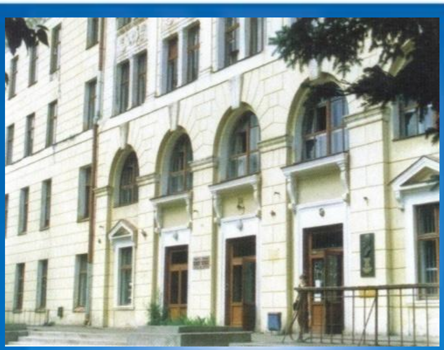
   

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Институт информационных технологий, математики и механики

# Системы принятия решений

Vladimir Grishagin

# Определения

Пусть $\phi(y)$ является вещественной функцией, определенной в области $Q$ *мерного евклидова пространства* $R^N$ и принимающая конечные значения в каждой точке множества $Q$.

Обозначим через

$$\inf_{y\in Q}\varphi(y)=\inf\{\varphi(y): y\in Q\} \qquad (1.1)$$

точную нижнюю грань функции $\varphi(y)$ в области $Q$.

**Определение 1.1**. Если существует точка $y^* \in Q$ такая, что

$$\varphi(y^*)=\inf\{\varphi(y): y\in Q\} \qquad (1.2)$$

тогда $\varphi(y)$ достигает своей точной нижней грани в области $Q$, а $y^*$ называется *точкой глобального (абсолютного) минимума* или *глобальным минимайзером.*.

Значение $\varphi^* = \varphi(y^*)$ называется наименьшим значением или *значением глобального оптимума (минимума)* функции $\varphi$ в $Q$ и обозначается как

$$\min_{y\in Q}\varphi(y)=\min\{\varphi(y): y\in Q\} \qquad (1.3)$$

# Определения

Обозначим множество всех точек $y^* \in Q$ , удовлетворяющих (1.2) как

$$Q^* = Arg\min_{y \in Q} \varphi(y) \equiv Arg\min\{\varphi(y) : y \in Q\} \qquad (1.4)$$

**Определение 1.2.** Точка $y' \in Q$ называется *точкой локального минимума функции* $\varphi$ в области $Q$, если существует такое число $\epsilon > 0$, что для всех $y \in Q$, удовлетворяющих неравенству $\| y - y' \| < \epsilon$, выполняется условие $\varphi(y') \le \varphi(y)$ .

**Определение 1.3.** Если функция $\varphi(y)$ в области $Q$ имеет единственный локальный минимум, она называется *унимодальной*, если несколько – *многоэкстремальной*.

**Определение 1.4.** Будем называть *задачей оптимизации* задачу следующего вида: найти заданные экстремальные характеристики функции $\varphi(y)$ в области $Q$.

# Постановка задач оптимизации

**Постановка A.** Найти точную нижнюю грань функции $\varphi(y)$

$$\varphi^* = \inf\{\varphi(y) : y \in Q\} \tag{1.5}$$

**Постановка B.** Найти точную нижнюю грань (1.5) и, если множество точек глобального минимума (1.4) не пусто, найти хотя бы одну точку y* = Q*.

**Постановка C.** Найти точную нижнюю грань из (1.5) и все точки глобального минимума (1.4) (или удостовериться, что множество $Q^*$ пусто).

**Постановка D.** Найти координаты и значения всех локальных минимумов функции $\varphi(y)$ в области $Q$.

**Постановка E.** Найти локальный минимум функции $\varphi(y)$ в области $Q$.

# Постановка задач оптимизации

Общую форму задачи оптимизации будем записывать в виде

$$\varphi(y) \to \inf, y \in Q \qquad (1.6)$$

Функция *ϕ(y)* в (1.6) называется *целевой функцией, минимизируемой функцией,* или *оптимизируемой функцией,* область Q называется *допустимой областью,* а элементы области Q - *допустимыми точками*.

Если заведомо известно, что целевая функция достигает своей точной нижней грани в допустимой области, задачу оптимизации будем записывать в виде

$$\varphi(y) \to \min, y \in Q \qquad (1.7)$$

Что касается поиска максимума, то достаточно заметить, что

$$\sup\{\varphi(y) : y \in Q\} = -\inf\{-\varphi(y) : y \in Q\},$$

поэтому поиск максимума элементарно сводится к поиску минимума функции *-ϕ(y).*

# Численные методы оптимизации

Сформулировав задачу минимизации, мы теперь должны дать ответ на основной вопрос: каким образом ее решать?

