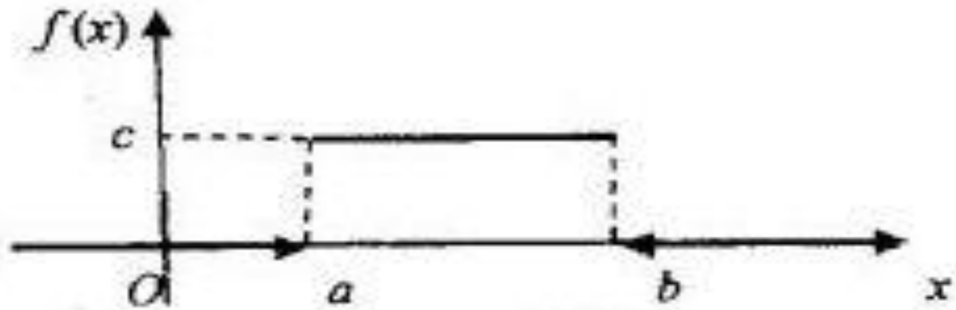

Рис. 2

2) *нормальное распределение* (рис.3),

если $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ для $x \in R$.

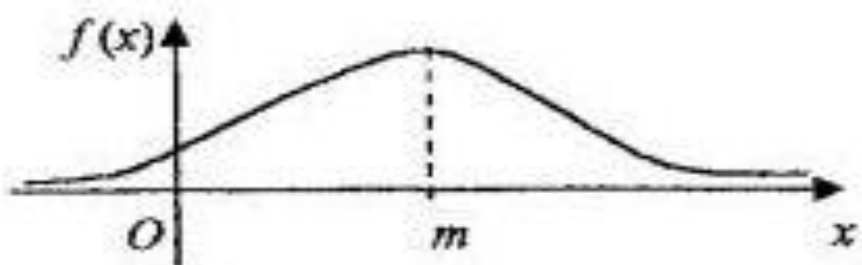

Рис. 3

3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

О п р е д е л е н и е 6. *Математическим ожиданием* $M(X)$ непрерывной случайной величины X называется число, вычисляемое по формуле:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

при условии, что этот интеграл сходится.

С в о й с т в а математического ожидания:

1. $M(C)=C$, где C – постоянная величина;
2. $M(CX)=C\cdot M(X)$, где C – постоянная величина;
3. $M(X_1+X_2)=M(X_1)+M(X_2)$.

Определение 7. *Дисперсией* $D(X)$ непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания, то есть

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где C – постоянная величина;
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где C – постоянная величина;
3. $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$;
4. Дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

или

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C)=0$, где C – постоянная величина;
2. $D(CX)=C^2\cdot D(X)$, где C – постоянная величина;
3. $D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$;
4. Дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx$$

или

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(M(X))^2.$$

Определение 8. *Средним квадратическим отклонением* непрерывной случайной величины X называется число, вычисляемое по формуле:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Замечание 2. Числа $D(X)$, $\sigma(X)$ характеризуют степень разброса значений случайной величины X около ее математического ожидания.

4. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией):

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le -1, \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & \text{если} \quad -1<x\le \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{если} \quad x>\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

Решение. Используя формулу

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a),$$

находим:

$$P\left(0 < X < \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\cdot 0+\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

З а д а ч а 2. Случайная величина X задана функцией плотности (дифференциальной функцией):

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\in(-\infty;1)\\ cx, & \text{если} \quad x\in[1;3],\\ 0, & \text{если} \quad x\in(3;+\infty).\end{cases}$$

Найдите: а) параметр c;

б) $F(x)$ и постройте ее график;

в) $P(2<X<5)$;

г) $M(X)$ и $D(X)$.

Р е ш е н и е. а) Функция $f(x)$ обладает свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

Поэтому, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{3} cxdx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = \left.\frac{cx^2}{2}\right|_1^3 = \frac{c(9-1)}{2} = 4c,$$

то $4c = 1$. Следовательно, $c = 1/4$.

