

**Теория вероятностей и
математическая статистика
«Многомерные распределения
вероятностей»**

**Тюрнева Т.Г.,
доцент ИМЭИ ИГУ**

Определения

- Упорядоченный набор (X_1, X_2, \dots, X_n) случайных величин X_i ($i=1, n$), заданных на одном и том же ПЭС, называется ***n – мерной случайной величиной или системой n случайных величин.***
- Одномерные случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n называются
- ***компонентами или составляющими***
 n – мерной случайной величины (X_1, X_2, \dots, X_n) .
- Упорядоченная пара (X, Y) двух случайных величин X и Y называется ***двумерной случайной*** величиной или ***системой двух одномерных*** случайных величин X и Y .

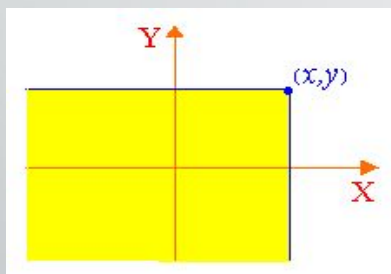
Общий план исследования двумерного распределения вероятностей

1. Составить закон распределения вероятностей (X, Y) .
2. Найти законы распределения и числовые характеристики случайных величин X и Y .
3. Установить зависимы или независимы с.в. X и Y .
4. Составить ковариационную и корреляционную матрицы.
5. Описать регрессии величины X на Y и величины Y на X .
6. Построить наилучшие в среднем квадратическом оценки величины X по Y и величины Y по X .

Проверить формулу полного математического ожидания. 3

Функция распределения. Свойства функции распределения

Функцией распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x, Y < y$: $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$.



1. Функция распределения – величина неотрицательная, не превышающая единицы:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1$$

2. Функция распределения есть неубывающая функция по каждому аргументу.

3. Если хотя бы один из аргументов стремится к $-\infty$, то функция распределения стремится к нулю:

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$$

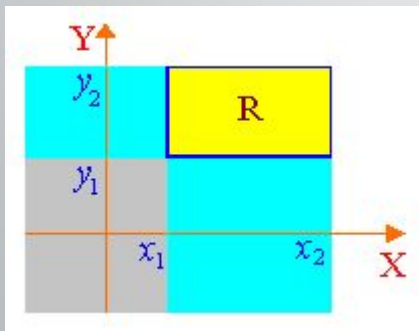
Функция распределения. Свойства функции распределения

4. Если оба аргумента стремятся к $+\infty$, то функция распределения стремится к единице: $F(+\infty, +\infty) = 1$

5. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, то функция распределения $F(x, y)$ становится функцией распределения, соответствующей другому аргументу: $F(x, +\infty) = F_1(x) = P(X < x)$ $F(+\infty, y) = F_2(y) = P(Y < y)$

6. Вероятность попадания случайной величины $\{X, Y\}$ в прямоугольник со сторонами $R = (x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2)$:

$$P(\{X, Y\} \in R) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$



- Двумерная случайная величина (X, Y) называется **дискретной**, если каждая из случайных величин X и Y является дискретной.
- Если дискретная величина X может принимать только значения x_1, \dots, x_n , а случайная величина Y – значения y_1, \dots, y_m , то двумерный случайный вектор (X, Y) может принимать только пары значений (x_i, y_j) .
- Закон распределения системы двух ДСВ описывается **матрицей распределения**, т.е. прямоугольной таблицей, в которой записаны все вероятности p_{ij} того, что двумерная ДСВ примет значение (x_i, y_j) .

$$\sum \sum p_{ij} = 1.$$

- Зная матрицу распределения системы двух ДСВ легко найти законы распределения отдельных случайных величин, входящих в систему:

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}$$

□ Двумерная случайная величина $\{X, Y\}$ называется **непрерывной**, если каждая из случайных величин X и Y является непрерывной. Система двух НСВ обычно описывается **плотностью распределения**:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Свойства плотности распределения $f(x, y)$: $f(x, y) \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Дискретные двумерные распределения вероятностей

Задача

Дважды бросается игральная кость.

Случайные величины:

X – число появлений шестерки,

Y – число появлений нечетной цифры.

