上节重点内容回顾

力的元功

1. 元功是力在微小位移上做的功；
2. 等效力系在刚体的任何位移上做功相等；
3. 一般来说，质点系内力做功；但刚体内力做功为零；
4. 力偶的元功 = 力偶矩 × 刚体的转角。

约束及其分类

约束方程：质点系关于位置、速度及时间t 的限制方程

约束分类：按方程中是否出现速度或时间t 分类

在静力学中，只考虑仅对位置的约束，约束方程为等式。

广义坐标与自由度

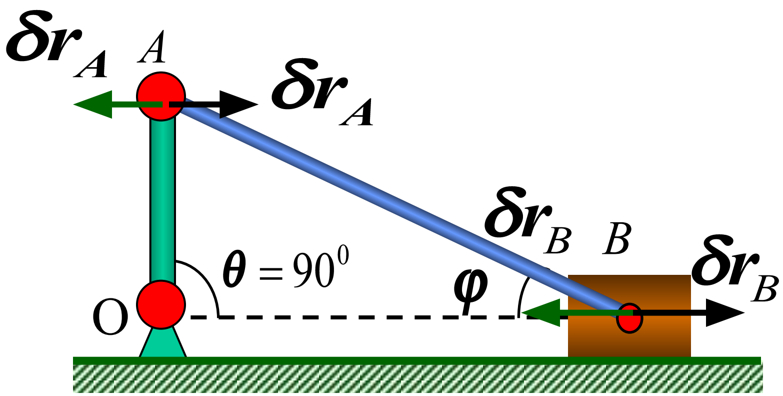
广义坐标：确定系统位置的独立参数。

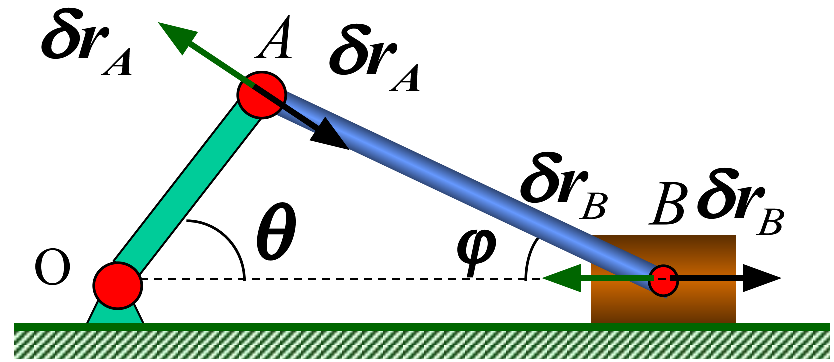
自由度：广义坐标的数目

§4-4、虚位移与虚功

1. 虚位移

虚位移: 在给定位置，质点系为 约束容许 的 微小位移。



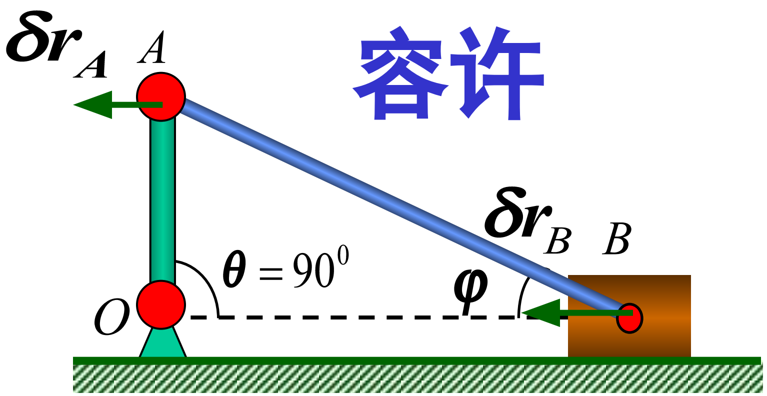


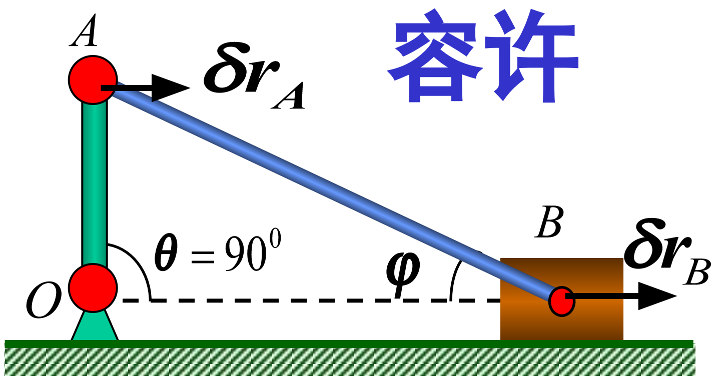
虚位移特点

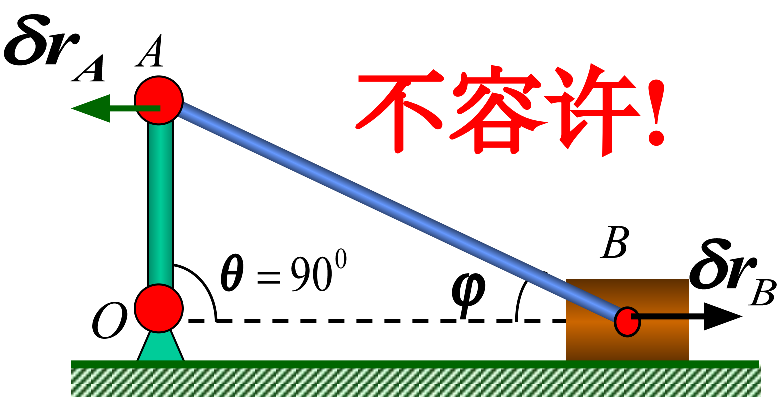
1. 用变分表示: $\delta \boldsymbol{r}$;
2. 是微小位移，没有具体量值;
3. 虚位移是假想的位移，不唯一; $\{\delta \boldsymbol{r}_A, \delta \boldsymbol{r}_B\}$ $\{\delta \boldsymbol{r}_A, \delta \boldsymbol{r}_B\}$
4. 必须为约束所许可。