Значит, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in (-\infty;1) \\ \frac{1}{4}x, & \text{если} \quad x \in [1;3], \\ 0, & \text{если} \quad x \in (3;+\infty). \end{cases}$

б) Известно, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Поэтому,

если $x \le 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$$

если $1 < x \le 3$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{x} \frac{1}{4} xdx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_{1}^{x} = \frac{1}{8}(x^2 - 1);$$

если $x > 3$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{4} xdx + \int_{3}^{x} 0dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_{1}^{3} = \frac{1}{8}(9 - 1) = 1.$$

Итак, получили:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ \dfrac{1}{8}(x^2 - 1), & \text{если} \quad 1 < x \le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ \frac{1}{8}(x^2-1), & \text{если} \quad 1 < x \le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 4.

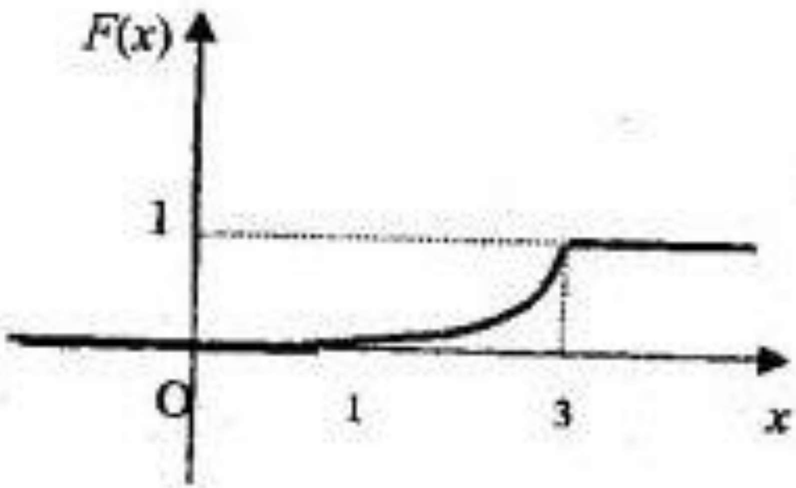

Рис. 4

в) $P(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - \frac{1}{8} \cdot (2^2 - 1) = \frac{5}{8}.$

Эту же вероятность можно вычислить другим способом, используя функцию $f(x)$:

$$P(2<X<5)=\int_2^5 f(x)dx=\int_2^3 \frac{1}{4}xdx+\int_3^5 0dx=$$

$$=\frac{1}{8}x^2\Big|_2^3+0=\frac{1}{8}\cdot(9-4)=\frac{5}{8}.$$

г) $$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{1} x\cdot 0dx+\int_1^3 x\cdot\frac{1}{4}xdx+\int_3^{+\infty} x\cdot 0dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{12}\Big|_1^3=\frac{1}{12}\cdot(27-1)=\frac{13}{6};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-(M(X))^2=\frac{1}{4}\int_1^3 x^3dx-\left(\frac{13}{6}\right)^2=$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx-(M(X))^2=\frac{1}{4}\int_1^3 x^3dx-\left(\frac{13}{6}\right)^2=$$

$$=\frac{x^4}{16}\bigg|_1^3-\frac{169}{36}=\frac{81-1}{16}-\frac{169}{36}=5-\frac{169}{36}=\frac{180-169}{36}=\frac{11}{36}.$$

Ответ: а) $c=\frac{1}{4}$;

б) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\in(-\infty;1],\\ \frac{1}{8}(x^2-1), & \text{если} \quad x\in(1;3],\\ 1, & \text{если} \quad x\in(3;+\infty),\end{cases}$ см. рис. 2;

в) $P(2<X<5)=\frac{5}{8}$;

г) $M(X)=\frac{13}{6}$; $D(X)=\frac{11}{36}$.

З а д а ч а 3. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \sin x, & \text{если} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате четырех испытаний величина X три раза примет значение, принадлежащее промежутку $\left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Р е ш е н и е. Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$ при одном испытании по формуле:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

В данном случае получим:

В данном случае получим:

$$p = P\left(0 < X < \frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \sin\frac{\pi}{6} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Далее, используя формулу Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

вычислим вероятность того, что при четырех испытаниях $(n = 4)$ случайная величина X три раза $(m = 3)$ попадет в промежуток $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$. Причем при каждом испытании вероятность попасть в интервал $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ остается равной $p = \frac{1}{2}$.