1. Составить закон распределения вероятностей (X, Y) :
таблица распределения;
функция распределения.
2. Найти законы распределения и числовые характеристики случайных величин X и Y .

$y_j \backslash x_i$	0	1	2	$P(Y = y_j)$
0				
1			0	
2		0	0	
$P(X = x_i)$				1

Установить зависимы или независимы с.в. X и Y

- События A и B называются независимыми, если

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

- Случайные величины X и Y называются **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая.
- Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Установить зависимы или независимы с.в. X и Y

Пусть X и Y

дискретные случайные величины

Пусть X и Y

непрерывные случайные величины

- Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых значений x_i и y_j выполнено $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$.

- Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Ковариация и коэффициент корреляции

- Ковариацией (смешанный второй центральный момент, корреляционный момент) случайных величин X и Y называют число
- $\text{cov}(X, Y) = M((X - MX) \cdot (Y - MY))$
- $\text{cov}(X, Y) = MXY - MX \cdot MY$.

$$MXY = MX \cdot MY + \text{cov}(X, Y)$$

$$D(X + Y) = DX + DY + 2\text{cov}(X, Y)$$

Свойства ковариации

1. Ковариация не меняется при перестановке случайных величин:

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X).$$

2. Если $C = \text{const}$, то $\text{cov}(X, C) = 0$.

3. Если случайные величины X и Y независимы, то

$$\text{cov}(X, Y) = 0.$$

4. $\text{cov}(X, X) = DX$, $\text{cov}(Y, Y) = DY$.

5. Ковариация линейна по каждому из своих аргументов:

$$\text{cov}(C_1X_1 + C_2X_2, Y) = C_1\text{cov}(X_1, Y) + C_2\text{cov}(X_2, Y),$$

где $C_1, C_2 = \text{const}$.

6. $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY}$

Коэффициент корреляции

- Коэффициентом корреляции величин X и Y называют отношение ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Коэффициент корреляции—безразмерная величина, причем $|\rho_{XY}| \leq 1$.
- Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты **линейной связи**
- между X и Y :

чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к единице, тем связь сильнее;

чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к нулю, тем связь слабее.

- Коэффициент корреляции равен 1 тогда и только тогда, когда случайные величины линейно связаны.

Коэффициент корреляции

- Если коэффициент корреляции равен нулю, то величины называют **некоррелированными**.
- Из независимости двух величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя сделать вывод о независимости этих величин.
- Для некоторых распределений понятия независимости и некоррелированности являются эквивалентными.
- В частности, если случайные величины X и Y имеют **нормальное распределение** и $\rho_{XY} = 0$, то они независимы.

Ковариационная и корреляционная матрицы

- $$\begin{pmatrix} DX & cov(X, Y) \\ cov(X, Y) & DY \end{pmatrix}$$

-

- $$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Регрессии величины X на Y и величины Y на X

- Условное математическое ожидание случайной величины Y при условии, что X приняла одно из своих возможных значений;
- Функция регрессии величины Y на X ;
- Условное математическое ожидание случайной величины Y при условии X - случайная величина;
- Наилучшая в среднем квадратическом оценка величины Y по величине X ;
- Формула полного математического ожидания.

Условное распределение

- Условная вероятность: $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

- Условное распределение: с.в. Y

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)}.$$

- Условное математическое ожидание случайной величины Y при условии, что X приняла одно из своих возможных значений x_i , называется действительное число $\tilde{x}_i = M(Y/X = x_i) = \sum y_j P(Y = y_j / X = x_i)$,