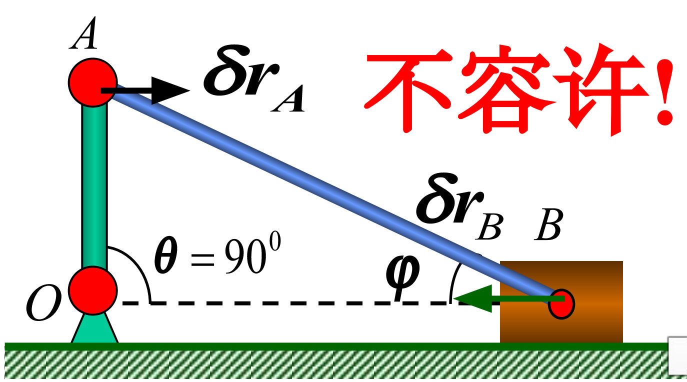
虚位移: 在给定位置，质点系为约束容许的微小位移

4. 虚位移必须为约束所许可。









2. 虚功

$$\delta W = \boldsymbol{F} \bullet \delta \boldsymbol{r}$$

虚功： 作用于质点或质点系上的力在虚位移上所作的功。

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k}$$

$$\delta \boldsymbol{r} = \delta x \boldsymbol{i} + \delta y \boldsymbol{j} + \delta z \boldsymbol{k}$$

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

因为虚位移是微小位移，所以**虚功**属于**元功**。

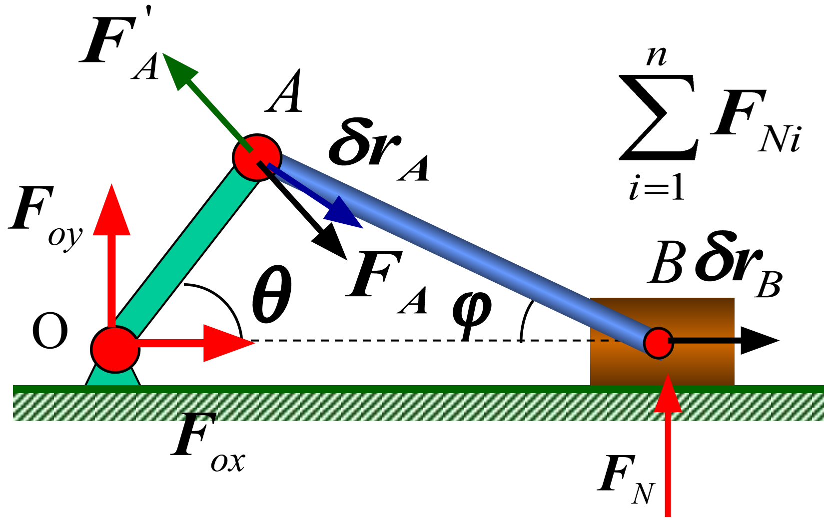
§4-5 理想约束

理想约束： 质点系中所有约束力在任何虚位移上所作的虚功之和为零的约束。

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{Ni} \bullet \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

讨论：

哪些约束是理想约束



$$\sum_{i=1}^{n} F_{Ni} \bullet \delta r_i = 0$$

1. 光滑固定面和可动铰链支座
2. 光滑固定铰链和轴承
3. 连接物体的光滑铰链
4. 二力杆和不可伸长的柔索
5. 刚体在固定(或移动)面上纯滚动(不计滚阻力偶)

关于虚位移

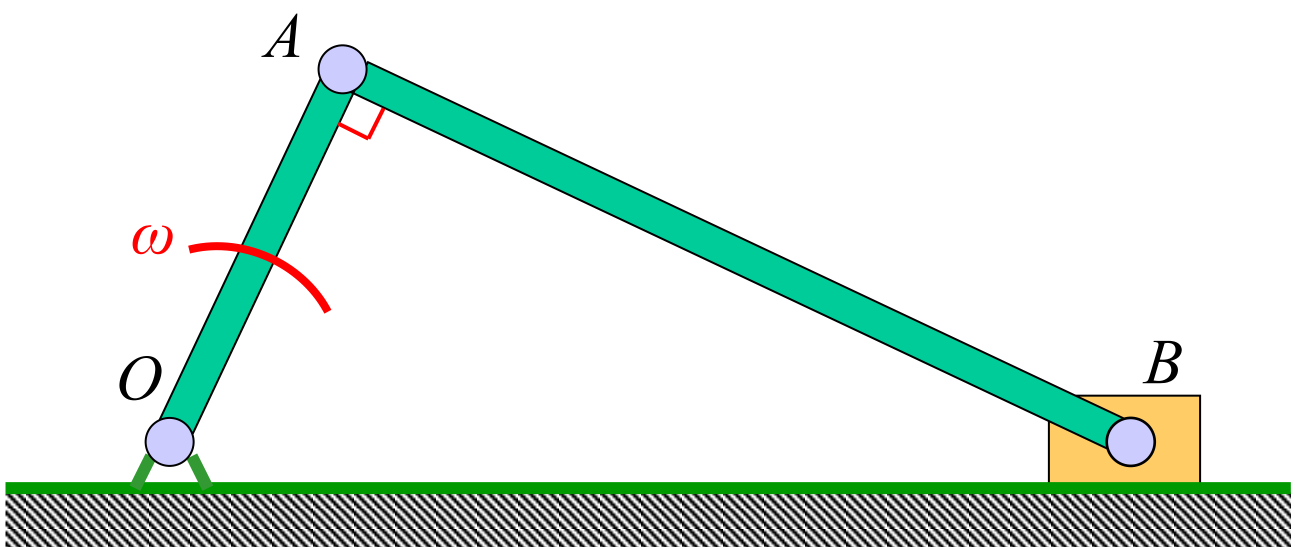
- 虚位移是假想的位移；
- 虚位移是微小位移；
- 虚位移不惟一；
- 应将虚位移与实位移区别开来；
- 定常约束下，刚体上任意两点的**虚位移**关系等同于**速度**关系。