Тогда вероятность не попасть в этот интервал вычисляется по формуле:

В данном случае получим:

$$p = P\left(0 < X < \frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \sin\frac{\pi}{6} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Далее, используя формулу Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

вычислим вероятность того, что при четырех испытаниях $(n = 4)$ случайная величина X три раза $(m = 3)$ попадет в промежуток $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$. Причем при каждом испытании вероятность попасть в интервал $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ остается равной $p = \frac{1}{2}$.

Тогда вероятность не попасть в этот интервал вычисляется по формуле:

$$q = 1 - p = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, получаем:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = C_4^1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

§ 6. НЕКОТОРЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение 1. *Равномерным* называется распределение таких непрерывных случайных величин, все значения которых лежат на некотором интервале $(a;b)$ и плотность распределения вероятностей задается формулой:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a < x < b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b \end{cases}$$

График функции $f(x)$ изображен на рис. 1.

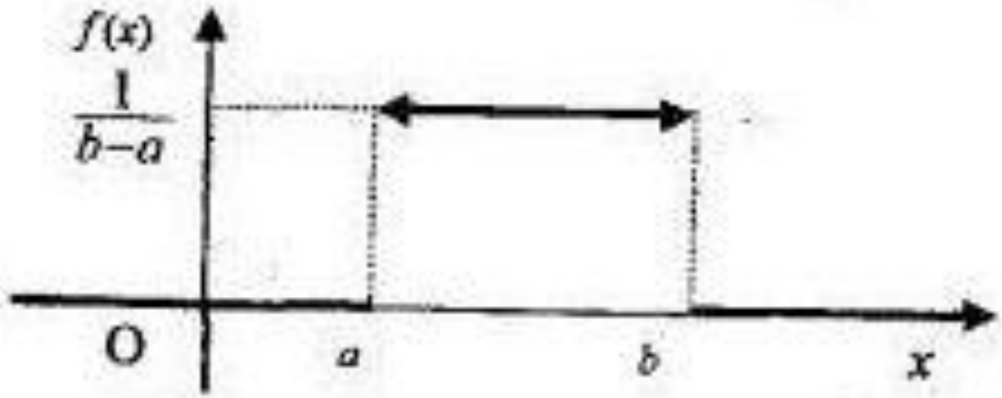

Рис. 1

Функция распределения вероятностей таких случайных величин задается формулой:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b,\\ 1 & \text{при} \quad x > b.\end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 2.

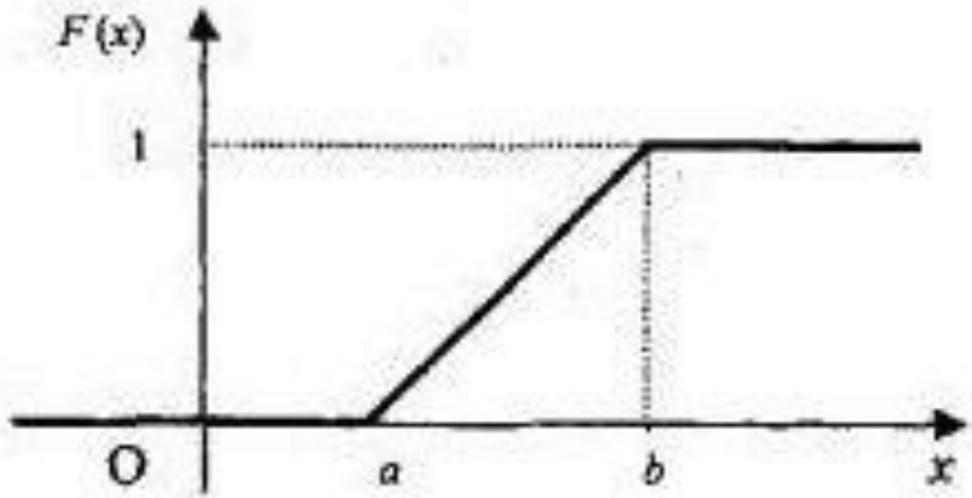

Рис. 2

Числовые характеристики непрерывной случайной величины X, равномерно распределенной в интервале $(a;b)$, вычисляются по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания величины X в промежуток $(a_1;a_2)$, где $(a_1;a_2)\subset(a;b)$, вычисляется по формуле:

$$P(a_1<X<a_2)=\frac{a_2-a_1}{b-a}.$$

2. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение 2. *Показательным* (или *экспоненциальным*) называется распределение таких непрерывных случайных величин, у которых функция плотности распределения вероятностей задается формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

где λ – некоторое постоянное положительное число (см. рис. 3).

