

**ЭЛЕМЕНТЫ
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

- элементы комбинаторики;
- вероятность случайного события, схема случаев;
- основные теоремы теории вероятностей;
- формулы Бернулли, Лапласа, Пуассона;
- числовые характеристики дискретной случайной величины;
- числовые характеристики непрерывной случайной величины;
- некоторые законы распределения случайных величин;
- предельные теоремы;
- статистический анализ выборки;
- точечные и интервальные оценки параметров распределения;
- проверка статистических гипотез;
- критерий согласия Пирсона;
- элементы теории корреляции.

Схема изложения материала каждого занятия следующая:

1. Справочный теоретический материал, необходимый для успешного усвоения темы;
2. Разбор типовых задач (с подробным их решением и анализом);
3. Перечень задач для самостоятельного решения;
4. Ответы.

Для контроля полученных знаний предложены две контрольные работы и перечень контрольных вопросов по теории.

В каждом параграфе нумерация формул, таблиц, рисунков и примеров с решениями самостоятельная. Нумерация задач для самостоятельного решения и ответов к ним начинается с указания номера параграфа.

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Размещениями из n различных элементов по m в каждом называются комбинации, составленные из n элементов по m различных элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m (читается: "А из n по m ") и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Определение 2. Перестановками из n различных элементов называются комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначается символом P_n (читается: " P из n ") и вычисляется по формуле:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! .$$

Замечание 1. Перестановки из n элементов являются частным случаем размещений из n элементов по n в каждом, то есть справедлива формула:

$$P_n = A_n^n .$$

Определение 3. Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются комбинации, составленные из n элементов по m различных элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. При этом порядок расположения элементов не играет роли.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m (читается: "С из n по m ") и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m},$$

то есть

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

З а м е ч а н и е 2. Справедливы следующие свойства числа сочетаний:

$$C_n^0 = 1,$$

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (m = \overline{0; n}),$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \quad (m = \overline{1; n}),$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Определение 4. Размещениями с повторениями из n элементов по m элементов в каждом называются комбинации, составленные из n элементов по m элементов, возможно повторяющиеся, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число всех возможных размещений с повторениями из n элементов по m элементов обозначается символом $\overline{A_n^m}$ (читается: "А из n по m с чертой") и вычисляется по формуле:

$$\overline{A_n^m} = n^m.$$

Замечание 3. При решении задач полезно знание следующих правил:

Правило суммы. Если объект A может быть выбран из некоторой совокупности объектов m способами, а другой объект B — k способами, то выбрать либо A , либо B можно $m + k$ способами.

Правило умножения. Если объект A может быть выбран из некоторой совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать k способами, то пара объектов A и B в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot k$ способами.

Задача 1. Студенты изучают 6 различных дисциплин. Если ежедневно в расписание включается по три дисциплины, то сколькими различными способами могут быть распределены уроки в день ?

Решение. Различные комбинации трех дисциплин, выбранных из шести, составляют расписание на один день. При этом они различаются либо составом дисциплин, либо их порядком. Поэтому искомое число определяется формулой числа размещений:

$$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Ответ: 120.

Задача 2. Сколько всего шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1; 3; 4; 5; 7 и 9, если в каждом из этих чисел ни одна цифра не повторяется?

Решение. Чтобы число было четным, последняя его цифра (число единиц) должна быть четной. Из заданных цифр только одна четная — 4. Поэтому последней цифрой искомого числа может быть только 4. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Значит, задача сводится к нахождению числа перестановок из пяти элементов:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Следовательно, всего можно составить 120 чисел искомого вида.

Ответ: 120.

Задача 3. Сколько всего шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1; 3; 4; 5; 7; 9, если цифры могут повторяться?

Решение. Чтобы число было четным, его последняя цифра (то есть число единиц) должна быть четной. Из заданных цифр только одна удовлетворяет этому условию – 4. Поэтому последней цифрой искомого числа является 4.

Остальные пять цифр искомого числа могут быть любыми из предложенных в задаче, причем могут повторяться.

Значит, задача сводится к нахождению числа размещений с повторениями из шести элементов по пять в каждом;

$$\overline{A_6^5} = 6^5 = 8376.$$

Следовательно, можно составить 8376 чисел, удовлетворяющих всем требованиям задачи.

Ответ: 8376 чисел.

Задача 4. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 10 книг по математике, имеющихся в библиотеке?

Решение. Искомое число способов равно числу сочетаний из 10 книг по три, так как порядок выбора трех книг не имеет значения. Следовательно, находим:

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Поэтому указанную в условии задачи выборку читатель может осуществить 120 способами.

Ответ: 120.

Задача 5. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе могут повторяться?

Решение. При составлении трехзначного четного числа из данных цифр в качестве первой цифры (числа сотен) можно взять любую цифру, кроме 0. Значит, есть 6 возможностей выбора первой цифры.

В качестве второй цифры (числа десятков) можно выбрать любую из предложенных в задаче цифр. Значит, есть 7 возможностей выбора второй цифры.

В качестве последней цифры (числа единиц) можно взять любую из цифр 0, 2, 4, 6. Значит, есть 4 возможности выбора третьей цифры.

Следовательно, согласно правилу умножения находим количество способов составления числа, удовлетворяющего условию задачи:

$$6 \cdot 7 \cdot 4 = 168.$$

Ответ: 168.

Задача 6. Сколько различных чисел можно составить из цифр 4 и 5, если количество цифр в числе не более пяти и не менее трех?

Решение. По условию задачи количество цифр в числе не более пяти и не менее трех. Значит, их либо три, либо четыре, либо пять.

Если число, состоящее из четверок и пятерок, содержит три цифры, то таких чисел будет

$$\overline{A_2^3} = 2^3 = 8.$$

Если число, состоящее из четверок и пятерок, содержит четыре цифры, то таких чисел будет

$$\overline{A_2^4} = 2^4 = 16.$$

Если число, состоящее из четверок и пятёрок, содержит пять цифр, то таких чисел будет

$$\overline{A_2^5} = 2^5 = 32.$$

Следовательно, согласно правилу суммы находим количество способов составления числа, удовлетворяющего условию задачи:

$$8 + 16 + 32 = 56.$$

Ответ: 56.

- Говорят, что события A_1, \dots, A_n образуют полную группу равновозможных попарно несовместных событий, если в данном испытании события A_1, \dots, A_n являются равновозможными и любые два из них – несовместные. Такие события будем называть элементарными событиями (или случаями, исходами).
- Элементарное событие A_i называется благоприятствующим для появления события A , если наступление события A_i влечет за собой появление события A .
- Событие, обозначаемое \bar{A} , называется противоположным событием по отношению к событию A , если появление одного из них в результате данного испытания исключает появление другого.

2. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

О п р е д е л е н и я.

- Суммой (или объединением) событий A и B называется событие, обозначаемое $A + B$, которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий A или B .
- Произведением (или совмещением) событий A и B называется такое событие, обозначаемое $A \cdot B$, состоящее в одновременном наступлении и события A , и события B .

З а м е ч а н и е 1. Если события A_1, \dots, A_n образуют полную группу попарно несовместных событий, то справедливы равенства:

$$A_1 + \dots + A_n = E, \quad A_i \cdot A_j = \bar{E} \quad (i \neq j).$$

З а м е ч а н и е 2. Для событий A и \bar{A} справедливы равенства:

$$A + \bar{A} = E, \quad A \cdot \bar{A} = \bar{E}.$$

Следовательно, события A и \bar{A} всегда образуют полную группу несовместных событий.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Пусть для данного испытания события A_1, \dots, A_n образуют полную группу равновозможных попарно несовместных событий.

О п р е д е л е н и е. Вероятностью случайного события A в данном испытании называется число, обозначаемое $p(A)$ и вычисляемое по формуле:

$$p(A) = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

где n — число всех возможных элементарных событий рассматриваемого испытания, m — число тех элементарных событий из всех возможных, которые благоприятствуют появлению события A .

З а м е ч а н и е 3. Ситуация, когда полную группу составляют равновозможные события, называется классической. Поэтому определение вероятности (1), опирающееся на такое условие, называется классическим определением вероятности.

З а м е ч а н и е 4. Нетрудно видеть, что в формуле (1) числа m, n связаны неравенствами:

$$0 \leq m \leq n.$$

Поэтому вероятность любого события A удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq p(A) \leq 1.$$

Причем, если $A = E$ — достоверное событие, то

$$m = n \text{ и } p(A) = 1;$$

если $A = \bar{E}$ — невозможное событие, то

$$m = 0 \text{ и } p(A) = 0.$$

Задача 1. Монета подбрасывается два раза.