虚位移与实位移的区别

- 实位移取决于系统的受力，而虚位移与受力无关，是个几何概念；
- 实位移有具体的量度， 是有限值，而虚位移没有具体的值，与数学中的无穷小相似，只是一个概念。

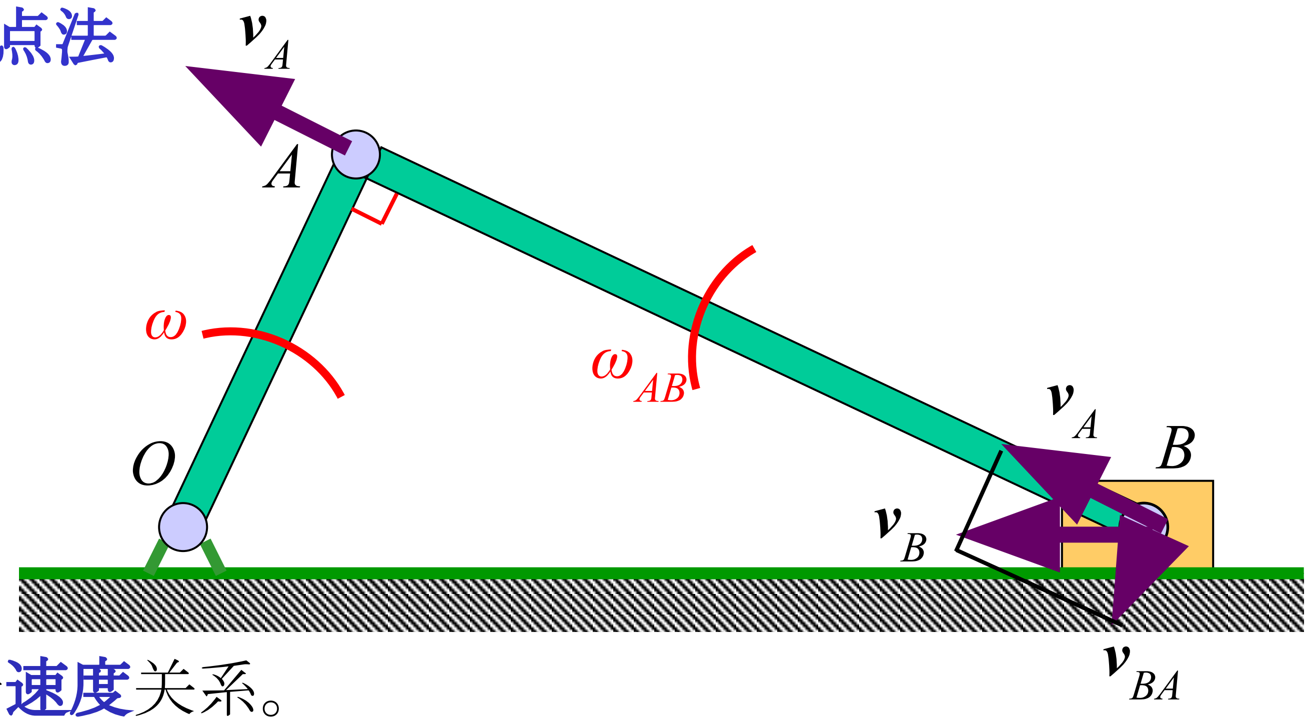
定常约束下，刚体上任意两点的**虚位移**关系等同于**速度**关系。

例2: 已知：ω, $OA=3r$, $AB=4r$。求在图示位置($OA \perp AB$) B 点的速度 $\boldsymbol{v}_B$。



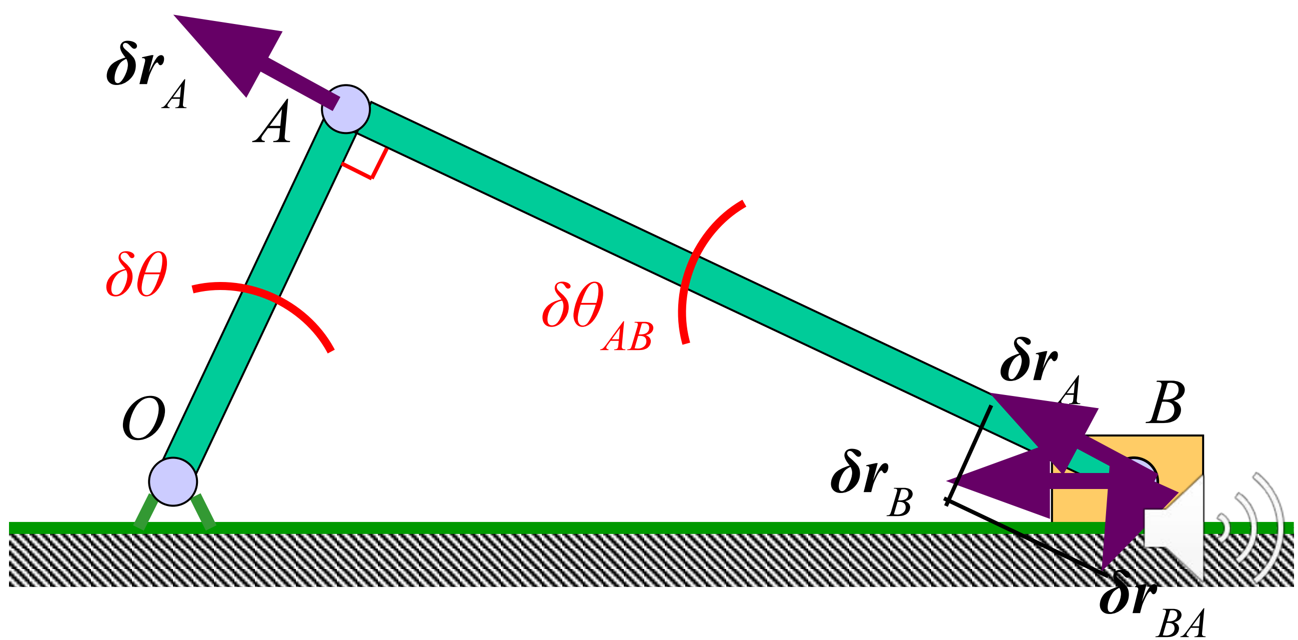
