

上节重点内容回顾

力的元功

1. **元功**是力在微小位移上做的功；
2. **等效力系**在刚体的任何位移上做功相等；
3. 一般来说，质点系内力做功；但**刚体内力做功为零**；
4. 力偶的元功 = 力偶矩 \times 刚体的转角。

约束及其分类

约束方程: 质点系关于**位置**、**速度**及**时间 t** 的限制方程

约束分类: 按方程中是否出现**速度**或**时间 t** 分类

在静力学中，只考虑仅对**位置**的约束，约束方程为等式。

广义坐标与自由度

广义坐标: 确定系统位置的**独立参数**。

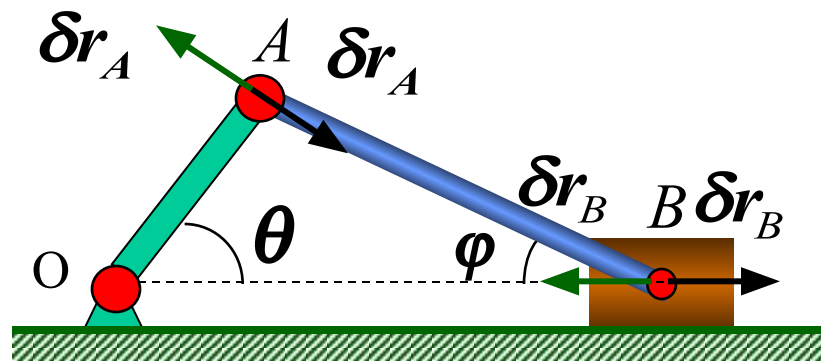
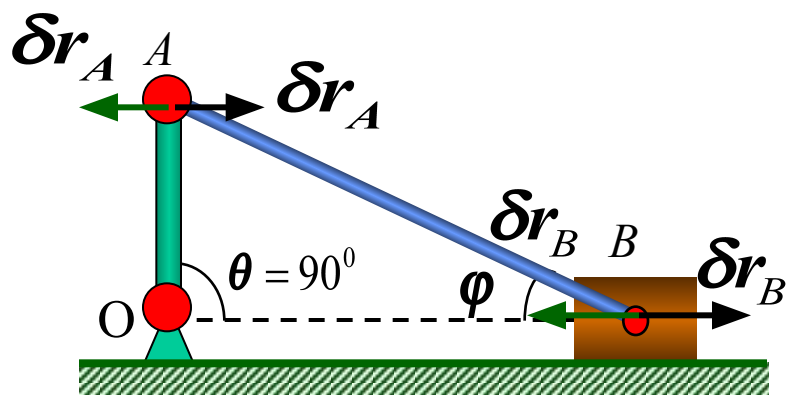
自由度: 广义坐标的数目



§4-4、虚位移与虚功

1. 虚位移

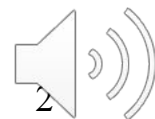
虚位移：在给定位置，质点系为约束容许的微小位移。



虚位移特点

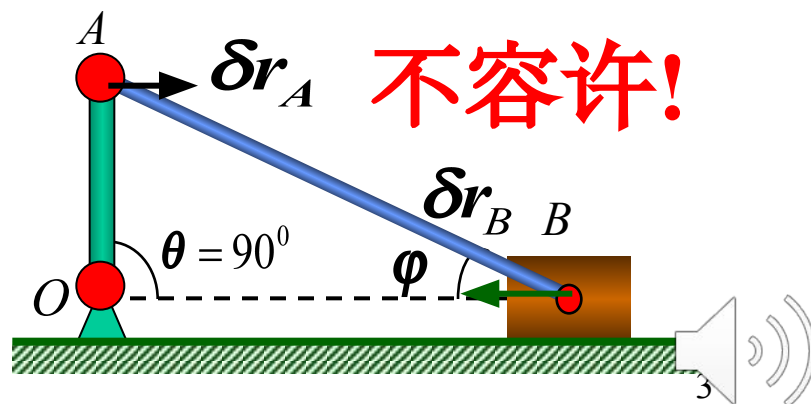
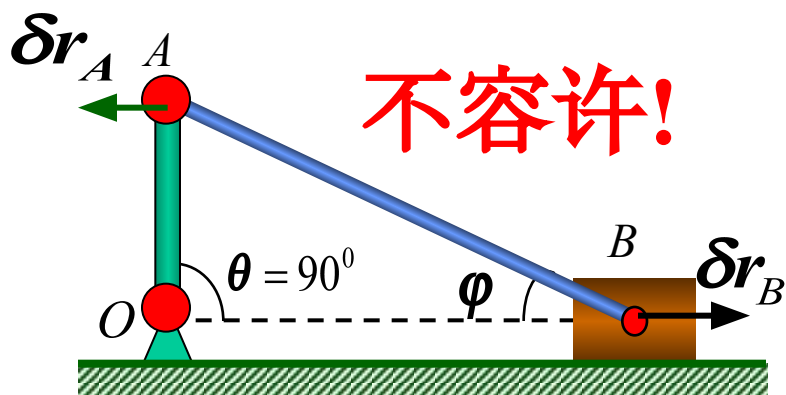
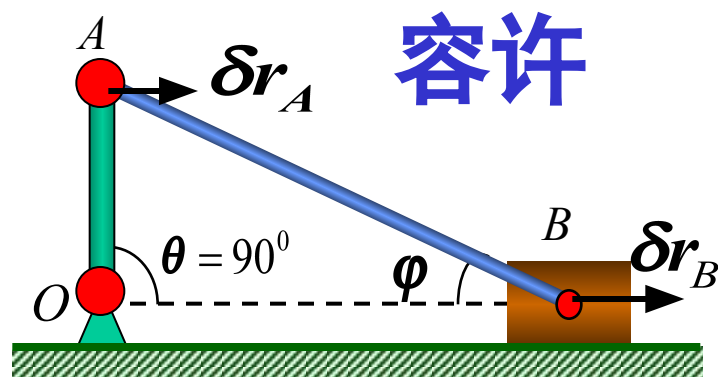
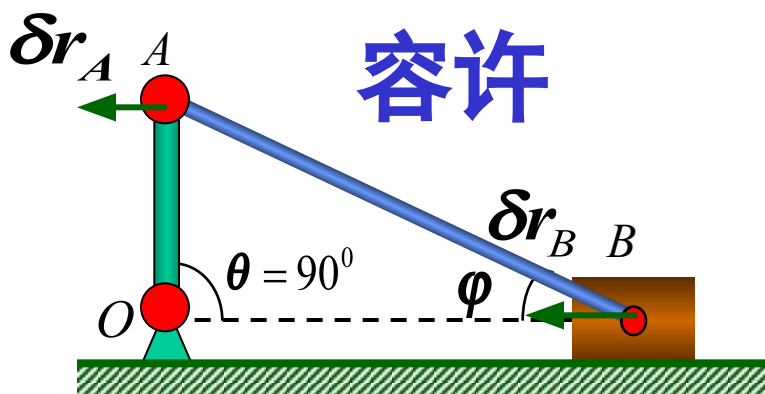
1. 用变分表示： δr ；
2. 是微小位移，没有具体量值；
3. 虚位移是假想的位移，不唯一；
4. 必须为约束所许可。