а) Опишите полную группу возможных элементарных событий.

б) Если событие A – выпало не менее одного «герба», B – выпало не менее одной «решки», укажите, что собой представляют события:

$$\bar{A}, \bar{B}, A+B, A \cdot B?$$

Решение. В данной задаче испытанием является подбрасывание монеты два раза подряд.

а) Обозначим события:

C_1 – выпал первым «герб», второй – «решка»,

C_2 – выпала первой «решка», вторым – «герб»,

C_3 – оба раза выпал «герб»,

C_4 – оба раза выпала «решка».

Тогда перечисленные события C_1, C_2, C_3, C_4 образуют полную группу, так как при двух подбрасываниях монеты обязательно произойдет одно из них. Значит, справедливо равенство:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = E.$$

Кроме того, никакие два из указанных событий не могут произойти одновременно. Следовательно, имеет место равенство:

$$C_i \cdot C_j = \bar{E} \quad \text{при } i \neq j.$$

Таким образом, указанные события попарно несовместны. Причем наступление любого из событий C_1, C_2, C_3, C_4 не имеет преимущества перед остальными, а значит, эти события являются равновозможными.

Таким образом, события C_1, C_2, C_3, C_4 образуют полную группу равновозможных попарно несовместных событий. Следовательно, они являются в данном испытании полной группой элементарных событий.

б) Так как \bar{A} — не выпал ни один раз «герб», то $\bar{A} = C_4$ — оба раза выпадает «решка».

Аналогично, \bar{B} — не выпала ни одного раза «решка». Следовательно, $\bar{B} = C_3$ — оба раза выпал «герб».

Так как A означает, что выпадает не менее одного раза «герб», то $A = C_1 + C_2 + C_3$.

Аналогично заключаем: $B = C_1 + C_2 + C_4$.

Следовательно, по определению суммы и произведения событий получаем:

$$A + B = (C_1 + C_2 + C_3) + (C_1 + C_2 + C_4) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = E;$$

$$A \cdot B = (C_1 + C_2 + C_3) \cdot (C_1 + C_2 + C_4) = C_1 + C_2.$$

Ответ: а) C_1, C_2, C_3, C_4 ;

б) $\bar{A} = C_4, \bar{B} = C_3, A + B = E, A \cdot B = C_1 + C_2$.

Задача 2. В ящике имеется 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из ящика наугад выбирается один шар. Какова вероятность, что этот шар
а) белый, б) черный?

Решение. В данной задаче полную группу элементарных событий составляют 10 событий, так как выбор любого одного шара можно осуществить 10 способами.

Из этих событий только 3 события благоприятствуют выбору белого шара и 7 – выбору черного шара.

Поэтому, если A – выбор белого шара, то

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0,3;$$

если B – выбор черного шара, то

$$P(B) = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Ответ: а) 0,3; б) 0,7.

Задача 3. Из пяти карточек с буквами A, B, B, Γ, D наугад выбираются одна за другой три карточки и располагаются в ряд (в порядке появления) слева направо. Какова вероятность, что получится слово «ДВА»?

Решение. Выбор трех карточек из имеющихся пяти можно осуществить A_5^3 способами, так как порядок карточек имеет значение при этом условии. Вычисляем:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Значит, число всех возможных элементарных событий равно 60. Из этих событий только одно благоприятствует событию — получению слова «ДВА». Следовательно, $p = \frac{1}{60}$.

Ответ: $\frac{1}{60}$.

Задача 4. В ящике 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Из ящика наугад выбирается два шара. Какова вероятность того, что

а) оба шара белые; б) оба шара черные;

в) один шар белый, другой черный ?

Решение. Число выбора двух шаров из 10 имеющихся определяется всевозможными сочетаниями из 10 по 2:

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

Значит, полную группу элементарных событий рассматриваемого испытания (выбор двух шаров) составляют 45 событий. Следовательно,

$$n = 45.$$

а) Если из элементарных событий рассматривать только те, которые состоят в выборе двух белых шаров, то находим:

$$m = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Следовательно, вероятность того, что оба шара будут белыми, вычисляется по формуле:

$$P_1 = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

б) Если рассматривать событие – выбор только двух черных шаров, то число благоприятствующих ему событий равно:

$$m = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Значит, вероятность выбора только двух черных шаров вычисляется по формуле:

$$P_2 = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

в) Если рассматривать событие – выбор одного белого и одного черного шаров, то для него число благоприятствующих событий равно:

$$m = C_4^1 \cdot C_6^1 = \frac{4}{1} \cdot \frac{6}{1} = 24.$$

Значит, вероятность выбора одного белого и одного черного шаров вычисляется по формуле:

$$P_3 = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{3}$, б) $\frac{2}{15}$, в) $\frac{8}{15}$.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 1 (вероятность суммы несовместных событий). Вероятность наступления одного из двух несовместных событий (безразлично какого) равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 1. Вероятность наступления одного из нескольких попарно несовместных событий (безразлично какого) равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Следствие 2. Вероятность события A равна единице минус вероятность его противоположного события \bar{A} :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Теорема 2 (вероятность суммы совместных событий). Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

2. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Определение. Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B при условии, что событие A уже наступило.

3. УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 3 (вероятность произведения двух независимых событий). Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема 4 (вероятность произведения двух зависимых событий).
Вероятность совместного наступления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Следствие 3. Вероятность совместного наступления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}}(A_n).$$

4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Теорема 5 (формула полной вероятности). Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии наступления одного из попарно несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

З а м е ч а н и е 1. Появление события A изменит вероятности $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ элементарных событий. При этом вероятность осуществления события H_k ($1 \leq k \leq n$) после наступления события A

определяется формулой Байеса:

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)},$$

5. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Теорема 6 (формула Бернулли). Пусть в серии из n одинаковых независимых испытаний в каждом испытании может наступить либо событие A с вероятностью p , либо событие \bar{A} с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в этой серии испытаний событие A наступит ровно m раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad \text{где} \quad C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

6. ФОРМУЛЫ ЛАПЛАСА

Эти формулы дают приближенное значение вероятности наступления события A определенное число раз в серии из n независимых испытаний, если число n достаточно велико.

Пусть p ($0 < p < 1$) — вероятность события A в каждом испытании;
 $q = 1 - p$ — вероятность наступления события \bar{A} .

Теорема 7 (локальная формула Лапласа). Вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз в серии из n одинаковых независимых испытаний приближенно вычисляется по формуле Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

З а м е ч а н и е 2. В приложении приведена таблица 1 значений функции $\varphi(x)$ при положительных x . Для отрицательных x пользуются свойством четности функции: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

З а м е ч а н и е 3. Формула Лапласа тем точнее приближает формулу Бернулли, чем больше число n (более нескольких десятков) и $n \cdot p > 10$.

Т е о р е м а 8 (интегральная формула Лапласа). Вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что событие A наступит от m_1 до m_2 раз в серии из n одинаковых независимых испытаний приближенно вычисляется по формуле Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

З а м е ч а н и е 4. В приложении приведена таблица 2 значений функции $\Phi(x)$ при $0 < x \leq 5$. При $x < 0$ пользуются той же таблицей с учетом свойства нечетности функции: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для $x > 5$ можно считать $\Phi(x) = 0,5$.

7. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Т е о р е м а 9 (формула Пуассона). Пусть p — вероятность события A в каждом испытании. Тогда вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз в серии из n независимых испытаний приближенно вычисляется по формуле Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$.

З а м е ч а н и е 5. Формула Пуассона тем точнее, чем меньше p и больше число n (более нескольких сотен), причем $n \cdot p < 10$.

8. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

З а д а ч а 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Вероятность попадания в первую область 0,4, во вторую — 0,3. Найдите вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую область, либо во вторую.

Р е ш е н и е. Обозначим события: A — стрелок попал в первую область, B — стрелок попал во вторую область. Эти события несовместны, так как они не могут произойти одновременно (попадание пули в одну область мишени исключает ее попадание в другую область).

Поэтому верна теорема 1 сложения вероятностей, откуда находим:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,4 + 0,3 = 0,7.$$

О т в е т: 0,7.

Задача 2. Для Московской области среднее число дождливых дней в августе равно 15. Какова вероятность, что первые два дня августа не будут дождливыми?