刚体平面运动的基点法

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$



虚位移关系等同于**速度**关系。

$$\delta\boldsymbol{r}_B = \delta\boldsymbol{r}_A + \delta\boldsymbol{r}_{BA}$$

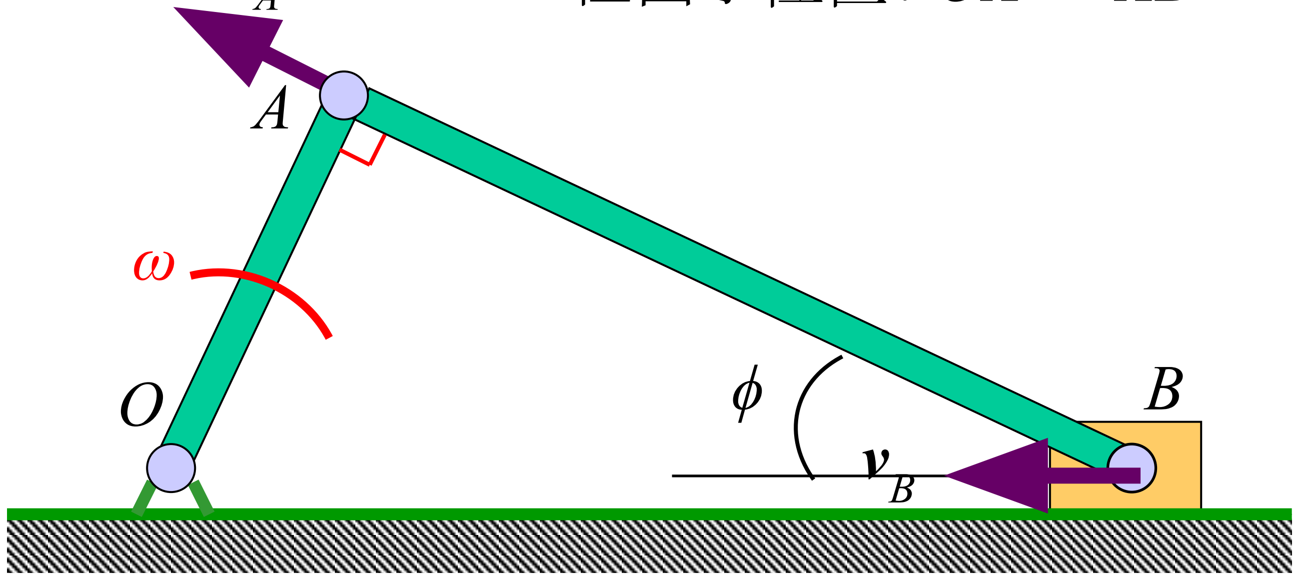


速度投影定理

在图示位置：$OA \perp AB$

$$v_A = v_B \cos\varphi$$