$$\{\delta r_A, \delta r_B\} \quad \{\delta r_A, \delta r_B\}$$



虚位移:在给定位置, 质点系为约束容许的微小位移

4. 虚位移必须为约束所许可。



2. 虚功

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$$

虚功： 作用于质点或质点系上的力在**虚位移**上所作的功。

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

$$\delta \mathbf{r} = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k}$$

因为虚位移是微小位移，所以**虚功**属于**元功**。

§4-5 理想约束

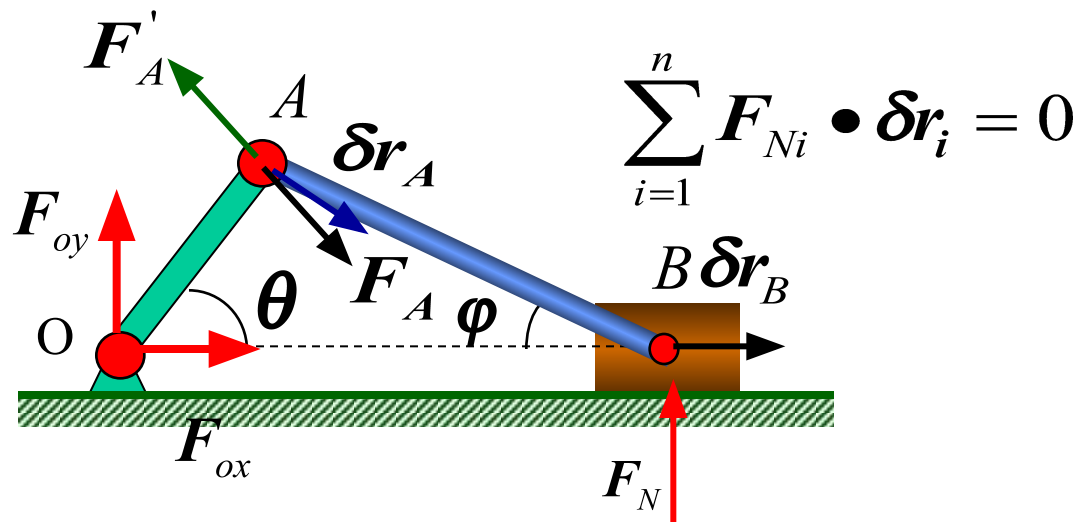
理想约束： 质点系中所有约束力在任何虚位移上所作的虚功之和为零的约束。

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{Ni} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$



讨论:

哪些约束
是理想约束



1. 光滑固定面和可动铰链支
2. 光滑固定铰链^座和轴承
3. 连接物体的光滑铰链
4. 二力杆和不可伸长的柔索
5. 刚体在固定(或移动)面上纯滚动(不计滚阻力偶)



关于虚位移

- 虚位移是假想的位移；
- 虚位移是微小位移；
- 虚位移不惟一；
- 应将虚位移与实位移区别开来；
- 定常约束下，刚体上任意两点的虚位移关系等同于速度关系。



