

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Институт информационных технологий, математики и механики

Системы принятия решений

Vladimir Grishagin



Определения

Пусть $\varphi(y)$ является вещественной функцией, определенной в области Q мерного евклидова пространства R^N и принимающая конечные значения в каждой точке множества Q .

Обозначим через

$$\inf_{y \in Q} \varphi(y) = \inf \{ \varphi(y) : y \in Q \} \quad (1.1)$$

точную нижнюю грань функции $\varphi(y)$ в области Q .

Определение 1.1. Если существует точка $y^* \in Q$ такая, что

$$\varphi(y^*) = \inf \{ \varphi(y) : y \in Q \} \quad (1.2)$$

тогда $\varphi(y)$ достигает своей точной нижней грани в области Q , а y^* называется *точкой глобального (абсолютного) минимума* или *глобальным минимайзером*.

Значение $\varphi^* = \varphi(y^*)$ называется *наименьшим значением* или *значением глобального оптимума (минимума)* функции φ в Q и обозначается как

$$\min_{y \in Q} \varphi(y) = \min \{ \varphi(y) : y \in Q \} \quad (1.3)$$

Определения

Обозначим множество всех точек $y^* \in Q$, удовлетворяющих (1.2) как

$$Q^* = \underset{y \in Q}{\text{Arg min}} \varphi(y) \equiv \text{Arg min} \{ \varphi(y) : y \in Q \} \quad (1.4)$$

Определение 1.2. Точка $y' \in Q$ называется *точкой локального минимума функции φ* в области Q , если существует такое число $\epsilon > 0$, что для всех $y \in Q$, удовлетворяющих неравенству $\|y - y'\| < \epsilon$, выполняется условие $\varphi(y') \leq \varphi(y)$.

Определение 1.3. Если функция $\varphi(y)$ в области Q имеет единственный локальный минимум, она называется *униmodalьной*, если несколько – *многоэкстремальной*.

Определение 1.4. Будем называть *задачей оптимизации* задачу следующего вида: найти заданные экстремальные характеристики функции $\varphi(y)$ в области Q .

Постановка задач

ОПТИМИЗАЦИИ

Постановка А. Найти точную нижнюю грань функции $\varphi(y)$

$$\varphi^* = \inf\{\varphi(y) : y \in Q\} \quad (1.5)$$

Постановка В. Найти точную нижнюю грань (1.5) и, если множество точек глобального минимума (1.4) не пусто, найти хотя бы одну точку $y^* \in Q^*$.

Постановка С. Найти точную нижнюю грань из (1.5) и все точки глобального минимума (1.4) (или удостовериться, что множество Q^* пусто).

Постановка D. Найти координаты и значения всех локальных минимумов функции $\varphi(y)$ в области Q .

Постановка Е. Найти локальный минимум функции $\varphi(y)$ в области Q .

Постановка задач

Общую форму задачи оптимизации будем записывать в виде

$$\varphi(y) \rightarrow \inf, y \in Q \quad (1.6)$$

Функция $\varphi(y)$ в (1.6) называется *целевой функцией, минимизируемой функцией, или оптимизируемой функцией*, область Q называется *допустимой областью*, а элементы области Q - *допустимыми точками*.

Если заведомо известно, что целевая функция достигает своей точной нижней грани в допустимой области, задачу оптимизации будем записывать в виде

$$\varphi(y) \rightarrow \min, y \in Q \quad (1.7)$$

Что касается поиска максимума, то достаточно заметить, что

$$\sup\{\varphi(y) : y \in Q\} = -\inf\{-\varphi(y) : y \in Q\},$$

поэтому поиск максимума элементарно сводится к поиску минимума функции $-\varphi(y)$.

Численные методы оптимизации

Сформулировав задачу минимизации, мы теперь должны дать ответ на основной вопрос: каким образом ее решать?

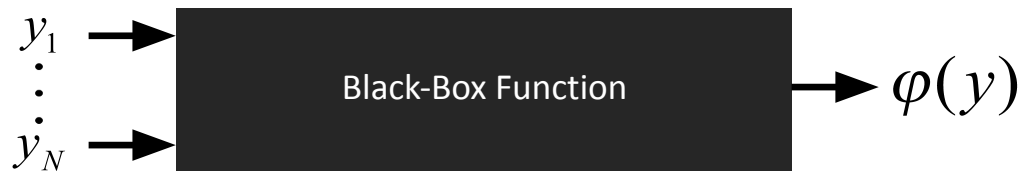
Классический подход математического анализа предлагает следующую процедуру аналитического решения задачи (на примере одномерного случая). Пусть $f(x)$ - кусочно-гладкая на отрезке функция одной переменной. Тогда минимум на этом отрезке может достигаться лишь в тех точках, где $f'(x) = 0$, либо производная разрывна, либо в граничных точках. Остается найти все такие точки и выбрать из них точку с наименьшим значением. Иными словами, чтобы

решить задачу этим способом, требуется:

- а) указание аналитического вида функции;
- б) кусочная гладкость функции;
- в) возможность вычисления производной;
- г) умение решать уравнение $f'(y) = 0$, т.е. задачу поиска корня;
- д) информация о точках разрыва производной или способ определения этих точек.