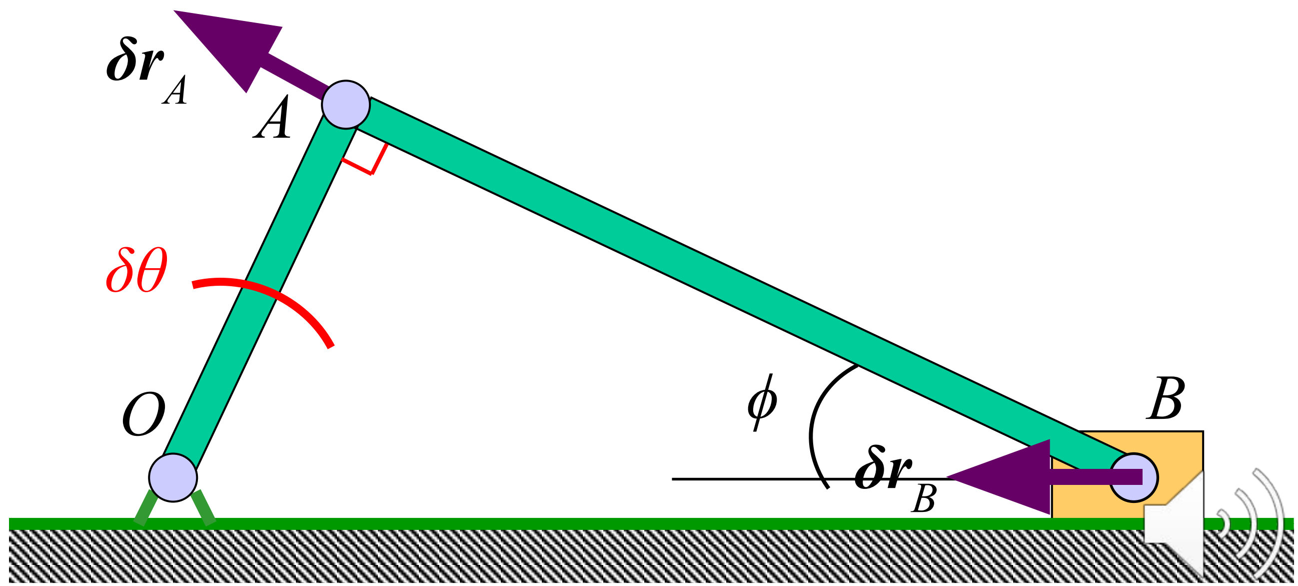
$$v_A = \omega \cdot \overline{OA}$$



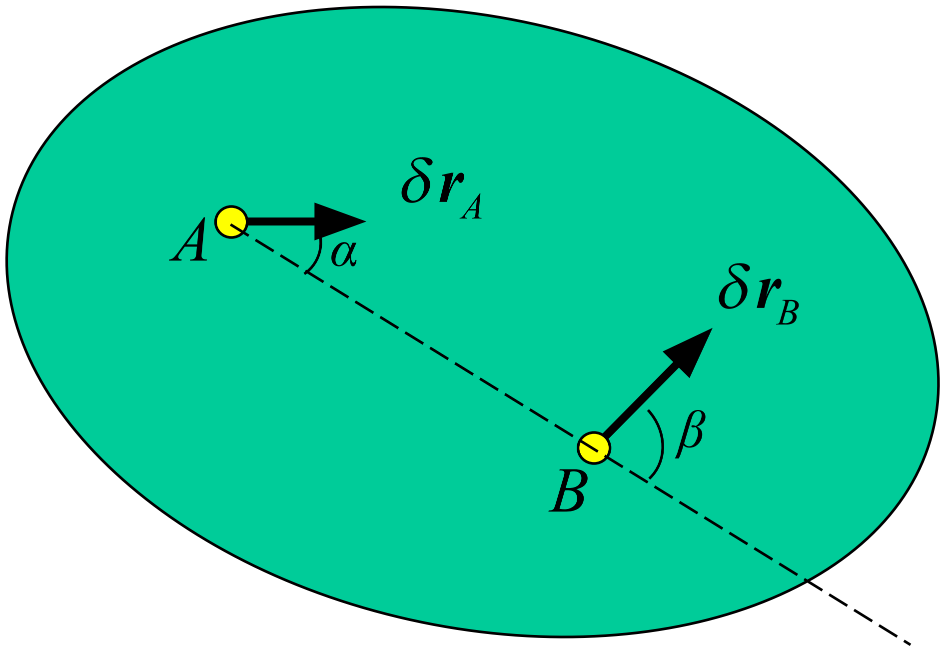
虚位移关系等同于**速度**关系。

$$\delta r_A = \delta r_B \cos\varphi$$

$$\delta r_A = \delta\theta \cdot \overline{OA}$$



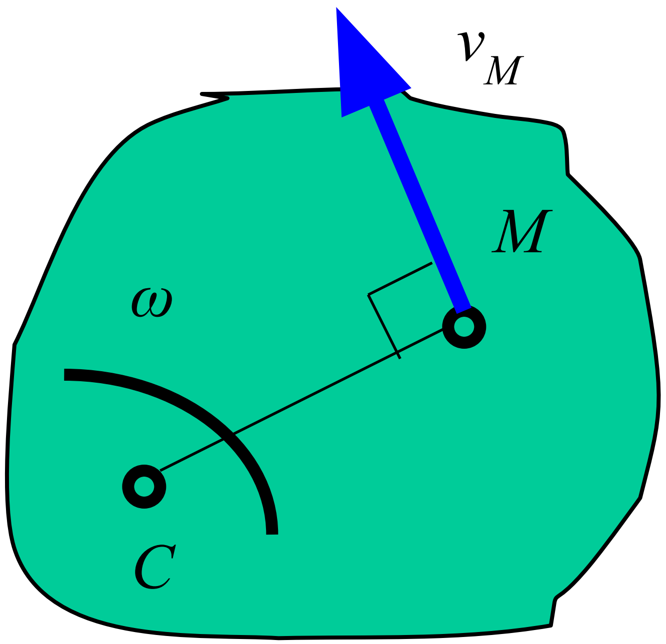