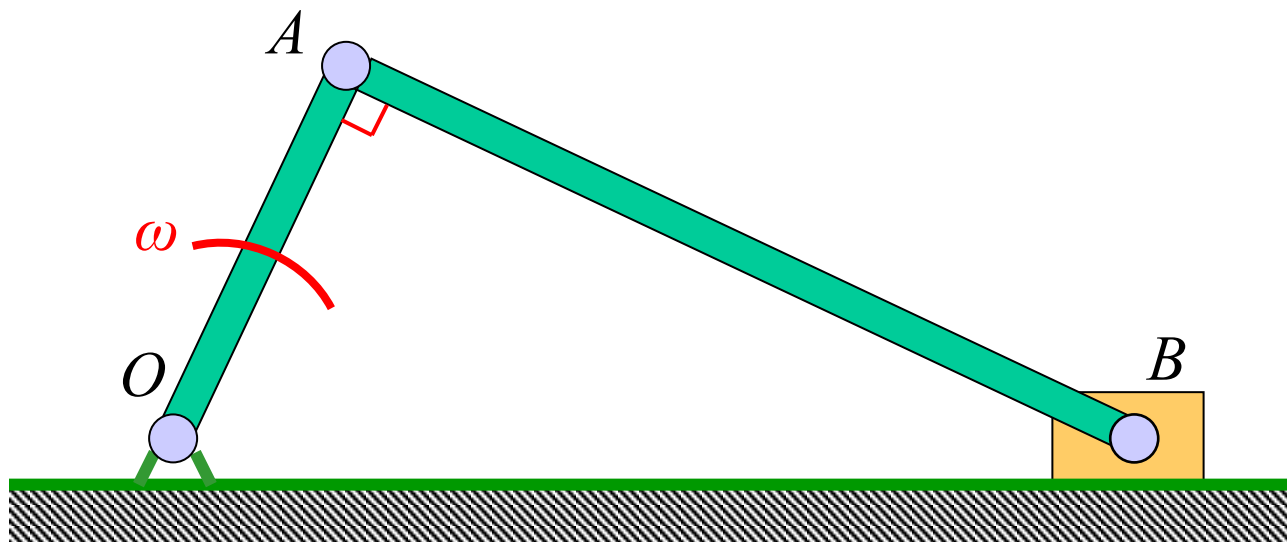
虚位移与实位移的区别

- 实位移取决于系统的受力，而虚位移与受力无关，是个几何概念；
- 实位移有具体的量度，是有限值，而虚位移没有具体的值，与数学中的无穷小相似，只是一个概念。



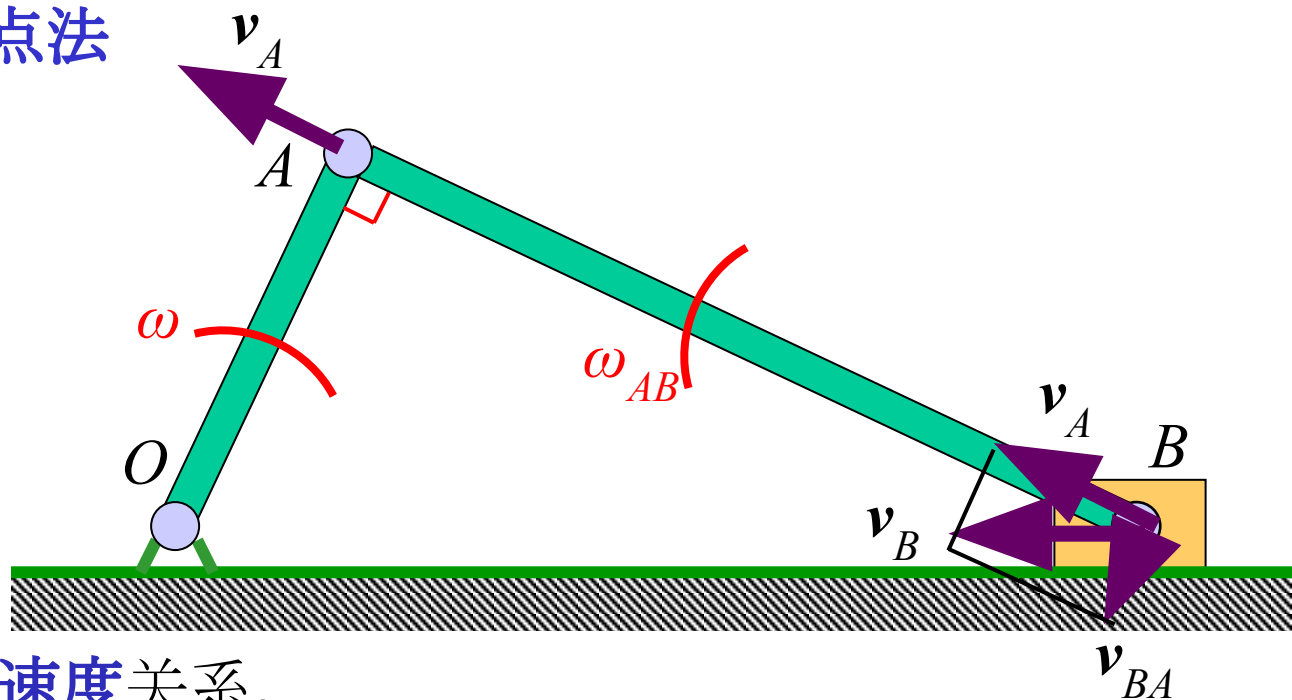
定常约束下，刚体上任意两点的虚位移关系等同于速度关系。

例2: 已知: ω , $OA = 3r$, $AB = 4r$ 。求在图示位置($OA \perp AB$) B 点的速度 v_B 。