Решение. Обозначим события:

A — «1 августа не будет дождя»,

B — «2 августа не будет дождя».

Необходимо рассмотреть событие $A \cdot B$ — «1 и 2 августа не будет дождя».

В данной задаче

$$P(A) = \frac{16}{31},$$

так как в августе 31 день, а недождливых дней из них $31 - 15 = 16$.

При вычислении вероятности $P(B)$ результат зависит от того, будет ли дождь 1-го августа.

Следовательно, необходимо найти условную вероятность $P_A(B)$ – вероятность того, что 2-го августа не будет дождя в предположении, что 1 августа – недождливый день.

Тогда получаем:

$$P_A(B) = \frac{15}{30},$$

так как в августе 30 дней, начиная со 2 августа, из них недождливых дней осталось 15 (ведь один день пришелся по предположению на 1 августа).

Итак, получаем:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{16}{31} \cdot \frac{15}{30} = \frac{8}{31}.$$

Ответ: $\frac{8}{31}$.

Задача 3. В ящике 10 деталей, среди которых 6 стандартных. Найдите вероятность того, что среди трех наугад взятых деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. События «среди взятых деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди взятых деталей нет ни одной стандартной» – противоположные, так как наступление первого события исключает наступление второго. Обозначим первое событие A , а второе – \bar{A} .

По следствию 2 теоремы 1 известно, что

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Найдем $P(\bar{A})$.

Общее число элементарных событий испытания – выбрать 3 детали из имеющихся 10 – можно найти с помощью формулы сочетаний:

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Число нестандартных деталей равно $10 - 6 = 4$.

Число благоприятствующих событию \bar{A} исходов можно найти тоже с помощью формулы сочетаний:

$$C_4^3 = C_4^{4-3} = C_4^1 = 4.$$

Тогда получаем:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{120} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}.$$

Ответ: $\frac{29}{30}$.

Задача 4. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру (валет, дама, король, туз) любой масти или карту трефовой масти?

Решение. Обозначим события:

A — извлечение из колоды карты-фигуры;

B — извлечение из колоды карты трефовой масти.

Необходимо найти вероятность суммы этих событий.

События A и B совместны, так как они могут наступить одновременно, если извлекается карта-фигура трефовой масти. Поэтому для подсчета вероятности суммы этих событий используем теорему 2:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

В рассматриваемой задаче

$$P(A) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13},$$

так как всего элементарных исходов 52, что равно числу карт в колоде, из них 16 благоприятствуют событию A , что равно числу фигур в колоде.

Аналогично вычисляем:

$$P(B) = \frac{13}{52}$$

(благоприятствуют этому событию 13 исходов, что равно количеству карт трефовой масти);

$P(A \cdot B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ (благоприятствуют этому событию 4 исхода,
что равно количеству карт-фигур трефовой масти).

Итак, находим:

$$P(A + B) = \frac{4}{13} + \frac{13}{52} - \frac{1}{13} = \frac{25}{52}.$$

Ответ: $\frac{25}{52}$.

Задача 5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а потом другая. Какова вероятность того, что полученное двузначное число является четным?

Решение. Обозначим события:

A — «двузначное число является четным»;

H_1 — «первая цифра четная»;

H_2 — «первая цифра нечетная».

Тогда вычисляем:

$$P(H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(H_2) = \frac{3}{5}.$$

Найдем условные вероятности $P_{H_1}(A)$ и $P_{H_2}(A)$.

$P_{H_1}(A) = \frac{1}{4}$ — вероятность выбора второй четной цифры в предположении, что первая цифра тоже четная. (Цифр для выбора осталось 4 и из них только один благоприятствующий исход.)

$P_{H_2}(A) = \frac{2}{4}$ — вероятность выбора второй четной цифры в предположении, что первая цифра нечетная. (Цифр для выбора осталось 4 и из них благоприятствующих исходов 2.)

Теперь по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)$$

находим:

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2+6}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Отвст: $\frac{2}{5}$.

Задача 6. В ящике 20 белых и 10 черных шаров. Поочередно извлекают 4 шара, причем каждый извлеченный шар возвращают в ящик перед извлечением следующего. Какова вероятность того, что из четырех извлеченных шаров окажется два белых?

Решение. Вероятность извлечения белого шара одна и та же во всех четырех испытаниях, так как каждый извлеченный шар возвращается в ящик:

$$P = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Тогда вероятность извлечения черного шара во всех четырех испытаниях равна:

$$q = 1 - p = \frac{1}{3}.$$

Используя формулу Бернулли, находим вероятность того, что из четырех извлеченных шаров два шара будут белыми:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{27}.$$

Ответ: $\frac{8}{27}$.

Задача 7. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

Решение. По условию задачи

$$n = 100, m = 75, p = 0,8, q = 1 - p = 0,2.$$

Так как n — достаточно большое число, воспользуемся локальной формулой Лапласа $P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$:

$$\begin{aligned} P_{100}(75) &= \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \varphi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{16}} \varphi\left(\frac{75 - 80}{\sqrt{16}}\right) = \\ &= \frac{1}{4} \varphi\left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{1}{4} \varphi(1,25). \end{aligned}$$

По таблице 1 из приложения находим:

$$\varphi(1,25) = 0,1826.$$

Следовательно, $P_{100}(75) = \frac{0,1826}{4} = 0,04565$.

Задача 8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена

- а) не менее 75 раз и не более 90 раз;
- б) не менее 75 раз;
- в) не более 74 раз.

Решение. Воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

а) По условию задачи

$$n = 100, p = 0,8, q = 0,2, m_1 = 75, m_2 = 90.$$

Тогда, воспользовавшись таблицей 2 из приложения, получаем:

$$\begin{aligned} P_{100}(75;90) &= \Phi\left(\frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = \Phi\left(\frac{10}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{4}\right) = \\ &= \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882. \end{aligned}$$

б) Требование того, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает следующее: число появлений события может быть равно

либо 75, либо 76, ..., либо 100.

Тогда следует принять

$$m_1 = 75; m_2 = 100.$$

Воспользовавшись таблицей 2 из приложения, получаем:

$$\begin{aligned} P_{100}(75; 100) &= \Phi\left(\frac{100 - 80}{4}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 80}{4}\right) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \\ &= \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944. \end{aligned}$$

в) Событие «мишень поражена не более 74 раз» и событие «мишень поражена не менее 75 раз» являются противоположными. Поэтому сумма их вероятностей равна 1.

Следовательно, искомая вероятность вычисляется по формуле:

$$P_{100}(0; 74) = 1 - P_{100}(75; 100) = 1 - 0,8944 = 0,1056.$$

Ответ: а) 0,8882;

б) 0,8944;

в) 0,1056.

Задача 9. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что один учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Решение. По условию задачи

$$n = 100\,000, \quad p = 0,0001.$$

События «из n книг ровно m книг сброшюрованы неправильно», где $m = 0, 1, 2, \dots, 100\,000$, являются независимыми.

Так как число n велико, а вероятность p мала, вероятности $P_n(m)$ можно вычислить по формуле Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^m}{m!},$$

где $\lambda = np$.

В рассматриваемой задаче

$$\lambda = 100\,000 \cdot 0,0001 = 10.$$

Поэтому искомая вероятность $P_{100\,000}(5)$ определяется равенством:

$$P_{100\,000}(5) = \frac{e^{-10} \cdot 10^5}{5!} = 10^5 \cdot \frac{0,000045}{120} = 0,0375.$$

Ответ: 0,0375.

§ 4. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

О п р е д е л е н и я .

- Случайной называется величина, принимающая в результате испытания только одно значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Различают два типа случайных величин: *дискретные* и *непрерывные*.

- Случайная величина X называется дискретной, если в результате испытания она принимает одно из конечного или бесконечного множества значений x_1, x_2, \dots
- Случайная величина называется непрерывной, если множество ее значений заполняет полностью некоторый промежуток (a, b) .

2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

О п р е д е л е н и е 1. Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины (или короче: законом распределения дискретной случайной величины) называется зависимость между возможными значениями x_k ($k = 1, 2, \dots$) дискретной случайной величины и их вероятностями p_k ($k = 1, 2, \dots$).

- Закон распределения может быть задан в виде таблицы (табл. 1), в первой строке которой указывают все возможные значения x_k случайной величины X , расположенные в возрастающем порядке, а во второй строке таблицы – вероятности p_k этих значений.