投影定理： 刚体上任意两点的虚位移在两点连线上的投影相等。

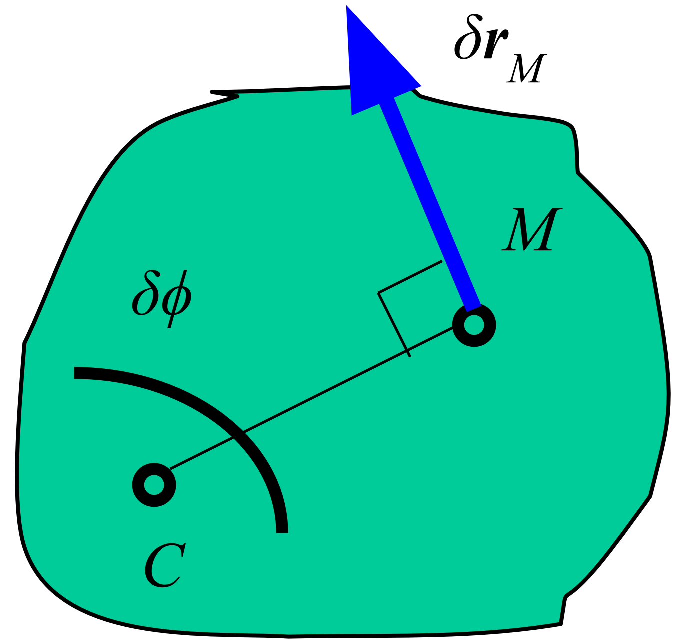


$$\delta r_A \cdot \cos\alpha = \delta r_B \cdot \cos\beta$$

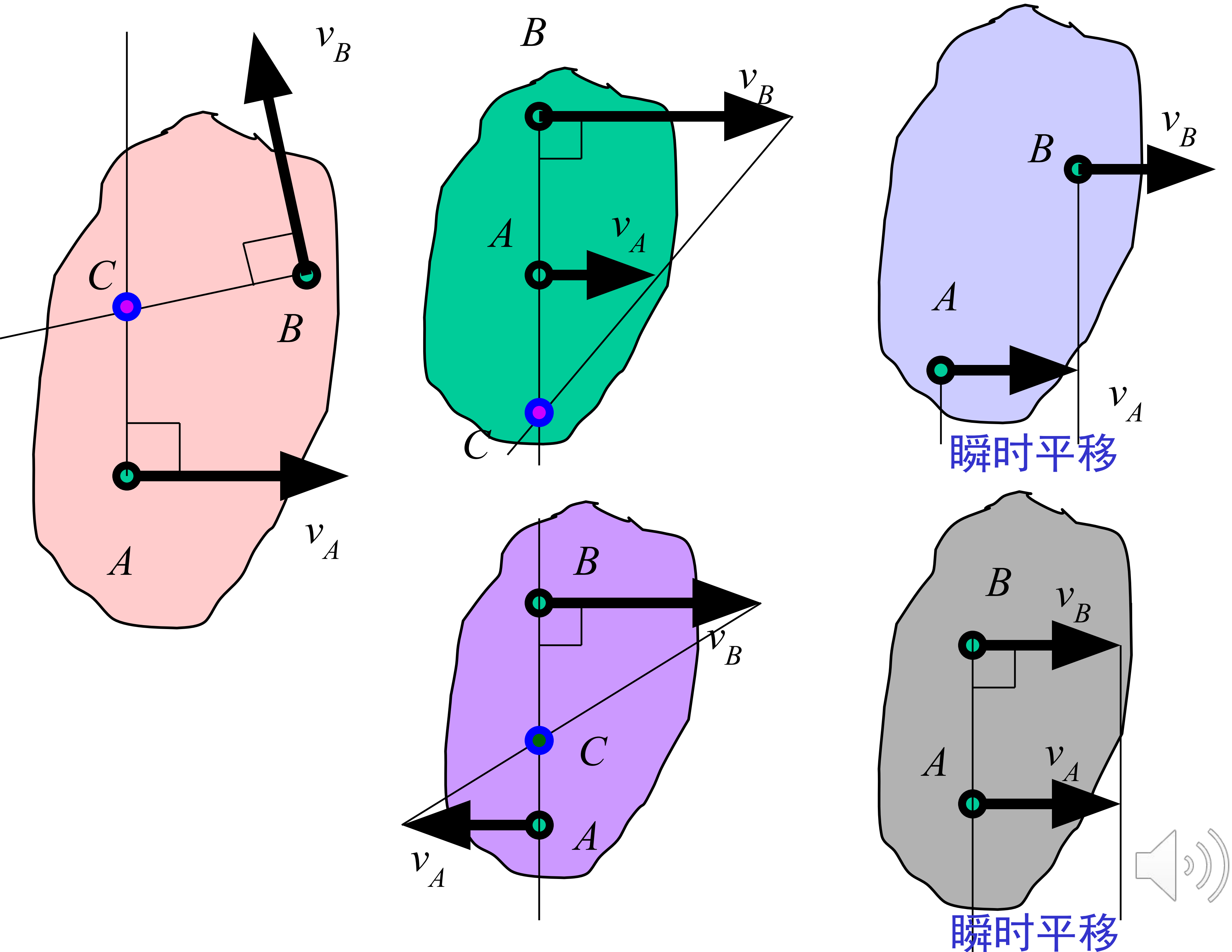
利用速度瞬心求各点的速度

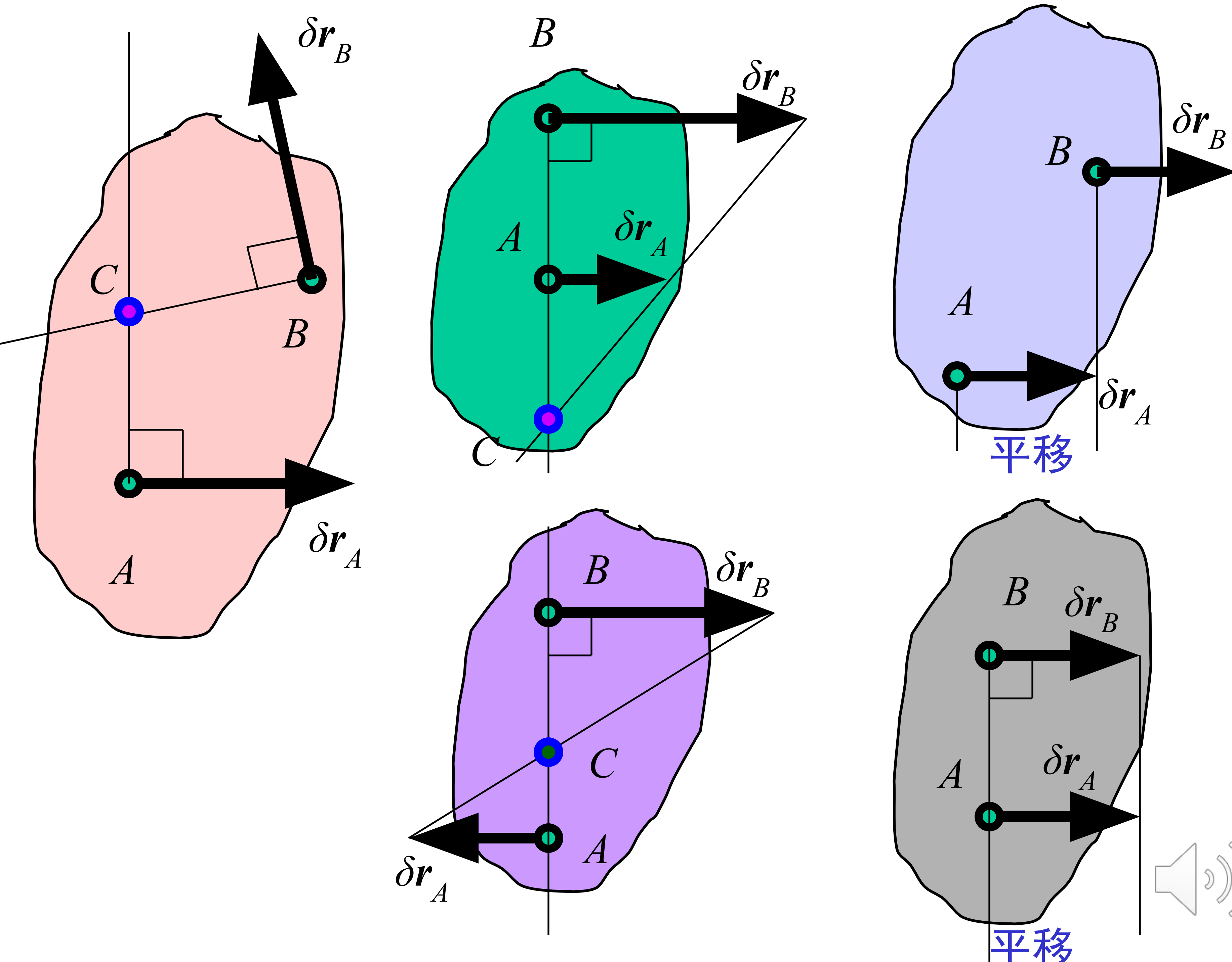
在任意瞬时，平面图形的运动都可以视为绕速度瞬心的**瞬时定轴转动**，因此求各点的速度与刚体绕定轴转动情况完全相同。