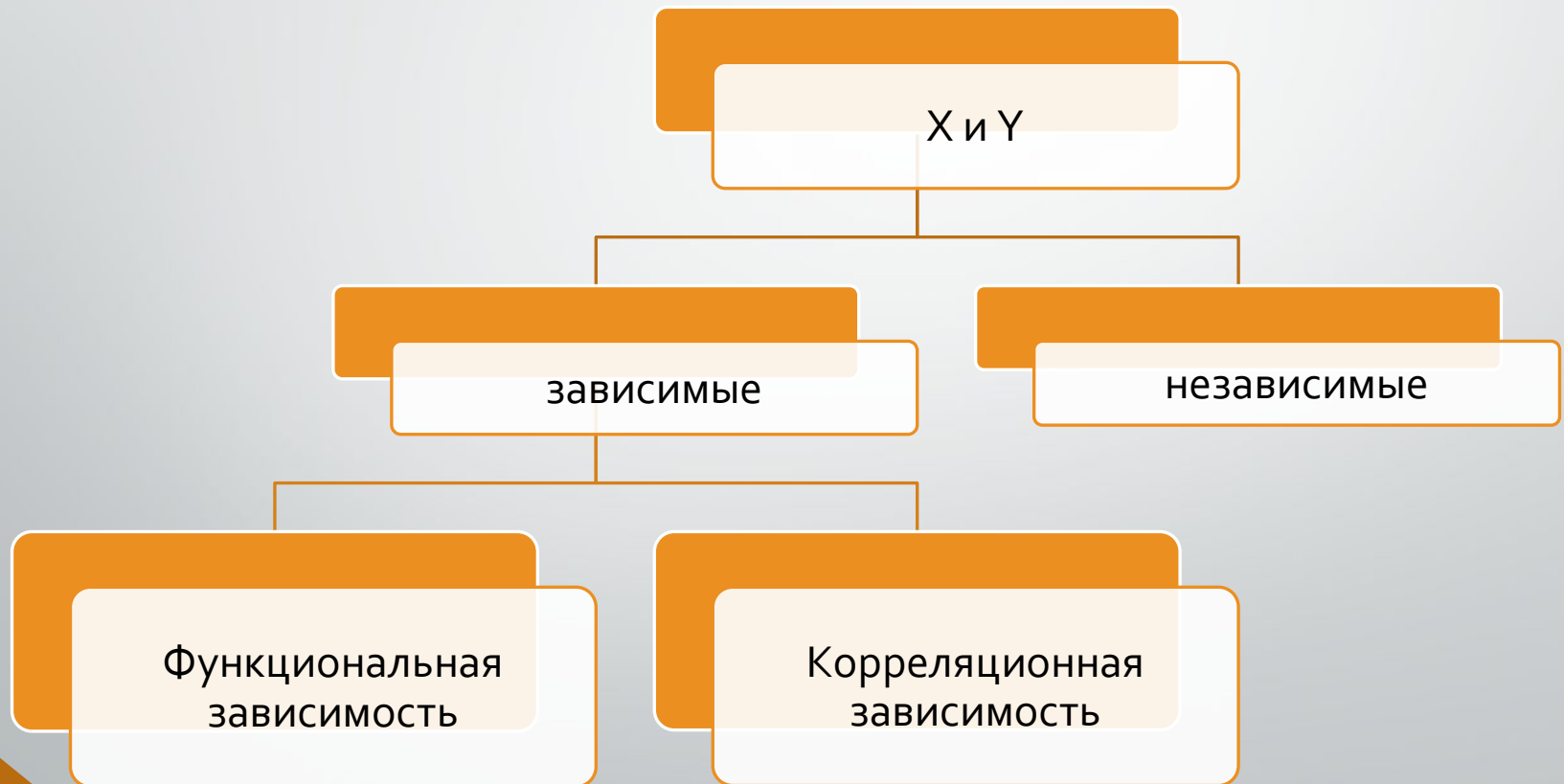
$$i = 0, 1, 2.$$

Функция регрессии

- Условным математическим ожиданием случайной величины Y при условии X называется **случайная величина** \tilde{X} , обозначаемая также $M(Y/X)$, возможные значения которой $\tilde{x}_i = M(Y/X = x_i)$, а соответствующие вероятности равны $P(\tilde{X} = \tilde{x}_i) = P(X = x_i), i = 0, 1, 2$.
- Функция $M(Y/X = x) = \psi(x)$, заданная на множестве значений случайной величины X называется *регрессией* величины Y на X .

!!! Характеризует изменение среднего значения с.в. Y при изменении значений с.в. X .