Численные методы оптимизации

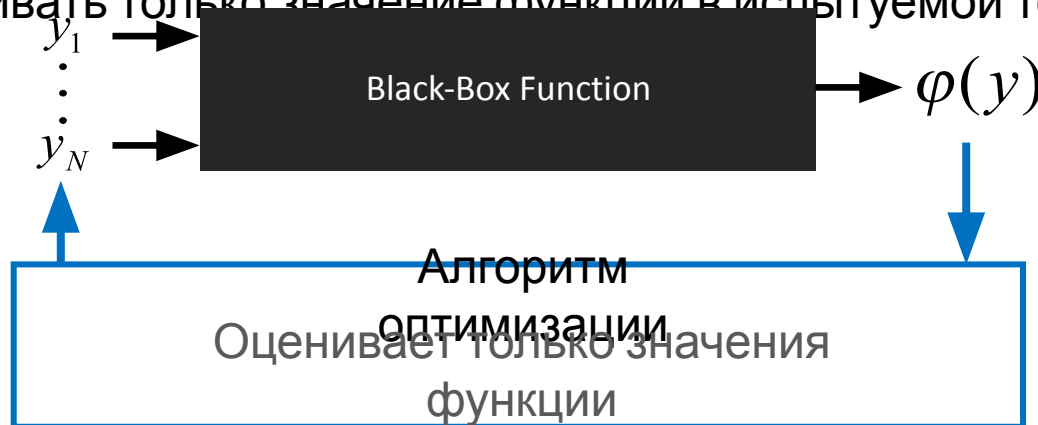
К сожалению, эти требования на практике выполняются в редчайших случаях. Типичный же случай описывается ситуацией, когда функция задается алгоритмически, т.е. в виде некоей расчетной схемы, когда по заданному аргументу y рассчитывается значение $\varphi(y)$.



В этом случае ни о каких аналитических способах исследования говорить не приходится. Заметим, что даже при аналитическом задании функции и способности посчитать производную исходная задача (1.6) сводится к решению задачи поиска корня, которая по сложности сравнима с задачей минимизации.

Численные методы оптимизации

Узкая сфера применения аналитических методов обусловила развитие и широкое распространение *численных методов (алгоритмов)* решения задач оптимизации. Различные формулировки определений численного метода оптимизации даны многими авторами. Общим во всех формулировках является представление метода как некоторой итерационной процедуры, которая осуществляет вычисление в точках области поиска определенных характеристик минимизируемой функции (такими характеристиками могут быть значение функции, ее градиента, матрицы вторых производных и т.п.). Назовем операцию вычисления характеристик функции в точке *поисковым испытанием*, а совокупность значений характеристик в этой точке – *результатом испытания*. Далее в настоящей главе в качестве результата испытания будем рассматривать только значение функции в испытываемой точке.



Модель алгоритма

Если реализация алгоритма осуществляется на однопроцессорной установке, то вычислительная схема алгоритма состоит из последовательно выполняемых операций, а все испытания осуществляются последовательно, т.е. мы имеем чисто последовательный численный метод.

Основываясь на методологии теории исследования операций, дадим формальное определение последовательного алгоритма оптимизации или, более широко, *модели вычислений* при решении задачи (1.6).

Построение модели вычислений предполагает наличие некоторой априорной (доопытной, имеющейся до начала вычислений) информации о решаемой задаче. Данная информация может быть получена исходя из физической сущности задачи, описывающей моделируемый реальный объект. Такими свойствами могут быть непрерывность, гладкость, монотонность, выпуклость и т.п. Имеющаяся информация служит для исследователя основанием для отнесения задачи (в нашем случае функции) к тому или иному множеству (классу). После того, как класс зафиксирован, априорная информация о задаче, используемая исследователем, состоит в том, что ему известна принадлежность задачи к классу.

Модель алгоритма

Следующим важным этапом построения модели вычислений является выбор *алгоритма (метода) решения задачи*. В самом общем виде численный метод решения задачи из класса представляет собой набор (кортеж)

$$s = \langle \{G_k\}, \{E_k\}, \{H_k\} \rangle \quad (1.8)$$

$\{G_k\}$, $k=1,2,\dots$ - функционалы выбора точек испытаний;

$\{E_k\}$, $k=1,2,\dots$ - функционалы построения оценок решения;

$\{H_k\}$, $k=1,2,\dots$ - функционалы правила остановки.