$$v_M = \omega \cdot CM \qquad \delta \boldsymbol{r}_M = \delta\phi \cdot CM$$

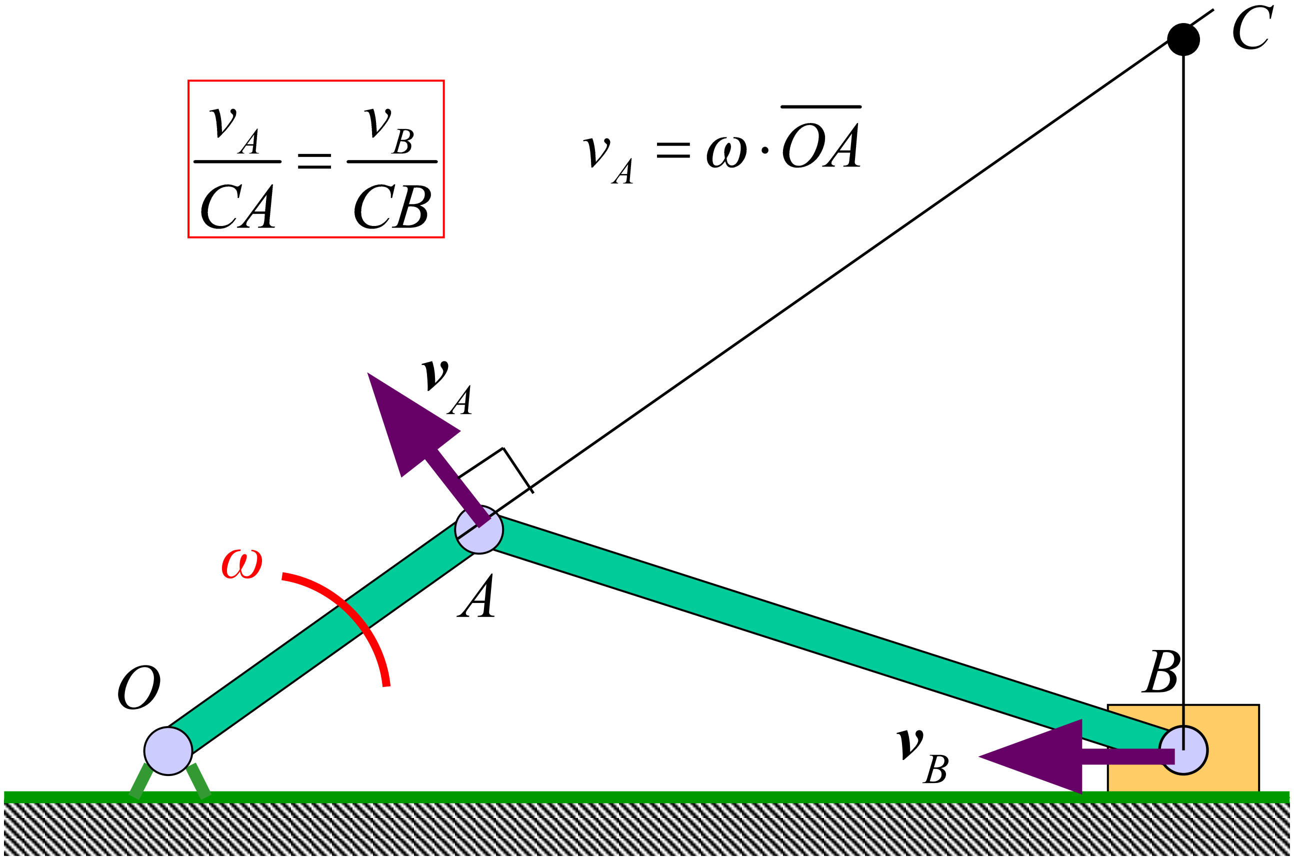

v_B
C
B
A
v_A
B
v_B
A
v_A
C
v_B
B
A
v_A
瞬时平移
B
v_B
C
A
v_A
B
v_B
A
v_A
瞬时平移



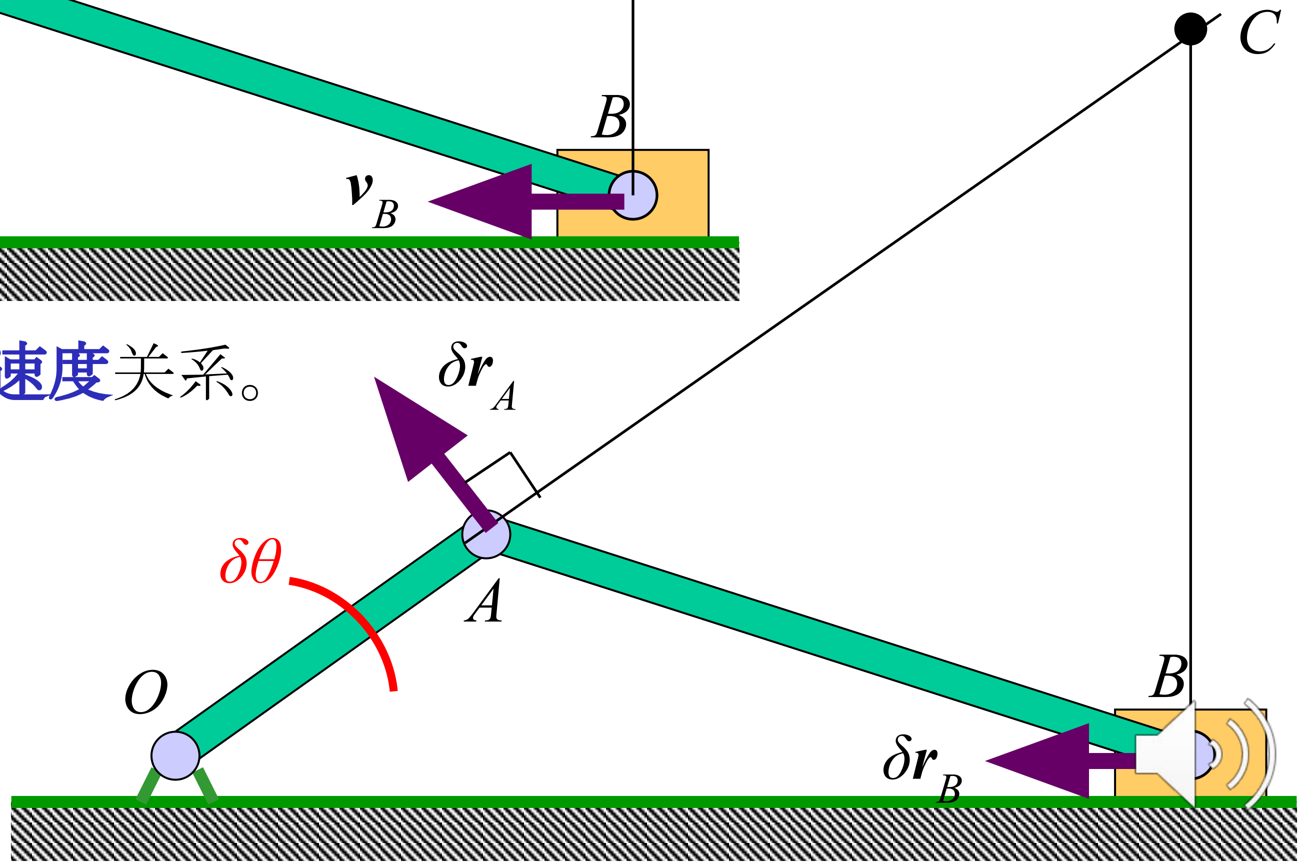
δr_B
C
B
A
δr_A
B
δr_B
A
δr_A
C
δr_B
B
A
δr_A
平移
B
δr_B
C
A
δr_A
B
δr_B
A
δr_A
平移