Таблицу 1 называют также рядом распределения (или вероятностным рядом) дискретной случайной величины X .

Таблица 1

X	x_1	x_2	\dots	x_k	\dots
P	P_1	P_2	\dots	P_k	\dots

К о н т р о л ь. Сумма чисел из второй строки равна 1, то есть справедливо равенство:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots = 1.$$

• Закон распределения может быть задан графически в виде многоугольника распределения вероятностей (рис. 1), когда в прямоугольной системе координат строят ломаную, соединяющую последовательно точки с координатами (x_k, P_k) , $k = 1, 2, \dots$. Полученную линию называют многоугольником распределения.

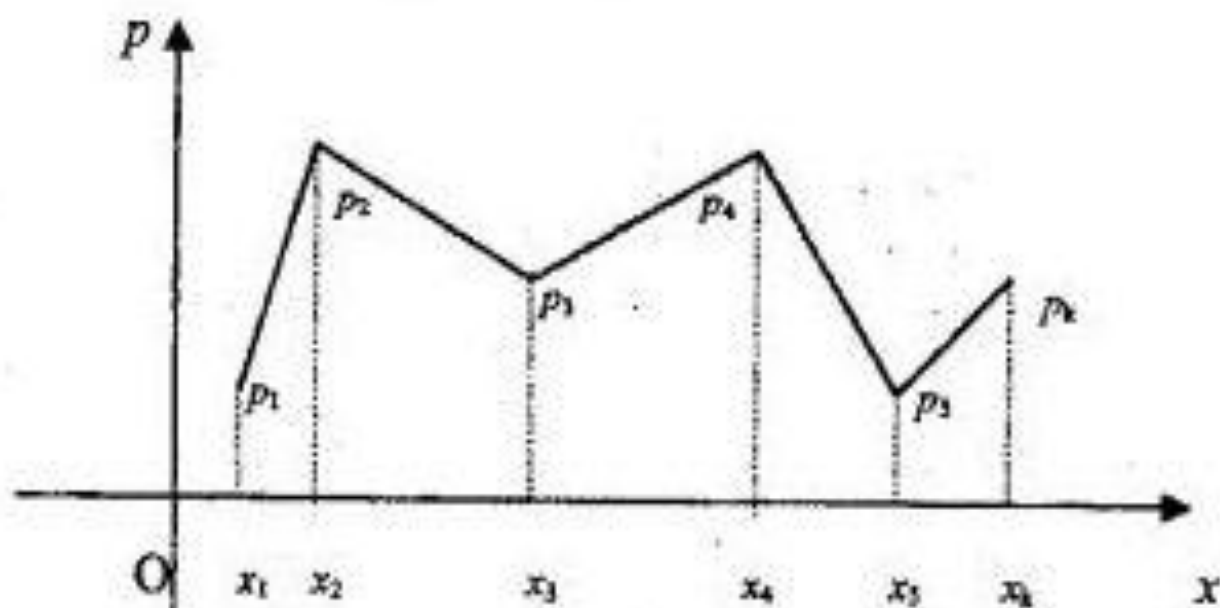


Рис. 1

- Закон распределения может быть задан аналитически в виде формулы:

$$p_k = P(X = x_k) = \varphi(x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Определение 2. Биномиальным называется закон распределения дискретной случайной величины X — числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых появляется либо событие A , либо событие \bar{A} ; и вероятность появления события A равна p , а вероятность появления события \bar{A} равна $q = 1 - p$.

Тогда $P(X = k)$ – вероятность появления события A ровно k раз в n испытаниях – вычисляется по формуле Бернулли:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Если число испытаний n очень велико, а вероятность p появления события A в каждом испытании очень мала, то для вычисления $P(X = k)$ используют формулу Пуассона:

$$P(X = k) = P_n(k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!},$$

где $\lambda = np$.

При этом говорят, что случайная величина X распределена по закону Пуассона.

3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение 3. *Функцией распределения* вероятностей дискретной случайной величины X , обозначаемой $F(x)$, называется функция, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения:

1. Определена при $x \in (-\infty; +\infty)$;
2. $0 \leq F(x) \leq 1$, причем $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$
3. $F(x)$ – неубывающая функция на $(-\infty; +\infty)$;
4. $F(x)$ – непрерывная функция слева в точках $x = x_k$ ($k = 1, 2, \dots$)
и непрерывная функция во всех остальных точках;

5. Для дискретной случайной величины X , заданной табл. 2, функция $F(x)$ определяется формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_1 \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \leq x_3, \\ \dots & \dots \\ 1, & \text{если } x > x_n. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 2.

Таблица 2

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P	P_1	P_2	\dots	P_n

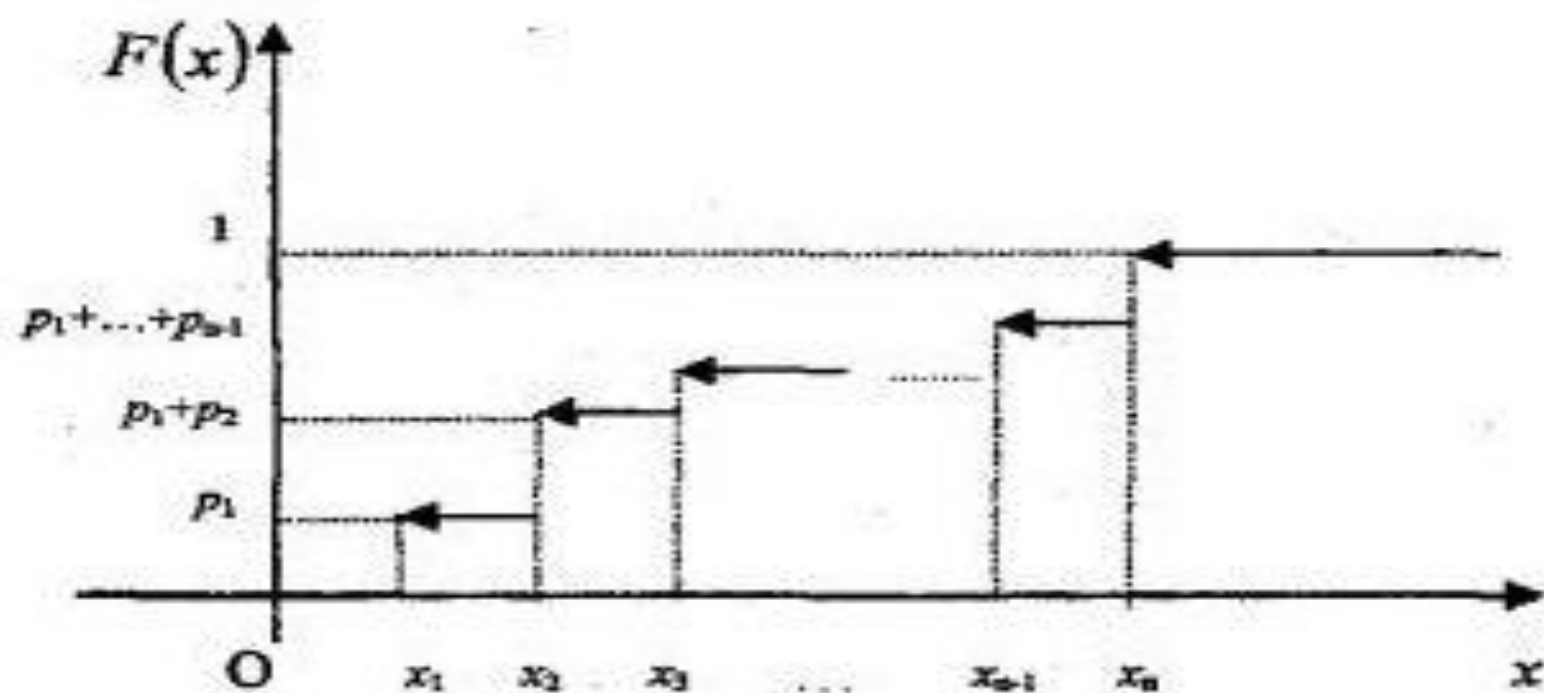


Рис. 2

4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

О п р е д е л е н и е 4. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины X , заданной табл. 1, называется число $M(X)$, вычисляемое по формуле:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

Если случайная величина задана табл. 2, то для нее

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k.$$

З а м е ч а н и е 1. При большом числе испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины X близко к ее математическому ожиданию $M(X)$. Точнее, оно стремится к $M(X)$ при неограниченном возрастании числа испытаний.