Вычислительная схема алгоритма

1. Выбирается точка первого испытания с номером $k=1$:

$$y^1 = G_1(\Phi) \in Q \quad (1.9)$$

2. Пусть выбрана точка k -го испытания $y^k \in Q$ ($k \geq 1$).

Вычисляем значение $z^k = \varphi(y^k)$

Поисковая (апостериорная) информация о функции φ

$$\omega_k = \{(y^1, z^1), (y^2, z^2), \dots, (y^k, z^k)\} \quad (1.10)$$

Апостериорный класс

$$\Phi(\omega_k) = \{\psi \in \Phi : \psi(y^i) = z^i, 1 \leq i \leq k\} \quad (1.11)$$

Вычислительная схема алгоритма

3. Определяется текущая оценка экстремума (приближенное решение)

$$e^k = E_k(\Phi, \omega_k) \quad (1.12)$$

4. Вычисляется точка очередного испытания

$$y^{k+1} = G_{k+1}(\Phi, \omega_k) \quad (1.13)$$

5. Определяется величина

$$h^k = H_k(\Phi, \omega_k) \in \{0, 1\} \quad (1.14)$$

Если $h^k = 1$, увеличиваем номер шага k на единицу ($k=k+1$) и переходим к п.2.

Если $h^k = 0$, принимаем в качестве решения оценку e^k и заканчиваем выполнение алгоритма.

Пример: перебор по равномерной сетке

$$y^1 = G_1(\Phi) = a$$

$$y^{k+1} = G_{k+1}(\Phi, \omega_k) = a + k \frac{b-a}{m}, k \geq 1.$$

$$H_k(\Phi, \omega_k) = \begin{cases} 0, & k > m, \\ 1, & k \leq m, \end{cases}$$

$$e^k = \varphi_k^*$$

$$\varphi_k^* = \min_{1 \leq i \leq k} \varphi(y^i) \quad (1.15)$$

ИЛИ

$$e^k = (\varphi_k^*, y_k^*)$$

$$y_k^* = \arg \min_{1 \leq i \leq k} \varphi(y^i) \quad (1.16)$$

Свойства методов ОПТИМИЗАЦИИ

Итак, решая задачу минимизации функции $f(x)$, метод поиска порождает (сопоставляет функции) последовательность координат испытаний, или просто последовательность испытаний (k - координата k -го испытания), а также последовательность результатов испытаний $\{z^1, z^2, \dots, z^k, \dots\}$.

(напомним, что мы ограничились случаем значения функции в качестве результата, т.е. $\{y^k\}$). При этом свойства метода определяются свойствами последовательностей $\{x^k\}$ и $\{z^k\}$, поэтому исследование метода поиска может быть проведено посредством изучения последовательностей испытаний. Им какие требования должны быть предъявлены к последовательности порожденных испытаний численного метода оптимизации? Разумеется, основное требование заключается в том, что проведение испытаний в $\{x^k\}$ точках должно обеспечить на основе результатов $\{z^k\}$ решение задачи, т.е. отыскание решения, соответствующего выбранной постановке.

Идеально: за конечное число испытаний найти точное решение задачи.

Сходимость метода ОПТИМИЗАЦИИ

Часто интересуются асимптотически точной оценкой, рассматривая бесконечную последовательность испытаний (в модели (1.8) $H_k = 1$ для любого $k \geq 1$ т.е. условие остановки отсутствует) и требуя, чтобы эта последовательность сходилась к точному решению задачи. Поскольку в постановках B-D искомое решение может содержать *несколько* точек минимума, сходимость метода будем понимать в смысле следующего определения.

Определение 1.5. Последовательность испытаний $\{y^k\}$ сходится к решению задачи оптимизации, определенному соответствующей постановкой, если:

1. существует подпоследовательность $\{\bar{y}^k\} \subseteq \{y^k\}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\bar{y}^k) = \inf\{\varphi(y) : y \in Q\};$$

2. если искомое решение включает одну или несколько координат экстремумов, для каждой такой координаты найдется подпоследовательность последовательности испытаний $\{y^k\}$, сходящаяся к этой точке.

Сходимость метода ОПТИМИЗАЦИИ

Последовательность испытаний, сходящуюся к точному решению постановки $Z \in \{A, B, C, D, E\}$, будем называть *минимизирующей* последовательностью для постановки Z , либо Z - минимизирующей последовательностью. Термин "минимизирующая последовательность" введен Ф.П.Васильевым и соответствует понятию A -минимизирующей последовательности.

Вопросам сходимости в теории методов поиска экстремума уделяется значительное внимание, поскольку асимптотика обеспечивает потенциальную возможность получения точного решения с любой наперед заданной точностью за конечное число испытаний. Но самой по себе такой возможности для практической реализации методов недостаточно. Необходимо еще уметь определять меру близости получаемого приближенного решения к точному решению, т.е. уметь оценивать погрешность решения задачи при конечном числе испытаний.