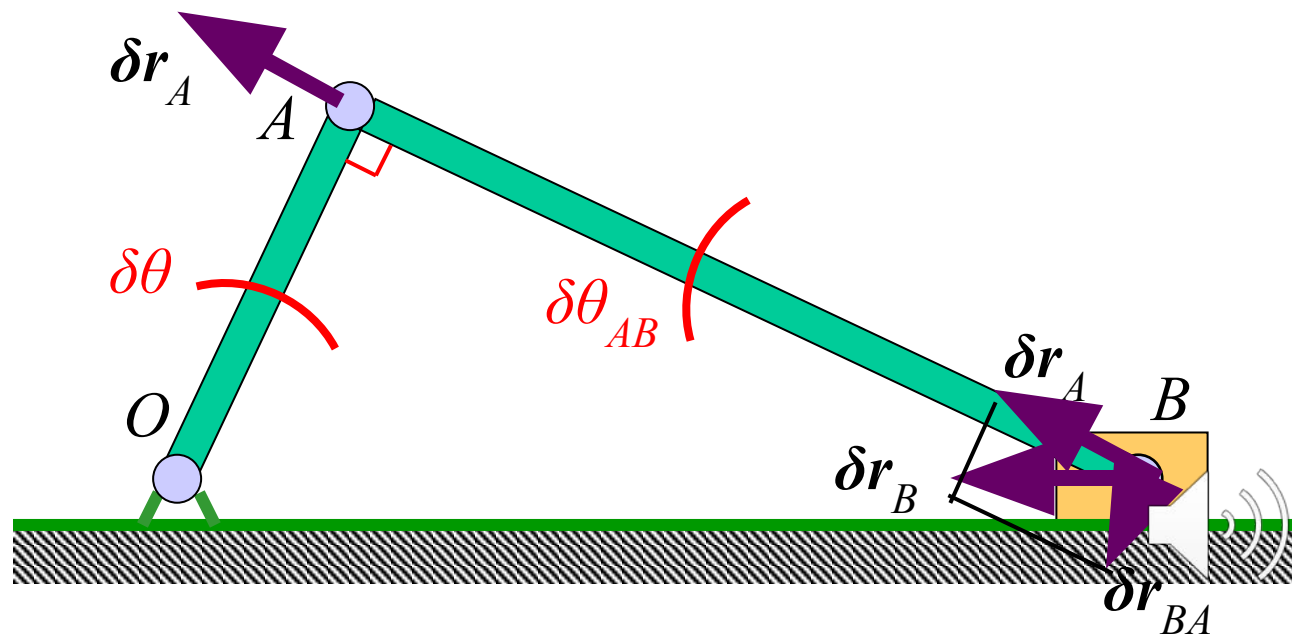
刚体平面运动的基点法

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$



虚位移关系等同于速度关系。

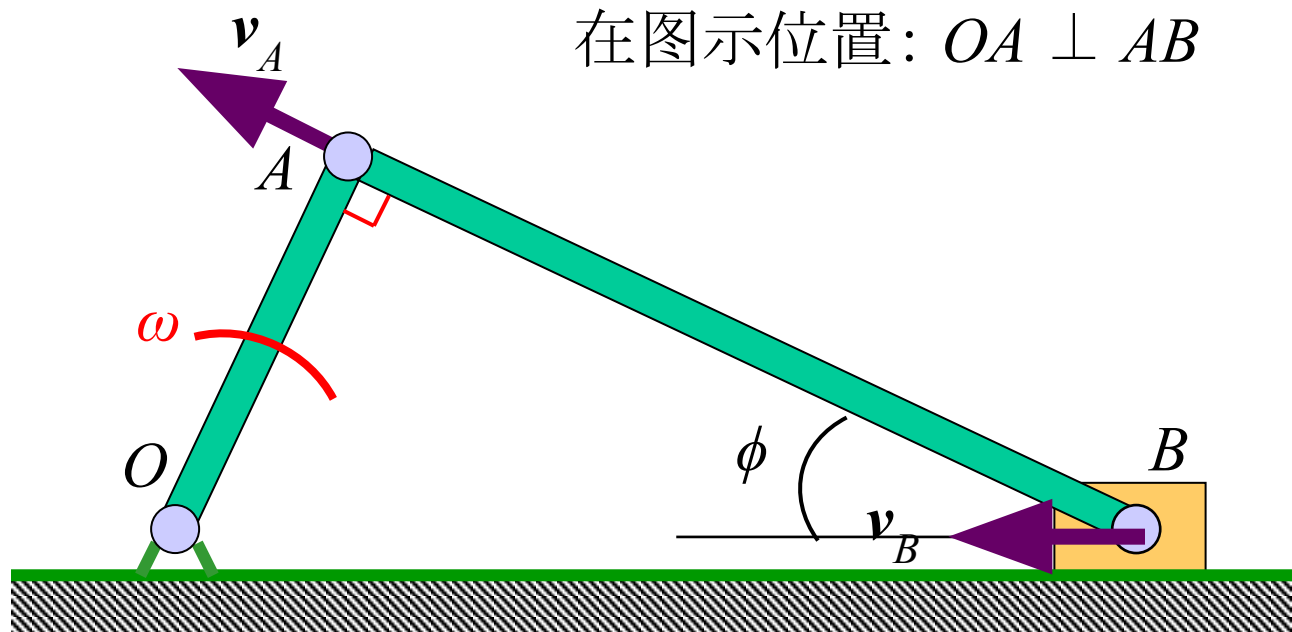
$$\delta \mathbf{r}_B = \delta \mathbf{r}_A + \delta \mathbf{r}_{BA}$$