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$, где C — постоянная величина;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$, где C — постоянная величина;
3. $M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$;
4. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n)$, если X_1, X_2, \dots, X_n — независимые случайные величины;
5. Математические ожидания случайных величин X и Y , заданных, соответственно, табл. 1 и 3, где a — некоторое постоянное число, связаны равенством: $M(Y) = M(X) - a$.

Таблица 3

Y	$x_1 - a$	$x_2 - a$...	$x_k - a$...
P	P_1	P_2	...	P_k	...

6. Математические ожидания случайных величин X и Z , заданных, соответственно, табл. 1 и 4, где b — некоторое постоянное число, связаны равенством:

$$M(Z) = b \cdot M(X).$$

Таблица 4

Z	$x_1 \cdot b$	$x_2 \cdot b$...	$x_k \cdot b$...
P	P_1	P_2	...	P_k	...

7. Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$M(X) = n \cdot p.$$

Определение 5. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

О п р е д е л е н и е 6. Средним квадратическим отклонением случай-
ной величины X называют квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

З а м е ч а н и е 2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение яв-
ляются числовыми характеристиками, служащими мерами рассеяния воз-
можных значений случайной величины X вокруг ее математического ожи-
дания.

С в о й с т в а дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где C – постоянная величина;
 $D(X) > 0$, если X – случайная величина;
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где C – постоянная величина;

3. $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$, если случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n взаимно независимы;

4. $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$;

5. Для дискретной случайной величины X , заданной табл. 1, справедливо равенство:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - (M(X))^2.$$

Для дискретной случайной величины X , заданной табл. 2, справедливо равенство:

$$D(X) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - (M(X))^2;$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - (M(X))^2;$$

6. Дисперсии случайных величин X и Y , заданных, соответственно, табл. 1 и 3, связаны равенством:

$$D(Y) = D(X);$$

7. Дисперсии случайных величин X и Z , заданных, соответственно, табл. 1 и 4, связаны равенством:

$$D(Z) = b^2 \cdot D(X);$$

8. Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятность появления и вероятность не появления события в одном испытании:

$$D(X) = np(1 - p).$$

Задача 1. Производятся последовательные независимые испытания трех приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,9.

- а) Найдите закон распределения случайной величины X — числа испытанных приборов.
- б) Найдите функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.
- в) Вычислите $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. а) Возможными значениями числа испытанных приборов будут: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Найдем их вероятности.

1) Событие $X = 1$ означает, что испытан только один прибор, оказавшийся ненадежным. Поэтому $P(X = 1) = 0,1$.

2) Событие $X = 2$ означает, что испытано два прибора, причем первый оказался надежным, а второй – ненадежным. Рассматривается совмещение (произведение) этих двух независимых событий. Поэтому

$$P(X = 2) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09.$$

3) Событие $X = 3$ означает совмещение трех событий: первый прибор надежный, второй – надежный, а третий – любой (их всего три). Поэтому

$$P(X = 3) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 1 = 0,81.$$

Следовательно, закон распределения случайной величины X задается табл. 5.

Т а б л и ц а 5

Следовательно, закон распределения случайной величины X задается табл. 5.

Таблица 5

X	1	2	3
p	0,1	0,09	0,81

Контролем правильности данного закона является проверка равенства единице суммы всех вероятностей:

$$0,1+0,09+0,81=1.$$

б) Найдем функцию $F(x) = P(X < x)$, используя тот факт, что вероятность попадания дискретной случайной величины в некоторый промежу-

ток определяется как сумма вероятностей тех значений, которые находятся в этом промежутке. Поэтому, учитывая табл. 5, находим:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ 0,1, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 0,19, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Пояснения

$P(X < x) = 0$ при $x \leq 1$, так как в промежутке $(-\infty; x)$ нет ни одного значения данной случайной величины;

$P(X < x) = P(X = 1) = 0,1$ при $1 < x \leq 2$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадает только одно значение: $x_1 = 1$;

$P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,09 = 0,19$ при $2 < x \leq 3$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают два значения: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$;

$P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,1 + 0,09 + 0,81 = 1,0$ при $x > 3$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают все возможные значения: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$.

График функции $F(x)$ изображен на рис. 3.

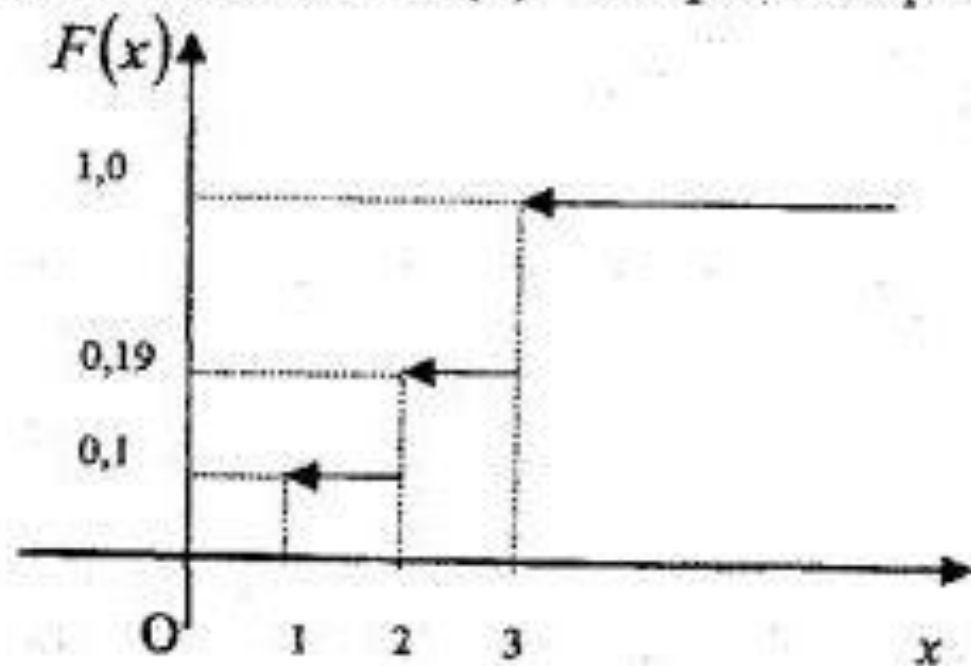


Рис. 3

в) Пользуясь табл. 5 и формулами

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k, \quad D(X) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - (M(X))^2,$$

вычислим $M(X)$ и $D(X)$.

$$M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0,81 = 2,71;$$

$$D(X) = 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,09 + 3^2 \cdot 0,81 - (2,71)^2 = 0,41.$$

Ответ: а) табл. 5; б) рис. 3; в) $M(X) = 2,71$; $D(X) = 0,41$.

Задача 2. В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали.

- Найдите закон распределения случайной величины X — числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.
- Назовите закон распределения.
- Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. а) Среди четырех отобранных деталей нестандартных может быть либо ни одной, либо одна, две, три или четыре.

Для подсчета вероятностей этих возможных значений величины X воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(X = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

По условию $n = 4$ и $p = \frac{1}{10}$, откуда $q = 1 - p = \frac{9}{10}$.

Тогда получаем:

$$P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0,6561;$$

$$P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0,2916;$$

$$P(X = 2) = P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0,0486;$$

$$P(X = 3) = P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^1 = 0,0036;$$

$$P(X = 4) = P_4(4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^0 = 0,0001.$$

К о н т р о л ь:

$$\sum_{i=1}^4 p_i = 0,6561 + 0,2916 + 0,0486 + 0,0036 + 0,0001 = 1.$$

Следовательно, закон распределения вероятностей величины X принимает вид (табл. 6):

Т а б л и ц а 6

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

б) Так как вероятности рассчитывались по формуле Бернулли, то случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения.

в) Тогда $M(X) = np = 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{5} = 0,4;$

$$D(X) = npq = 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0,36.$$

О т в е т: а) табл. 6;

б) биномиальный закон;

в) $M(X) = 0,4; D(X) = 0,36.$

Задача 3. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Число поврежденных изделий – случайная величина. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено

а) ровно три изделия;

б) менее трех;

в) не менее трех;

г) хотя бы одно изделие.