Наилучшая в среднем квадратическом оценка величины Y по величине X



Корреляционная
зависимость

Линейная

нелинейная

Y

$$g(X) = aX + b$$

$g(X)$ – среднеквадратическая регрессия Y на X

$$g(X) = m_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - m_x)$$

Формула полного математического ожидания

$$\tilde{x}_i = M(Y/X = x_i)$$

$$P(\tilde{X} = \tilde{x}_i) = P(X = x_i), i = 0, 1, 2$$

$$M(M(Y/X)) = M(Y)$$

случайная величина

Непрерывные двумерные распределения вероятностей

Задача

- Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью
- совместного распределения на D

- $$f(x, y) = \begin{cases} Cxy, & \text{при } (x, y) \in D \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin D \end{cases} \quad D: y < -x, y < 2, x < 0$$

Двумерное нормальное распределение вероятностей

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}$$

r - коэффициент корреляции случайных величин X и Y

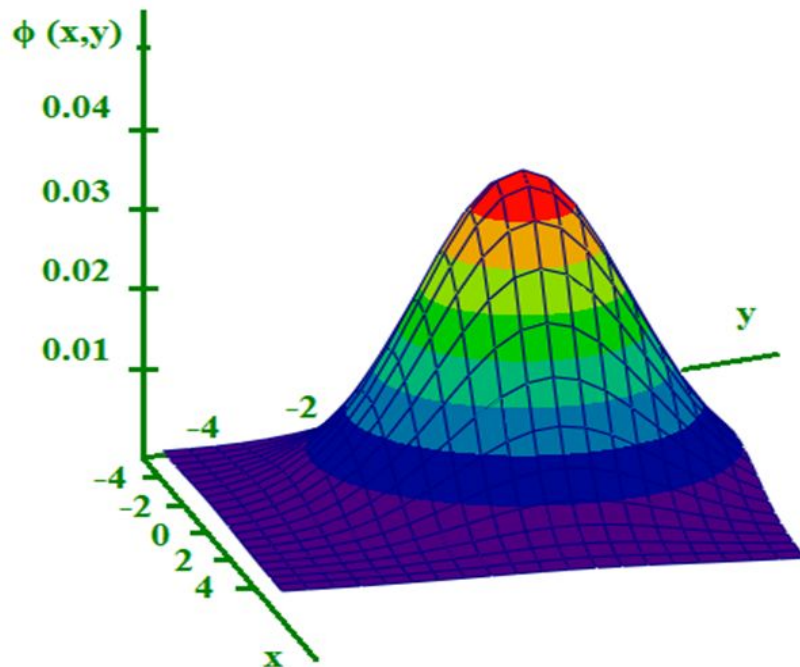
σ_x - среднее квадратическое отклонение случайной величины X

σ_y - среднее квадратическое отклонение случайной величины Y

m_x - математическое ожидание случайной величины X

m_y - математическое ожидание случайной величины Y

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$



$$\begin{aligned} r &= 0 \\ \sigma_x &= 2 \\ \sigma_y &= 2 \\ m_x &= -1 \\ m_y &= 1 \end{aligned}$$

Домашняя контрольная работа

Тема: *Многомерные случайные величины.*

1. Монету бросают три раза, отмечая результат каждого бросания знаком плюс или знаком минус в зависимости от того, что выпало – герб или решка соответственно. Пусть X – число выпавших гербов, а Y – число перемен знака в образовавшейся последовательности плюсов и минусов.
 1. Записать з.р. случайного вектора (X, Y) .
 2. Записать з.р. X и з.р. Y . Найти их числовые характеристики.
 3. Определить зависимые или независимые величины X и Y .
 4. Составить ковариационную и корреляционную матрицы случайного вектора (X, Y) .
 5. Найти условные распределения и записать функции регрессии.
2. Для случайного вектора (X, Y) с ковариационной матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Вычислите:

$D(X+Y)$; $D(X-Y)$; $D(2X+3Y-2)$.

3. Заданы следующие характеристики двумерного НОРМАЛЬНОГО вектора: $MX=-2$, $MY=3$ и ковариационная матрица

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{bmatrix}$$

Записать выражение для плотности распределения вероятностей $f(x,y)$.

Написать уравнение регрессии Y на X .