速度投影定理

$$v_A = v_B \cos \varphi$$

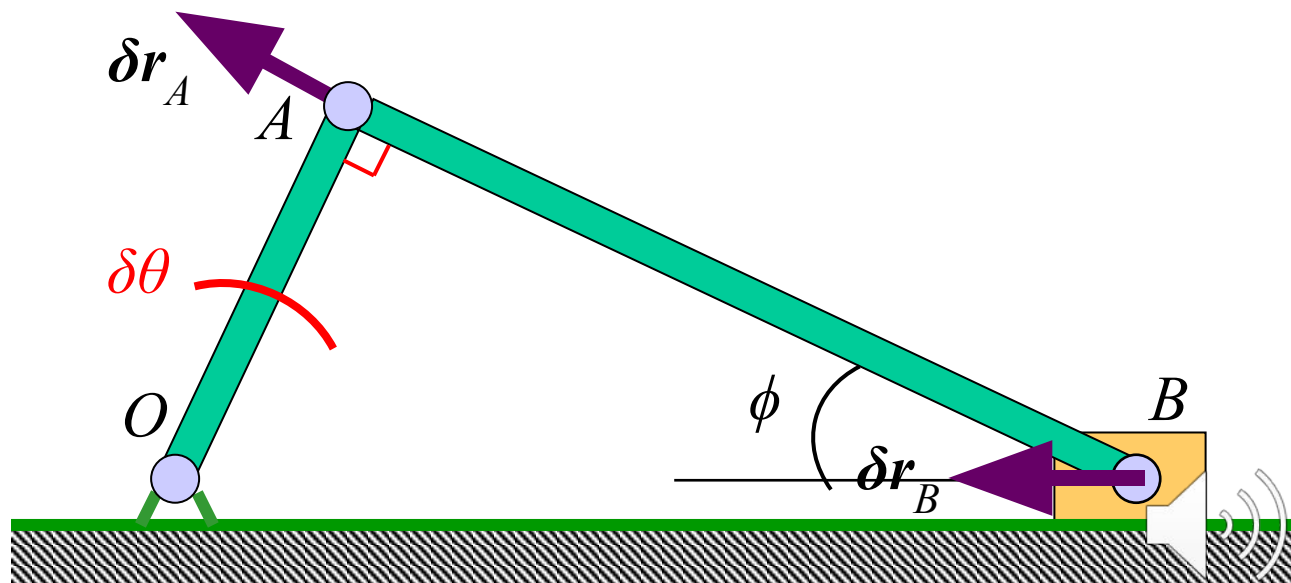
$$v_A = \omega \cdot \overline{OA}$$



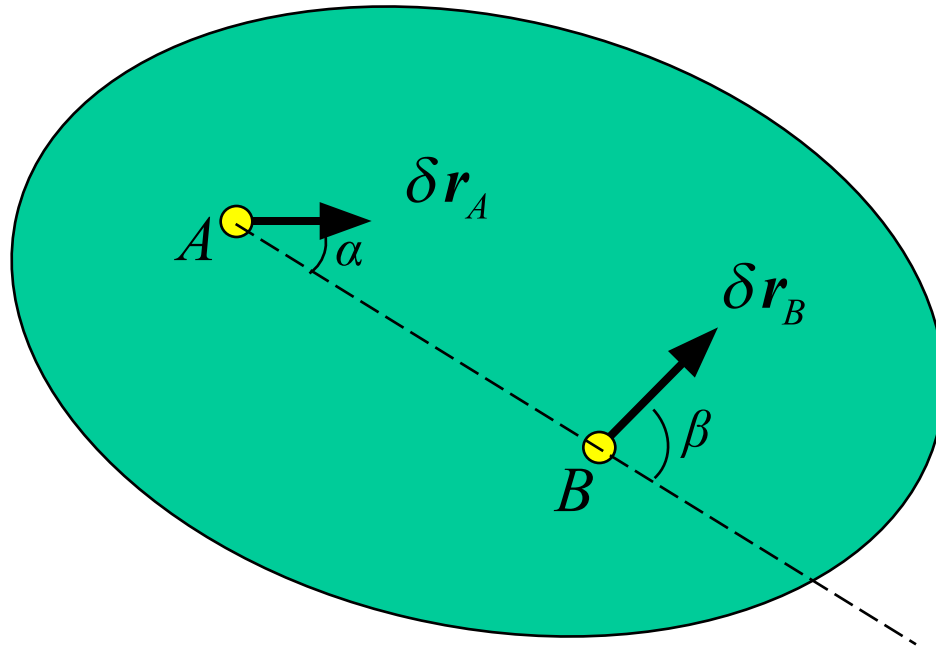
虚位移关系等同于速度关系。

$$\delta r_A = \delta r_B \cos \varphi$$

$$\delta r_A = \delta \theta \cdot \overline{OA}$$



投影定理： 刚体上任意两点的虚位移在两点连线上的投影相等。

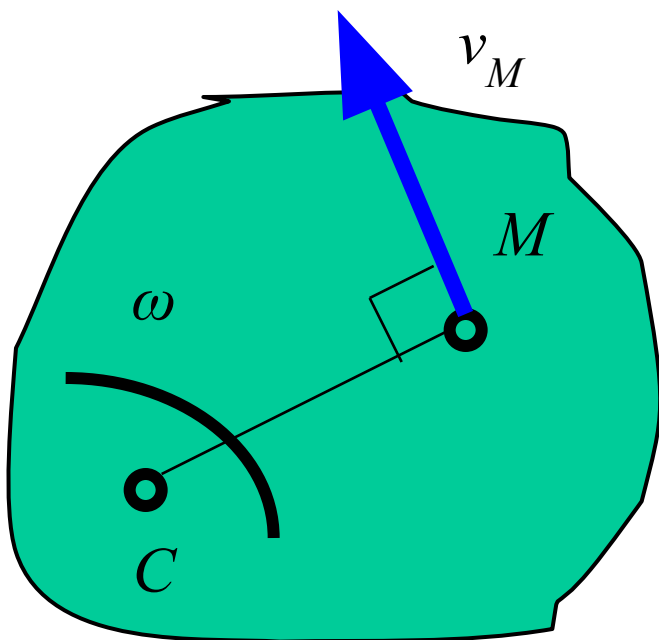