• **Решение.** Пусть X – число поврежденных изделий из 500 отправленных. Число $n = 500$ велико, а вероятность повреждения одного изделия

$p = 0,002$ очень мала. Поэтому вероятность $P_{500}(X = m)$ будем вычислять по формуле Пуассона. Значит, X подчинена закону Пуассона.

По условию $n = 500$, $p = 0,002$, $\lambda = np = 500 \cdot 0,002 = 1$.

а) Найдем вероятность того, что $X = 3$ (то есть в пути будет повреждено три изделия):

$$P_{500}(X = 3) = \frac{e^{-1} \cdot 1^3}{3!} = \frac{1}{6e} = 0,0613.$$

б) Событие «повреждено менее трех изделий» предполагает сумму событий $X = 0$; $X = 1$; $X = 2$.

Поэтому

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = \frac{5}{2} e^{-1} = 0,9197.$$

в) Событие «повреждено не менее трех изделий» является противоположным событию «повреждено менее трех изделий», то есть сумме событий: $X = 0$; $X = 1$; $X = 2$.

Поэтому

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = \\ = 1 - 0,9197 = 0,0803.$$

г) Событие «повреждено хотя бы одно изделие» является противоположным событию «не повреждено ни одного изделия».

Поэтому

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} = 1 - \frac{1}{e} = 1 - 0,368 = 0,632.$$

О т в е т: а) 0,0613; б) 0,9197;

в) 0,0803; г) 0,632.

§ 5. НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

О п р е д е л е н и е 1. Случайная величина X называется непрерывной, если ее значения заполняют конечный или бесконечный промежуток $(a_1; a_2)$ числовой оси.

Каждому промежутку (a, b) из области значений непрерывной случайной величины X отвечает определенная вероятность $P(a < X < b)$ того, что значения, принятые случайной величиной, попадают в этот промежуток.

О п р е д е л е н и е 2. Соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется законом распределения случайной величины.

О п р е д е л е н и е 3. Функцией распределения (или интегральной функцией распределения) случайной величины X называется функция $F(x)$, равная при каждом $x \in R$ вероятности того, что X в результате испытания примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in R.$$

С в о й с т в а функции распределения:

- 1) значения функции распределения принадлежат отрезку $[0; 1]$;
- 2) $F(x)$ – неубывающая функция, то есть $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;
- 3) вероятность попадания случайной величины X в один из промежутков $(a; b)$, $[a; b)$, $(a, b]$ или $[a; b]$ равна разности значений функции $F(x)$ в точках b и a :

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a);$$

- 4) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна 0;
- 5) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$;
- 6) если X — непрерывная случайная величина, то функция $F(x)$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$.

2. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

О п р е д е л е н и е 4. Плотностью распределения вероятностей (или дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$, задаваемая равенством: $f(x) = F'(x), x \in R$.

О п р е д е л е н и е 5. График функции $f(x)$ называется кривой распределения величины X .

Свойства

функции плотности распределения вероятностей:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R;$

2) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx;$

3) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx;$

4) геометрически вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(a; b)$ равна площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью O и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 1);

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ (условие нормировки);

б) Если все значения случайной величины X заключены в промежутке $(a_1; a_2)$, то $\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx = 1$.

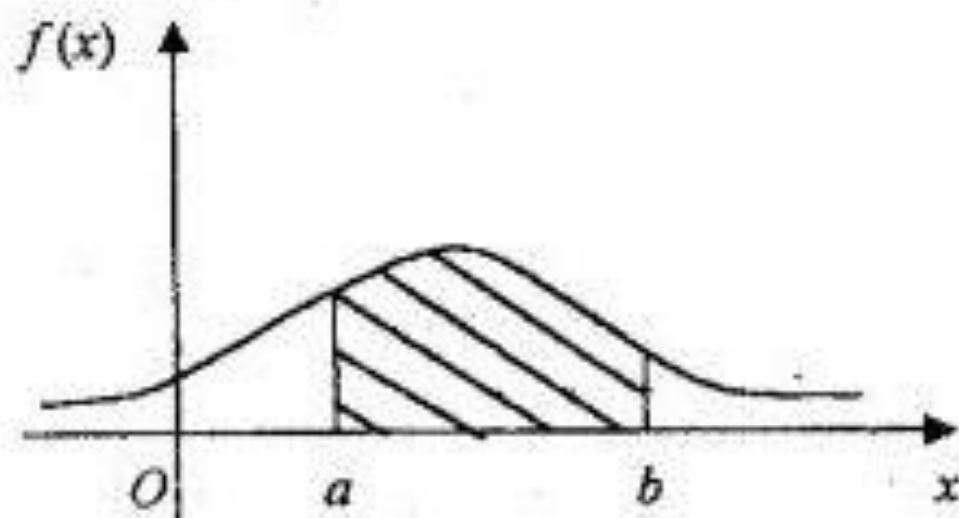


Рис. 1

З а м е ч а н и е 1. Название закона распределения непрерывной случайной величины зависит от вида функции $f(x)$ (или $F(x)$).

Например, непрерывная случайная величина имеет

1) равномерное распределение (рис. 2),

если $f(x) = c = const$ для $x \in [a; b]$ и $f(x) = 0$ вне $[a; b]$;

Например, непрерывная случайная величина имеет

1) равномерное распределение (рис. 2),

если $f(x) = c = const$ для $x \in [a; b]$ и $f(x) = 0$ вне $[a; b]$;

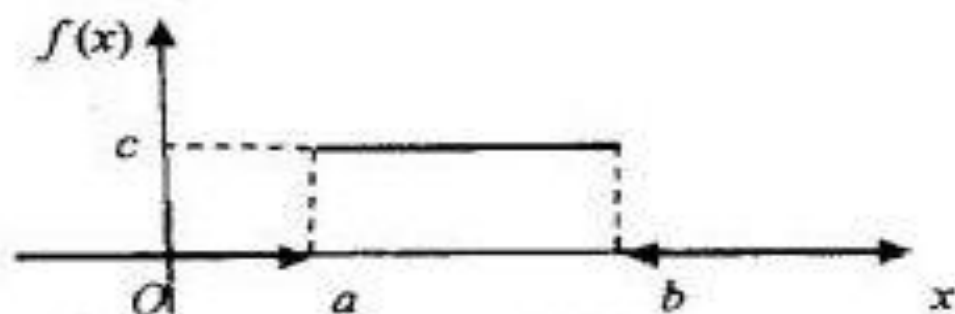


Рис. 2

2) нормальное распределение (рис. 3),

если $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ для $x \in R$.

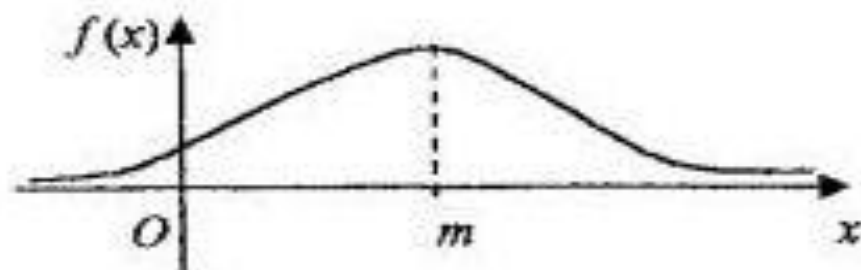


Рис. 3

3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

О п р е д е л е н и е 6. Математическим ожиданием $M(X)$ непрерывной случайной величины X называется число, вычисляемое по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

при условии, что этот интеграл сходится.

С в о й с т в а математического ожидания:

1. $M(C) = C$, где C — постоянная величина;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$, где C — постоянная величина;
3. $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$.

О п р е д е л е н и е 7. Дисперсией $D(X)$ непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания, то есть

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

С в о й с т в а дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где C — постоянная величина;
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где C — постоянная величина;
3. $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$;
4. Дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx$$

ИЛИ

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2.$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где C – постоянная величина;
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где C – постоянная величина;
3. $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$;
4. Дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx$$

ИЛИ

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2.$$

Определение 8. Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины X называется число, вычисляемое по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Замечание 2. Числа $D(X)$, $\sigma(X)$ характеризуют степень разброса значений случайной величины X около ее математического ожидания.

4. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{если } -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Решение. Используя формулу

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a),$$

находим:

$$\begin{aligned} P\left(0 < X < \frac{1}{3}\right) &= F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача 2. Случайная величина X задана функцией плотности (дифференциальной функцией):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty; 1) \\ cx, & \text{если } x \in [1; 3], \\ 0, & \text{если } x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

- Найдите:
- а) параметр c ;
 - б) $F(x)$ и постройте ее график;
 - в) $P(2 < X < 5)$;
 - г) $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. а) Функция $f(x)$ обладает свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Поэтому, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^3 cx dx + \int_3^{+\infty} 0 dx = \frac{cx^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{c(9-1)}{2} = 4c,$$

то $4c = 1$. Следовательно, $c = 1/4$.

$$\text{Значит, } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty; 1) \\ \frac{1}{4}x, & \text{если } x \in [1; 3], \\ 0, & \text{если } x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

б) Известно, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Поэтому,

если $x \leq 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0;$$

если $1 < x \leq 3$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^x \frac{1}{4} x dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^x = \frac{1}{8} (x^2 - 1);$$

если $x > 3$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^3 \frac{1}{4} x dx + \int_3^x 0 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{1}{8} (9 - 1) = 1.$$

Итак, получили:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{1}{8} (x^2 - 1), & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1), & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 4.

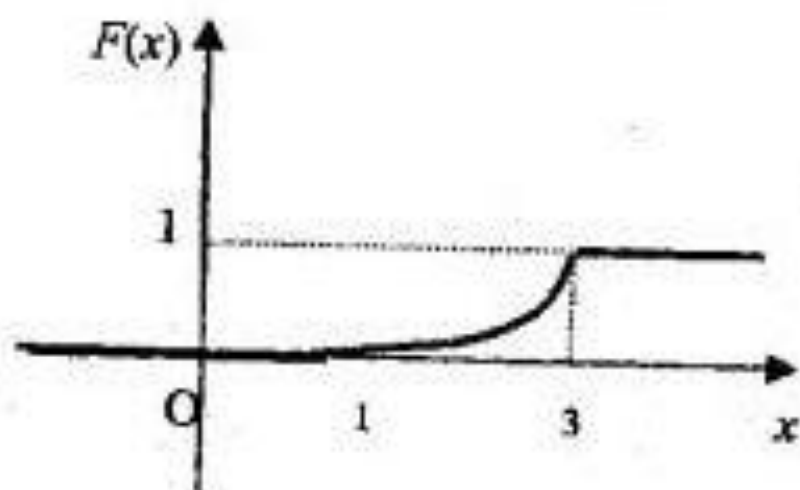


Рис. 4

$$в) P(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - \frac{1}{8} \cdot (2^2 - 1) = \frac{5}{8}.$$

Эту же вероятность можно вычислить другим способом, используя функцию $f(x)$:

$$\begin{aligned} P(2 < X < 5) &= \int_2^5 f(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{4} x dx + \int_3^5 0 dx = \\ &= \frac{1}{8} x^2 \Big|_2^3 + 0 = \frac{1}{8} \cdot (9 - 4) = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{r) } M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^1 x \cdot 0 dx + \int_1^3 x \cdot \frac{1}{4} x dx + \int_3^{+\infty} x \cdot 0 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_1^3 = \frac{1}{12} \cdot (27 - 1) = \frac{13}{6}; \end{aligned}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (M(X))^2 = \frac{1}{4} \int_1^3 x^3 dx - \left(\frac{13}{6}\right)^2 =$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (M(X))^2 = \frac{1}{4} \int_1^3 x^3 dx - \left(\frac{13}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^4}{16} \Big|_1^3 - \frac{169}{36} = \frac{81-1}{16} - \frac{169}{36} = 5 - \frac{169}{36} = \frac{180-169}{36} = \frac{11}{36}$$

Ответ: а) $c = \frac{1}{4}$;

$$б) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty; 1], \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1), & \text{если } x \in (1; 3], \\ 1, & \text{если } x \in (3; +\infty), \text{ см. рис. 2;} \end{cases}$$

в) $P(2 < X < 5) = \frac{5}{8}$;

г) $M(X) = \frac{13}{6}$; $D(X) = \frac{11}{36}$.

Задача 3. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате четырех испытаний величина X три раза примет значение, принадлежащее промежутку $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ при одном испытании по формуле:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

В данном случае получим:

В данном случае получим:

$$p = P\left(0 < X < \frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \sin \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Далее, используя формулу Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

вычислим вероятность того, что при четырех испытаниях ($n = 4$) случайная величина X три раза ($m = 3$) попадет в промежуток $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$. Причем при каждом испытании вероятность попасть в интервал $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ остается равной $p = \frac{1}{2}$.

Тогда вероятность не попасть в этот интервал вычисляется по формуле:

В данном случае получим:

$$p = P\left(0 < X < \frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \sin \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Далее, используя формулу Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

вычислим вероятность того, что при четырех испытаниях ($n = 4$) случайная величина X три раза ($m = 3$) попадет в промежуток $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$. Причем при каждом испытании вероятность попасть в интервал $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ остается равной $p = \frac{1}{2}$.

Тогда вероятность не попасть в этот интервал вычисляется по формуле:

$$q = 1 - p = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, получаем:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = C_4^1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Отвст: $\frac{1}{4}$.

§ 6. НЕКОТОРЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

О п р е д е л е н и е 1. Равномерным называется распределение таких непрерывных случайных величин, все значения которых лежат на некотором интервале $(a; b)$ и плотность распределения вероятностей задается формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b, \\ 0 & \text{при } x > b \end{cases}$$

График функции $f(x)$ изображен на рис. 1.

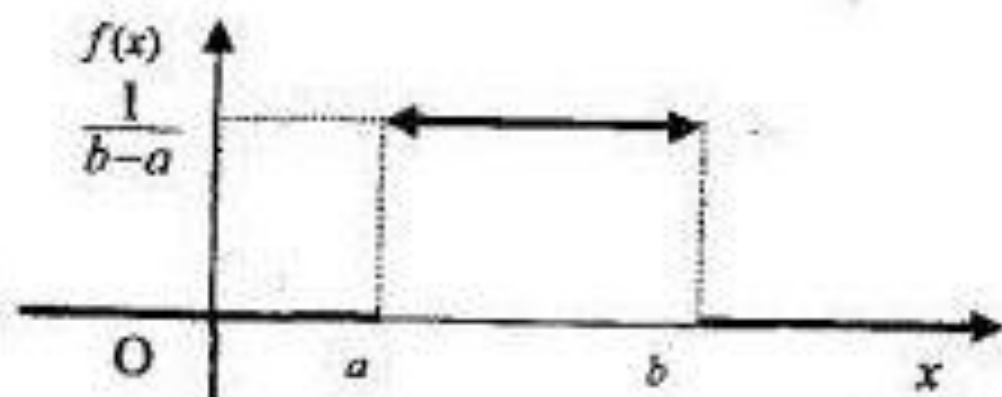


Рис. 1

Функция распределения вероятностей таких случайных величин задается формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 2.

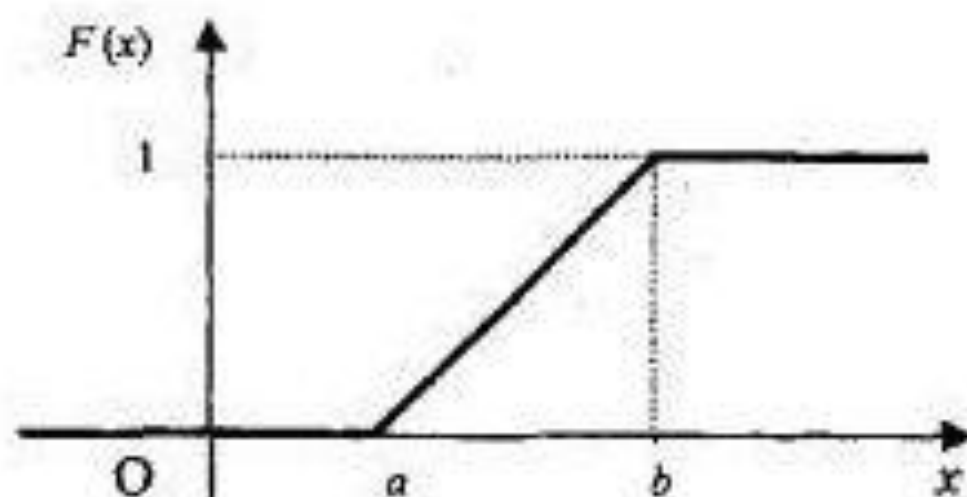


Рис. 2

Числовые характеристики непрерывной случайной величины X , равномерно распределенной в интервале (a, b) , вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания величины X в промежуток $(a_1; a_2)$, где $(a_1; a_2) \subset (a, b)$, вычисляется по формуле:

$$P(a_1 < X < a_2) = \frac{a_2 - a_1}{b - a}.$$

2. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

О п р е д е л е н и е 2. Показательным (или экспоненциальным) называется распределение таких непрерывных случайных величин, у которых функция плотности распределения вероятностей задается формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где λ – некоторое постоянное положительное число (см. рис. 3).