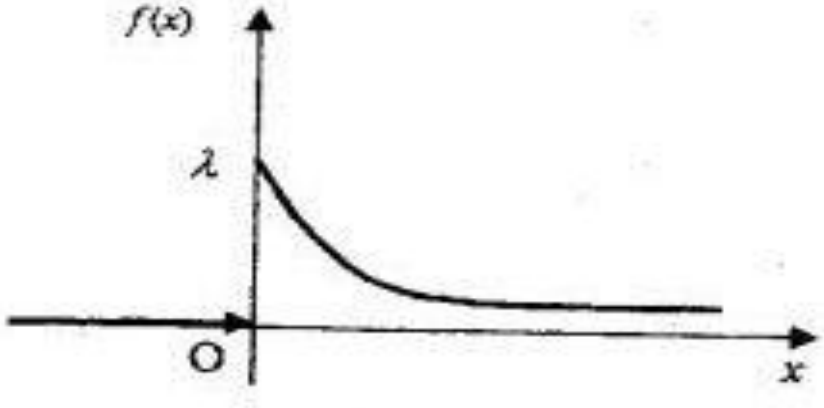

Рис. 3

Функция распределения $F(x)$ таких случайных величин задается формулой:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geq 0\end{cases}$$

(см. рис. 4).

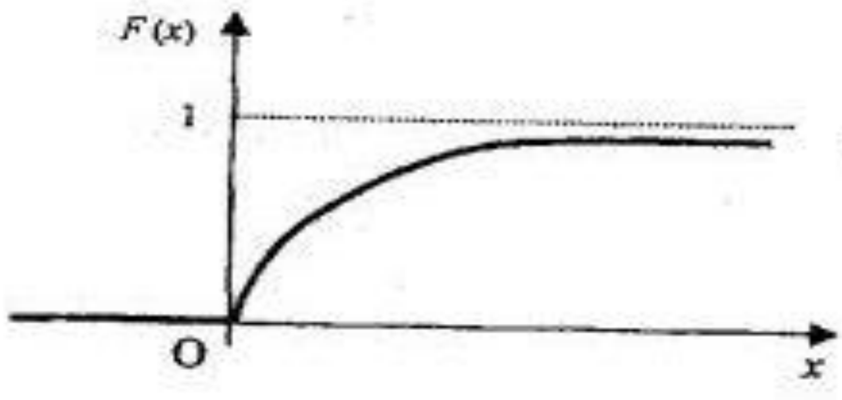

Рис. 4

Для непрерывной случайной величины X, имеющей показательное распределение вероятностей, числовые характеристики вычисляются по формулам:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Вероятность попадания величины X в интервал $(a;b)$ вычисляется по формуле:

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

3. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение 3. *Нормальным* называется распределение вероятностей тех непрерывных случайных величин, у которых плотность распределения задается формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m, $\sigma > 0$ – некоторые числа.

График функции $f(x)$ изображен на рис. 5.

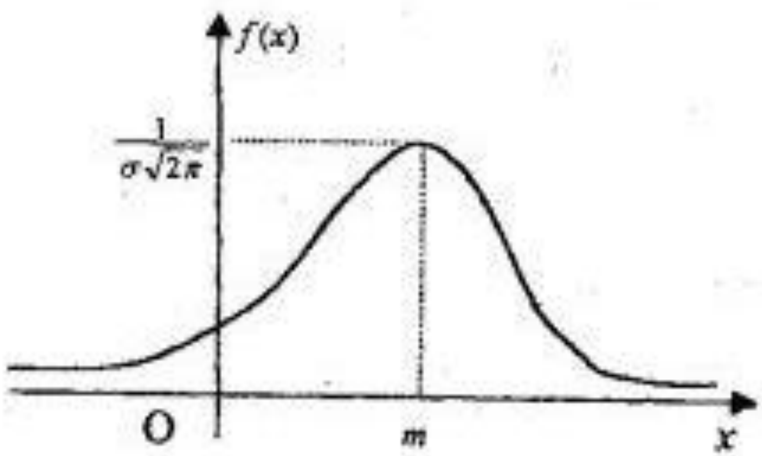

Рис. 5

В случае нормального закона распределения функция распределения вероятностей вычисляется по формуле:

В случае нормального закона распределения функция распределения вероятностей вычисляется по формуле:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – *функция Лапласа* (или *интеграл вероятностей*, или *функция ошибок*).