$$\delta r_A \cdot \cos \alpha = \delta r_B \cdot \cos \beta$$

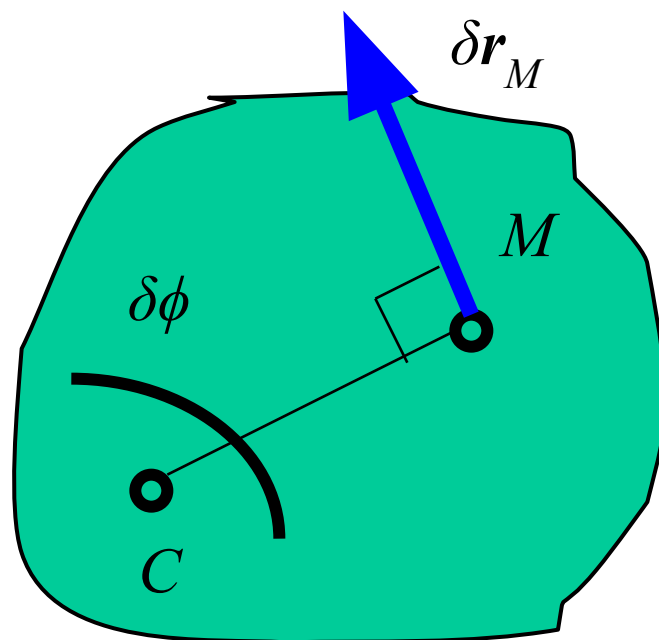


利用速度瞬心求各点的速度

在任意瞬时，平面图形的运动都可以视为绕速度瞬心的**瞬时定轴转动**，因此求各点的速度与刚体绕定轴转动情况完全相同。

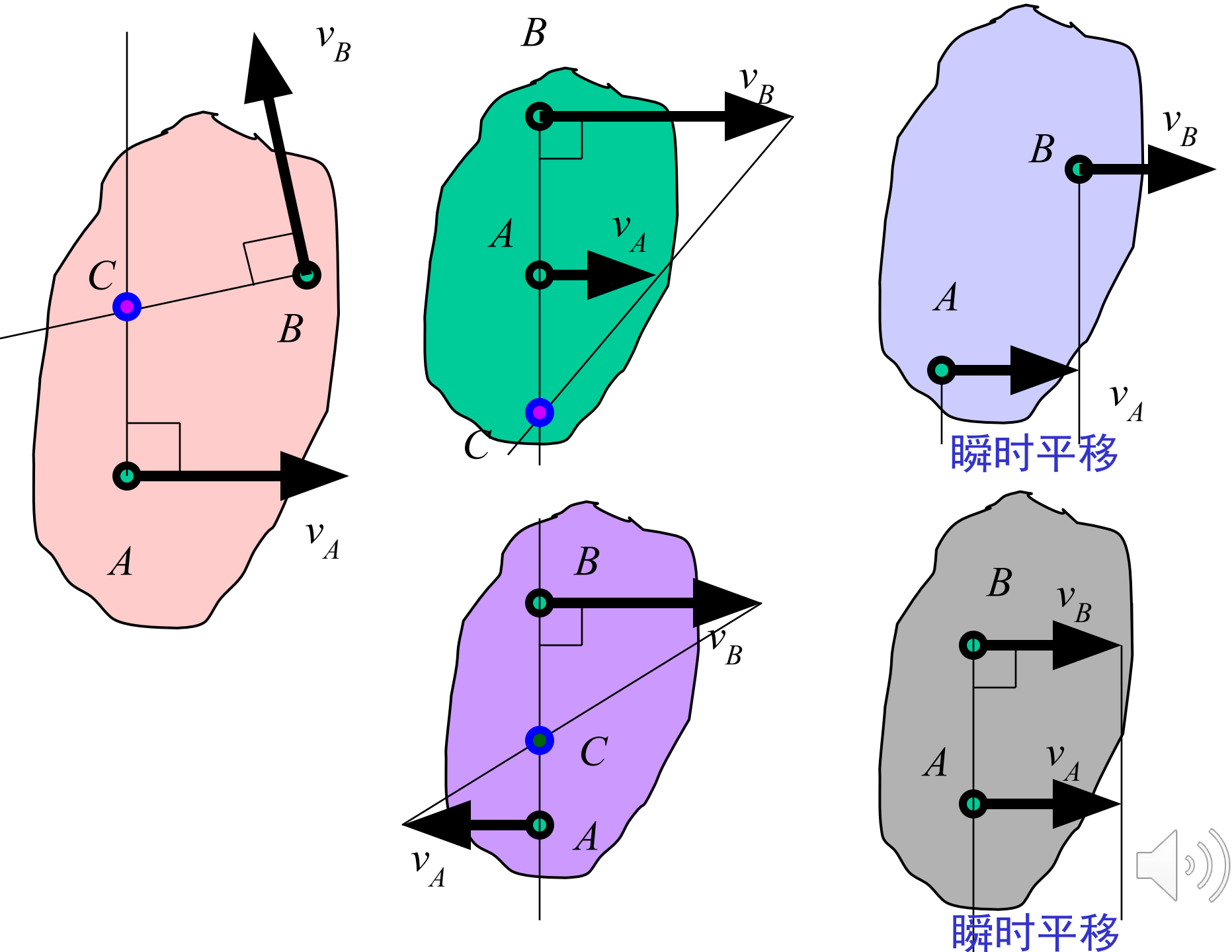


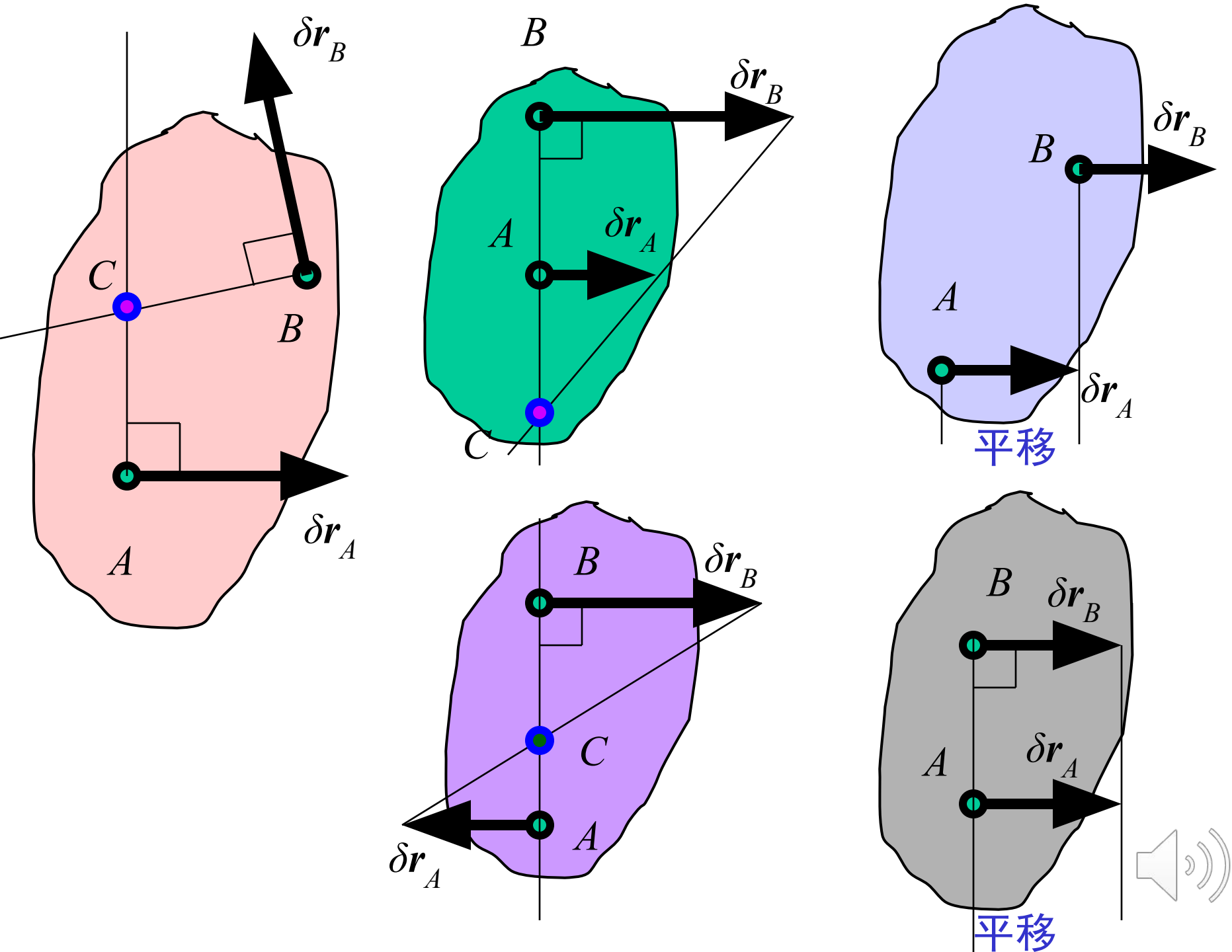
$$v_M = \omega \cdot CM$$



$$\delta r_M = \delta\phi \cdot CM$$

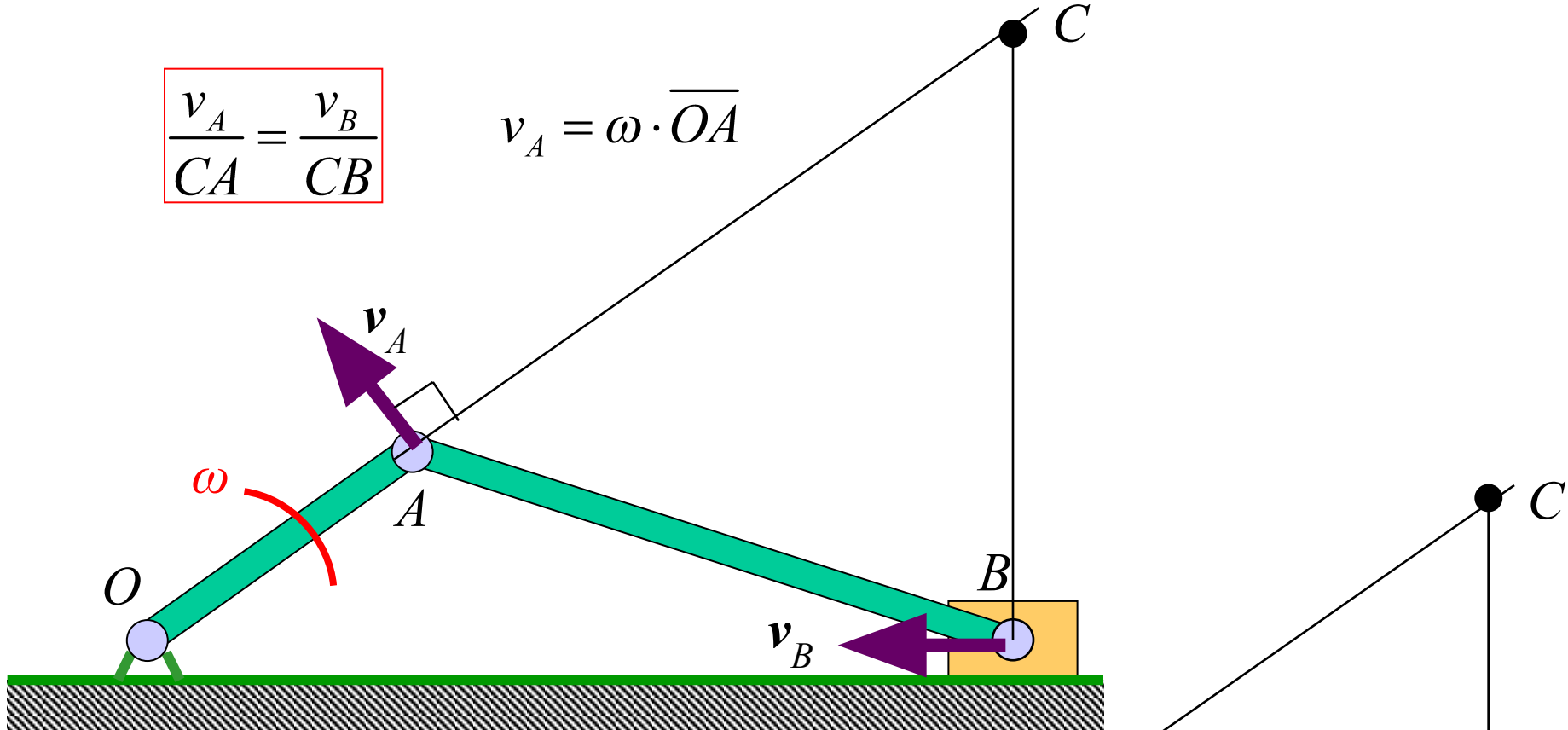






$$\frac{v_A}{CA} = \frac{v_B}{CB}$$