Классический подход математического анализа предлагает следующую процедуру аналитического решения задачи (на примере одномерного случая). Пусть $\varphi(y)$ - кусочно-гладкая на отрезке $[a,b]$ функция одной переменной. Тогда минимум на этом отрезке может достигаться лишь в тех точках, где $\varphi'(y)=0$, либо производная разрывна, либо в граничных точках. Остается найти все такие точки и выбрать из них точку с наименьшим значением. Иными словами, чтобы решить задачу этим способом, требуется:

а) указание аналитического вида функции;

б) кусочная гладкость функции;

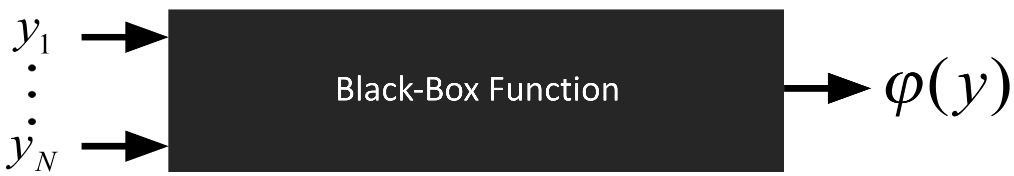
в) возможность вычисления производной;

г) умение решать уравнение $\varphi'(y)=0$, т.е. задачу поиска корня;

д) информация о точках разрыва производной или способ определения этих точек.

# Численные методы оптимизации

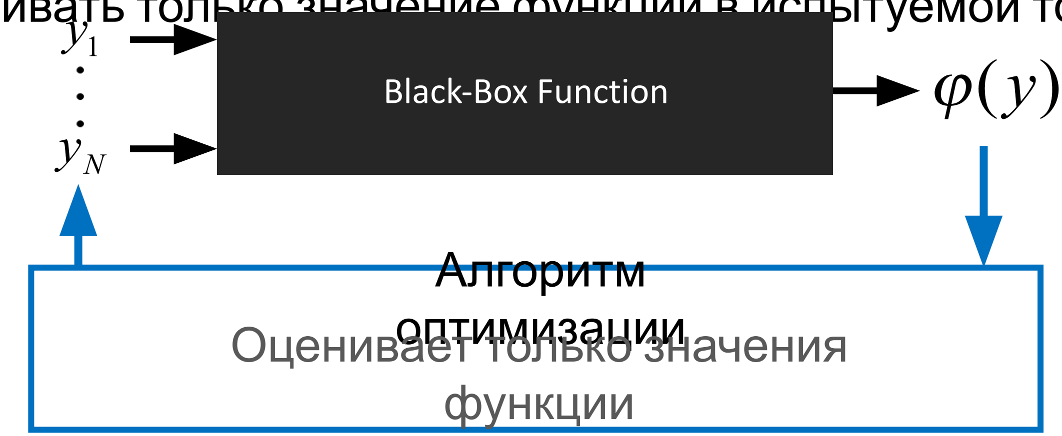
К сожалению, эти требования на практике выполняются в редчайших случаях. Типичный же случай описывается ситуацией, когда функция $\varphi(y)$ задается алгоритмически, т.е. в виде некоей расчетной схемы, когда по заданному аргументу $y$ рассчитывается значение $\varphi(y)$.




В этом случае ни о каких аналитических способах исследования говорить не приходится. Заметим, что даже при аналитическом задании функции и способности посчитать производную исходная задача (1.6) сводится к решению задачи поиска корня, которая по сложности сравнима с задачей минимизации.

# Численные методы оптимизации

Узкая сфера применения аналитических методов обусловила развитие и широкое распространение *численных методов (алгоритмов)* решения задач оптимизации. Различные формулировки определений численного метода оптимизации даны многими авторами. Общим во всех формулировках является представление метода как некоторой итерационной процедуры, которая осуществляет вычисление в точках области поиска определенных характеристик минимизируемой функции (такими характеристиками могут быть значение функции, ее градиента, матрицы вторых производных и т.п.). Назовем операцию вычисления характеристик функции в точке *поисковым испытанием*, а совокупность значений характеристик в этой точке – *результатом испытания*. Далее в настоящей главе в качестве результата испытания будем рассматривать только значение функции в испытуемой точке.



# Модель алгоритма

Если реализация алгоритма осуществляется на однопроцессорной установке, то вычислительная схема алгоритма состоит из последовательно выполняемых операций, а все испытания осуществляются последовательно, т.е. мы имеем чисто последовательный численный метод .

Основываясь на методологии теории исследования операций, дадим формальное определение последовательного алгоритма оптимизации или, более широко, *модели вычислений* при решении задачи (1.6).

Построение модели вычислений предполагает наличие некоторой априорной (доопытной, имеющейся до начала вычислений) информации о решаемой задаче. Данная информация может быть получена исходя из физической сущности задачи, описывающей моделируемый реальный объект. Такими свойствами могут быть непрерывность, гладкость, монотонность, выпуклость и т.п. Имеющаяся информация служит для исследователя основанием для отнесения задачи (в нашем случае функции $\varphi(y)$ ) к тому или иному множеству (классу) $\Phi$ . После того, как класс $\Phi$ зафиксирован, априорная информация о задаче, используемая исследователем, состоит в том, что ему известна принадлежность задачи к классу $\Phi$ .

# Модель алгоритма

Следующим важным этапом построения модели вычислений является выбор *алгоритма (метода) решения задачи*. В самом общем виде численный метод решения задачи из класса представляет собой набор (кортеж)

$$s = < \{G_k\}, \{E_k), \{H_k\} > \qquad (1.8)$$

*$\{G_k\}$, $k=1,2,\ldots$ - функционалы выбора точек испытаний;*
*$\{E_k\}$, $k=1,2,\ldots$ - функционалы построения оценок решения;*
*$\{H_k\}$, $k=1,2,\ldots$ - функционалы правила остановки.*

# Вычислительная схема алгоритма

1.Выбирается точка первого испытания с номером *k=1*:

$$y^1 = G_1(\Phi) \in Q \qquad (1.9)$$

2.Пусть выбрана точка *k*-го испытания $y^k \in Q \ (k \geq 1)$.