З а м е ч а н и е. Функция $\Phi(x)$ является нечетной. Таблица 2 ее значений при $x > 0$ дана в приложении. Для $x > 5$ можно считать $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}$. График функции $\Phi(x)$ изображен на рис. 6.

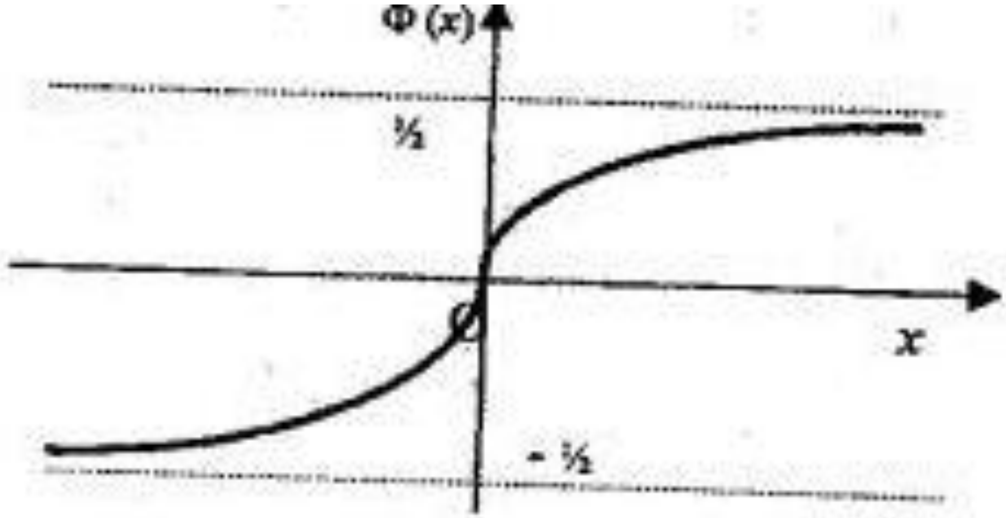

Рис. 6

Числовые характеристики случайной величины X, заданной нормальным законом распределения, вычисляются по формулам:

$$M(X) = m, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Числовые характеристики случайной величины X, заданной нормальным законом распределения, вычисляются по формулам:

$$M(X) = m, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(a; b)$, вычисляется по формуле:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от ее математического ожидания m меньше положительного числа δ, вычисляется по формуле:

$$P(|X - m| < \delta) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Задача 1. Все значения равномерно распределенной случайной величины X лежат на отрезке $[2;\, 8]$.

Найдите:

а) $f(x)$; б) $F(x)$; в) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; г) $P(3 < X < 5)$

Решение. Воспользовавшись формулами из п.1 при $a = 2$ и $b = 8$, находим:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 2, \\ \dfrac{1}{6} & \text{при} \quad 2 \le x \le 8, \\ 0 & \text{при} \quad x > 8; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{б) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ \dfrac{x-2}{6} & \text{при} \quad 2 < x \le 8, \\ 1 & \text{при} \quad x > 8; \end{cases} \qquad (2)$$

$$б)\ F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 2,\\ \dfrac{x-2}{6} & \text{при} \quad 2 < x \le 8,\\ 1 & \text{при} \quad x > 8;\end{cases} \qquad (2)$$

в) $M(X)=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2+8}{2}=5,$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(8-2)^2}{12}=\frac{36}{12}=3, \qquad \sigma(X)=\sqrt{3};$$

г) $P(3<X<5)=F(5)-F(3)=\dfrac{5-2}{6}-\dfrac{3-2}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}.$

Ответ: а) формула (1); б) формула (2);

в) $M(X)=5$, $D(X)=3$, $\sigma(X)=\sqrt{3}$;

г) $\dfrac{1}{3}$.

З а д а ч а 2. Цена деления шкалы амперметра равна $0,1А$. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при вычислении будет сделана ошибка, превышающая $0,02А$.

Р е ш е н и е. Ошибку округления вычисления можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями шкалы.