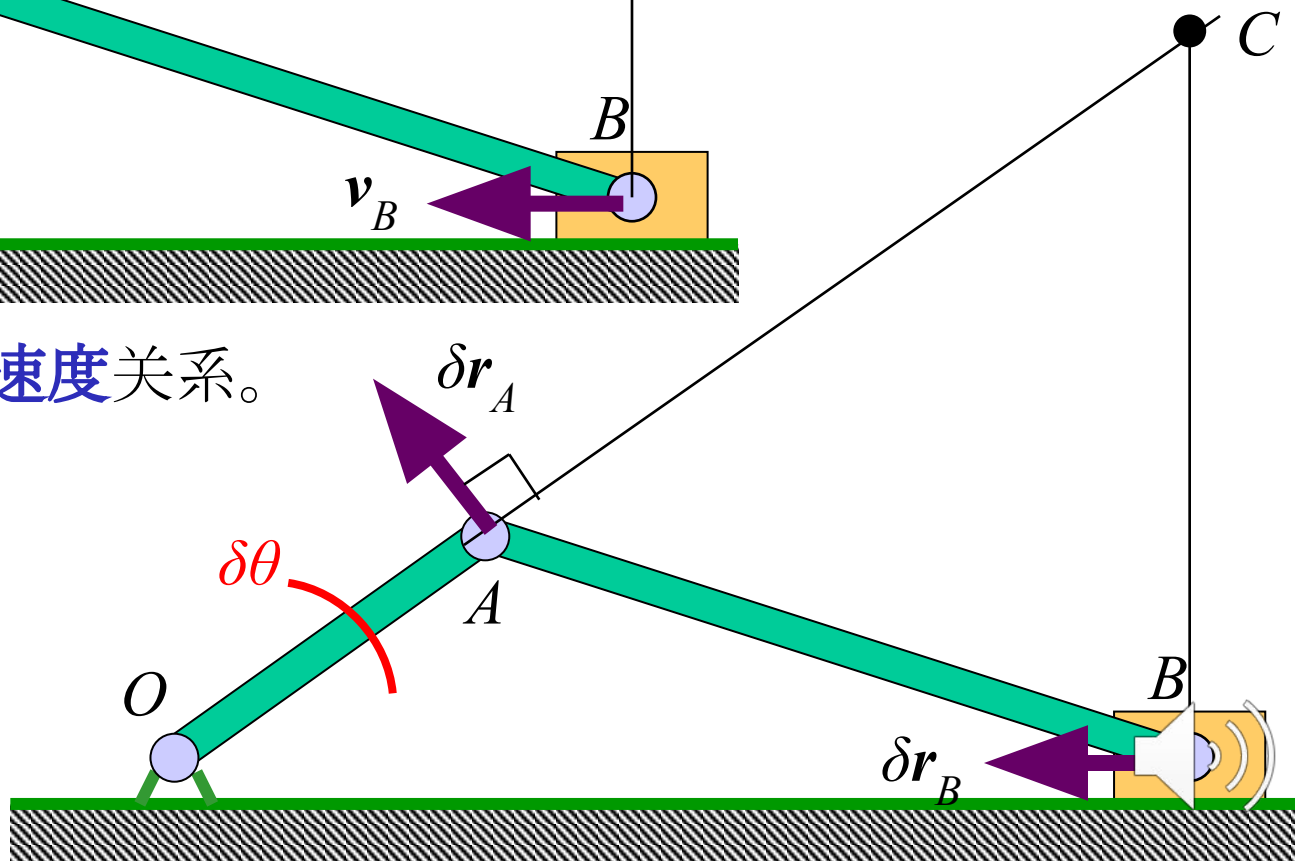
$$v_A = \omega \cdot \overline{OA}$$



虚位移关系等同于速度关系。

$$\frac{\delta r_A}{CA} = \frac{\delta r_B}{CB}$$

$$\delta r_A = \delta\theta \cdot \overline{OA}$$



§4-6 虚位移原理

一、虚位移原理

虚位移原理：具有双面、完整、定常、**理想约束**的静止的质点系，在给定位置保持平衡的**充要条件**是：该质点系所有主动力在系统的**任何**虚位移上所作的虚功之和等于零。

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = 0$$

虚位移原理是静力学的普遍原理，它给出了质点系平衡的**充分和必要**条件。



例1: 已知 P , 轮轴光滑, 绳与轮无相对滑动, 求平衡时 F .

解: 设点 B 有虚位移 δs_B

则重物 A 虚位移 $\delta s_A = \frac{1}{2} \delta s_B$

由虚位移原理, 有:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \delta W_F + \delta W_P$$

$$= F \cdot \delta s_B - P \cdot \delta s_A = \left(F - \frac{1}{2} P \right) \delta s_B$$

$$= 0$$



$$F = \frac{1}{2} P$$