Вычисляем значение $z^k = \varphi(y^k)$

Поисковая (апостериорная) информация о функции $\varphi$

$$\omega_k = \{(y^1, z^1), (y^2, z^2), \dots, (y^k, z^k)\} \qquad (1.10)$$

Апостериорный класс

$$\Phi(\omega_k) = \{\psi \in \Phi : \psi(y^i) = z^i, 1 \leq i \leq k\} \qquad (1.11)$$

# Вычислительная схема алгоритма

3. Определяется текущая оценка экстремума (приближенное решение)

$$e^k = E_k(\Phi, \omega_k) \qquad (1.12)$$

4. Вычисляется точка очередного испытания

$$y^{k+1} = G_{k+1}(\Phi, \omega_k) \qquad (1.13)$$

5. Определяется величина

$$h^k = H_k(\Phi, \omega_k) \in \{0,1\} \qquad (1.14)$$

Если $h^k = 1,$ увеличиваем номер шага *k* на единицу *(k=k+1)* и переходим к п.2.

Если $h^k = 0,$ принимаем в качестве решения оценку $e^k$ и заканчиваем выполнение алгоритма.

# Пример: перебор по равномерной сетке

$$y^1 = G_1(\Phi) = a$$

$$y^{k+1} = G_{k+1}(\Phi, \omega_k) = a + k\frac{b-a}{m}, k \geq 1.$$

$$H_k(\Phi, \omega_k) = \begin{cases} 0, \ k > m, \\ 1, \ k \leq m, \end{cases}$$

$$e^k = \varphi_k^*$$

$$\varphi_k^* = \min_{1 \leq i \leq k} \varphi(y^i) \qquad (1.15)$$

или

$$e^k = (\varphi_k^*, y_k^*)$$

$$y_k^* = \arg \min_{1 \leq i \leq k} \varphi(y^i) \qquad (1.16)$$

# Свойства методов оптимизации

Итак, решая задачу минимизации функции $\varphi(y)$, метод поиска порождает (сопоставляет функции) последовательность $\{y^k\} = y^1, y^2, \dots, y^k, \dots$ координат испытаний, или просто последовательность испытаний ($y^k$ - координата $k$-го испытания), а также последовательность результатов испытаний $\{z^k\} = z^1, z^2, \dots, z^k, \dots$ (напомним, что мы ограничились случаем значения функции в качестве результата, т.е. $z^i = \varphi(y^i), i \geq 1$). При этом свойства метода определяются свойствами последовательностей $\{y^k\}$ и $\{z^k\}$, поэтому исследование метода поиска может быть проведено посредством изучения последовательностей испытаний, им порождаемых.

Какие требования должны быть предъявлены к последовательности испытаний численного метода оптимизации? Разумеется, основное требование заключается в том, что проведение испытаний в точках $\{y^k\}$ должно обеспечить на основе результатов $\{z^k\}$ решение задачи, т.е. отыскание решения, соответствующего выбранной постановке.

Идеально: за конечное число испытаний найти точное решение задачи.

# Сходимость метода оптимизации

Часто интересуются асимптотически точной оценкой, рассматривая бесконечную последовательность испытаний (в модели (1.8) $H_k = 1$ для любого $k \geq 1$ т.е. условие остановки отсутствует) и требуя, чтобы эта последовательность сходилась к точному решению задачи. Поскольку в постановках B-D искомое решение может содержать *несколько* точек минимума, сходимость метода будем понимать в смысле следующего определения.

**Определение 1.5**. Последовательность испытаний $\{y^k\}$ сходится к решению задачи оптимизации, определенному соответствующей постановкой, если:

1. существует подпоследовательность $\{\bar{y}^k\} \subseteq \{y^k\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(\bar{y}^k) = \inf\{\varphi(y) : y \in Q\};$$

2. если искомое решение включает одну или несколько координат экстремумов, для каждой такой координаты найдется подпоследовательность последовательности испытаний $\{y^k\}$, сходящаяся к этой точке.

# Сходимость метода оптимизации

Последовательность испытаний, сходящуюся к точному решению постановки $Z \in \{A,B,C,D,E\}$, будем называть *минимизирующей* последовательностью для постановки Z, либо Z - минимизирующей последовательностью. Термин "минимизирующая последовательность" введен Ф.П.Васильевым и соответствует понятию A-минимизирующей последовательности.

Вопросам сходимости в теории методов поиска экстремума уделяется значительное внимание, поскольку асимптотика обеспечивает потенциальную возможность получения точного решения с любой наперед заданной точностью за конечное число испытаний. Но самой по себе такой возможности для практической реализации методов недостаточно. Необходимо еще уметь определять меру близости получаемого приближенного решения к точному решению, т.е. уметь оценивать погрешность решения задачи при конечном числе испытаний.