$$\boxed{\frac{v_A}{CA} = \frac{v_B}{CB}}$$

$$v_A = \omega \cdot \overline{OA}$$



虚位移关系等同于**速度**关系。



$$\boxed{\frac{\delta r_A}{CA} = \frac{\delta r_B}{CB}}$$

$$\delta r_A = \delta\theta \cdot \overline{OA}$$

§4-6　虚位移原理

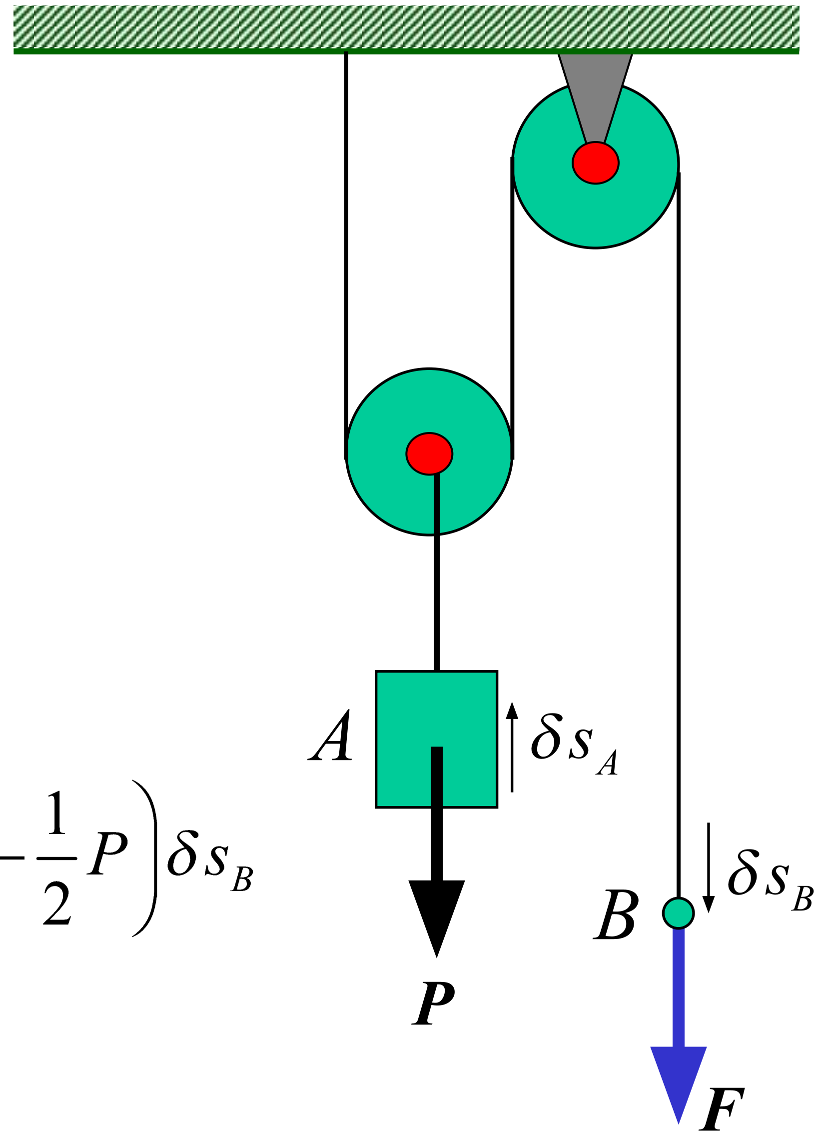
一、虚位移原理

虚位移原理：具有双面、完整、　定常、**理想约束**的静止的质点系，　在给定位置保持平衡的**充要条件**是：该质点系所有主动力在系统的**任何**虚位移上所作的虚功之和等于零。

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \bullet \delta \boldsymbol{r}_i = 0}$$

虚位移原理是静力学的普遍原理，它给出了质点系平衡的**充分和必要**条件。

例1： 已知 P，轮轴光滑，绳与轮无相对滑动，求平衡时 F .



解： 设点 B 有虚位移 δs_B

则重物 A 虚位移 $\delta s_A = \dfrac{1}{2}\delta s_B$

由虚位移原理，有：

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \delta W_F + \delta W_P$$

$$= F \cdot \delta s_B - P \cdot \delta s_A = \left(F - \frac{1}{2}P \right)\delta s_B$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ $$F = \frac{1}{2}P$$