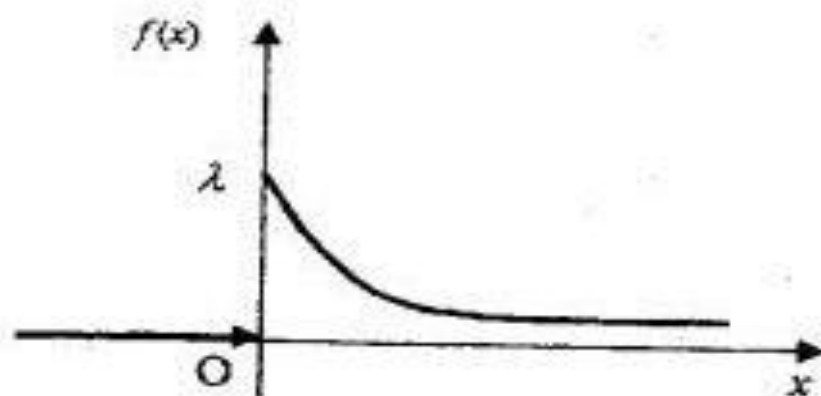


Рис. 3

Функция распределения $F(x)$ таких случайных величин задается формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

(см. рис. 4).

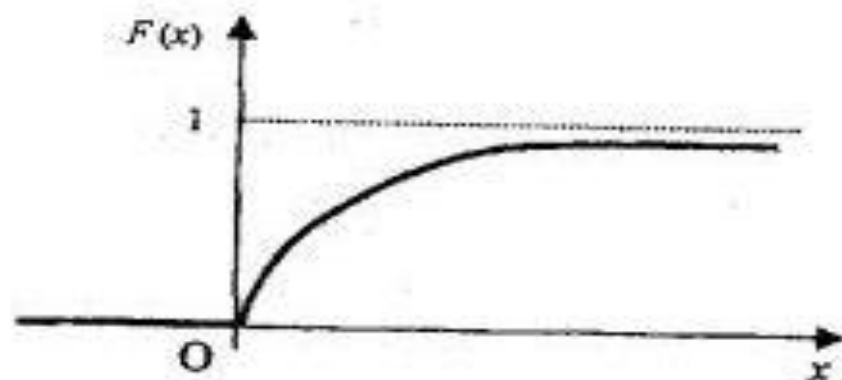


Рис. 4

Для непрерывной случайной величины X , имеющей показательное распределение вероятностей, числовые характеристики вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Вероятность попадания величины X в интервал $(a; b)$ вычисляется по формуле:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

3. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение 3. *Нормальным* называется распределение вероятностей тех непрерывных случайных величин, у которых плотность распределения задается формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где $m, \sigma > 0$ – некоторые числа.

График функции $f(x)$ изображен на рис. 5.

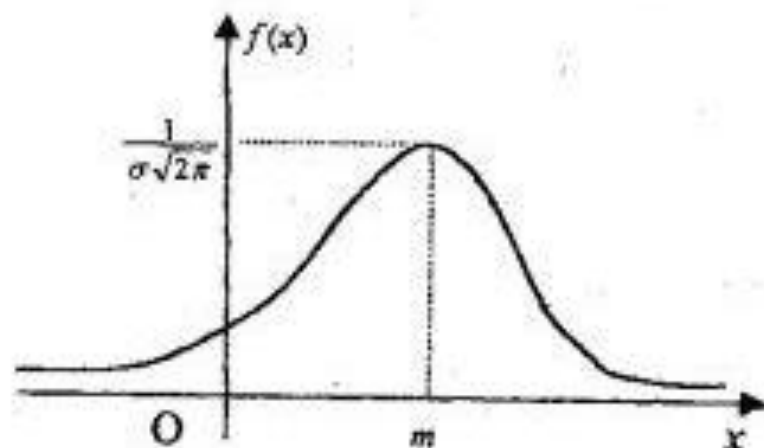


Рис. 5

В случае нормального закона распределения функция распределения вероятностей вычисляется по формуле:

В случае нормального закона распределения функция распределения вероятностей вычисляется по формуле:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа (или интеграл вероятностей, или функция ошибок).

З а м е ч а н и е. Функция $\Phi(x)$ является нечетной. Таблица 2 ее значений при $x > 0$ дана в приложении. Для $x > 5$ можно считать $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}$. График функции $\Phi(x)$ изображен на рис. 6.

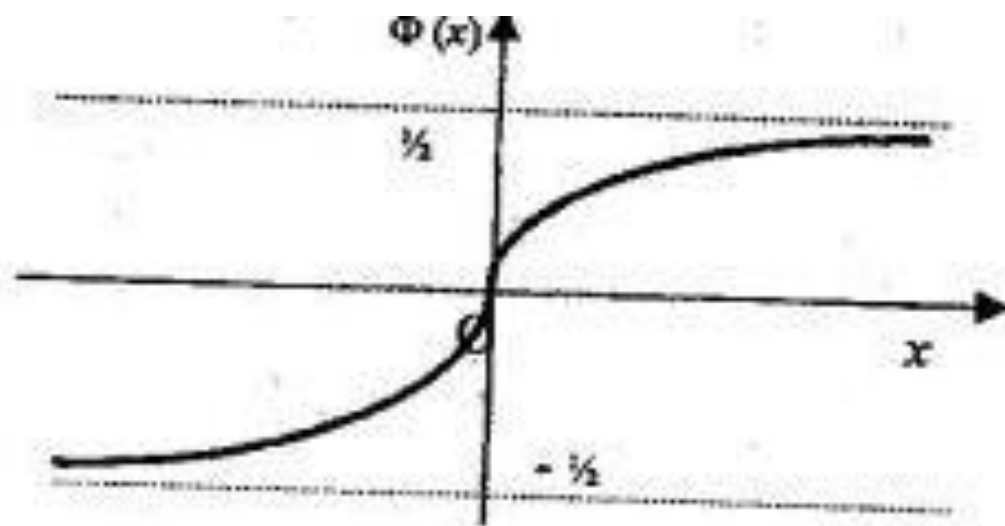


Рис. 6

Числовые характеристики случайной величины X , заданной нормальным законом распределения, вычисляются по формулам:

$$M(X) = m, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Числовые характеристики случайной величины X , заданной нормальным законом распределения, вычисляются по формулам:

$$M(X) = m, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(a; b)$, вычисляется по формуле:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от ее математического ожидания m меньше положительного числа δ , вычисляется по формуле:

$$P(|X - m| < \delta) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Задача 1. Все значения равномерно распределенной случайной величины X лежат на отрезке $[2; 8]$.

Найдите:

а) $f(x)$; б) $F(x)$; в) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; г) $P(3 < X < 5)$

Решение. Воспользовавшись формулами из п.1 при $a=2$ и $b=8$, находим:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2, \\ \frac{1}{6} & \text{при } 2 \leq x \leq 8, \\ 0 & \text{при } x > 8; \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{б) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{x-2}{6} & \text{при } 2 < x \leq 8, \\ 1 & \text{при } x > 8; \end{cases} \quad (2)$$

$$6) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{x-2}{6} & \text{при } 2 < x \leq 8, \\ 1 & \text{при } x > 8; \end{cases} \quad (2)$$

$$в) M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{2+8}{2} = 5,$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(8-2)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3, \quad \sigma(X) = \sqrt{3};$$

$$г) P(3 < X < 5) = F(5) - F(3) = \frac{5-2}{6} - \frac{3-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: а) формула (1); б) формула (2);

$$в) M(X) = 5, \quad D(X) = 3, \quad \sigma(X) = \sqrt{3};$$

$$г) \frac{1}{3}.$$

Задача 2. Цена деления шкалы амперметра равна $0,1\text{ А}$. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при вычислении будет сделана ошибка, превышающая $0,02\text{ А}$.

Решение. Ошибку округления вычисления можно рассматривать как случайную величину X , которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями шкалы.