ЧМ МНП

преподаватель: Попушина Екатерина Сергеевна (popushina@imec.msu.ru)

группа во вконтакте:

https://vk.com/krint2017

(метка «ЧМ»)

Занятия проходят по четвергам

Другие дни: в среду 1 пара в ГК, суббота с 1 по 3 пары в УЛК

Постановка задачи. Найти решение $u(x,t)$ уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t) \tag{1}$$

в ограниченной области $D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$,

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничному условию

$$u(0,t) = \alpha(t) \tag{3}$$

Здесь x – пространственная координата, t – время, $a = const > 0$ – скорость переноса, $T = const$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\alpha(t)$ – заданные гладкие функции, причем $\varphi(0) = \alpha(0)$. Функция $f(x,t)$ задана во всей области D, включая ее границы.

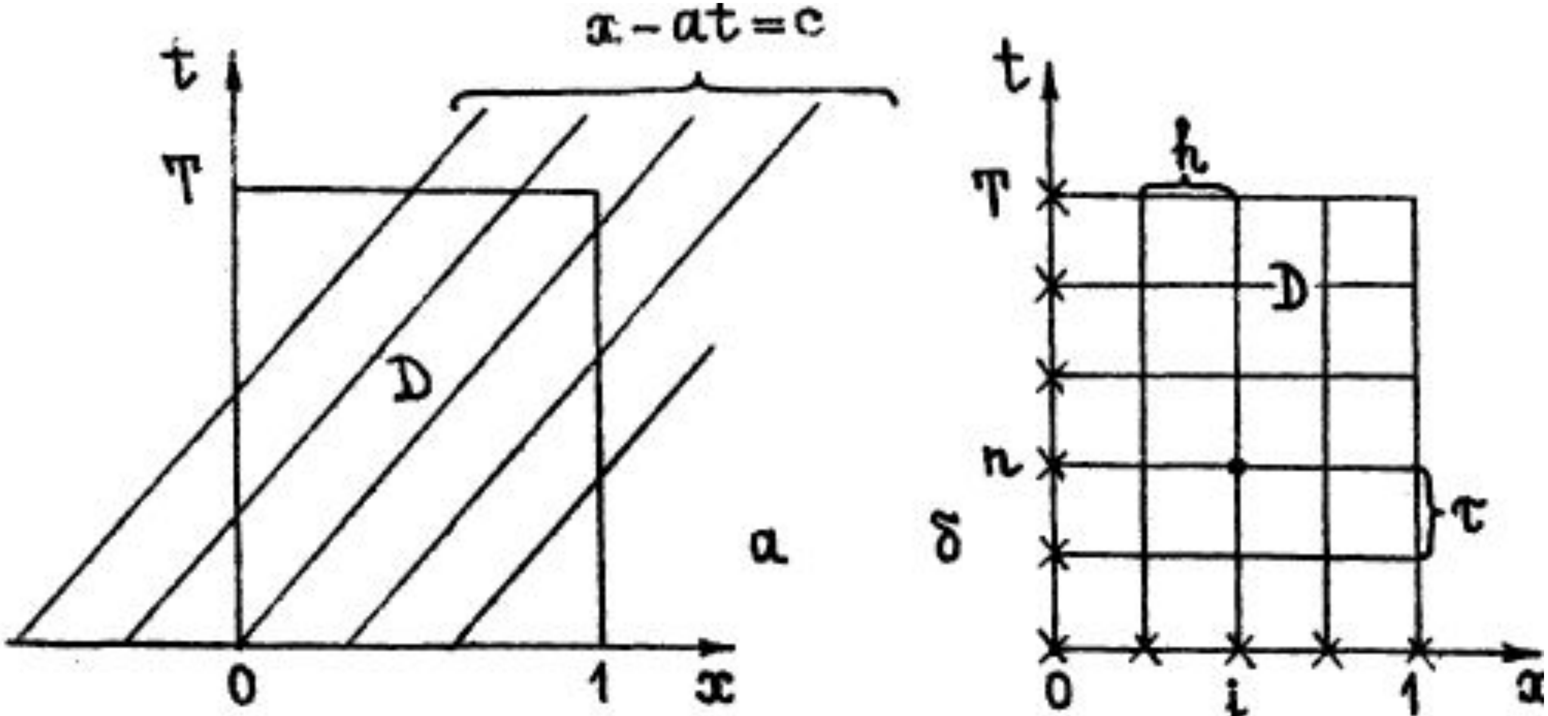


Рис. I

Аналитическое решение

$$x = x(s), \quad t = t(s), \tag{24}$$

где s – некоторый параметр.

Тогда

$$u(x,t) = u\big(x(s), t(s)\big) = u(s).$$

Производная du/ds записывается следующим образом:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds}. \tag{25}$$

Рассмотрим два случая.

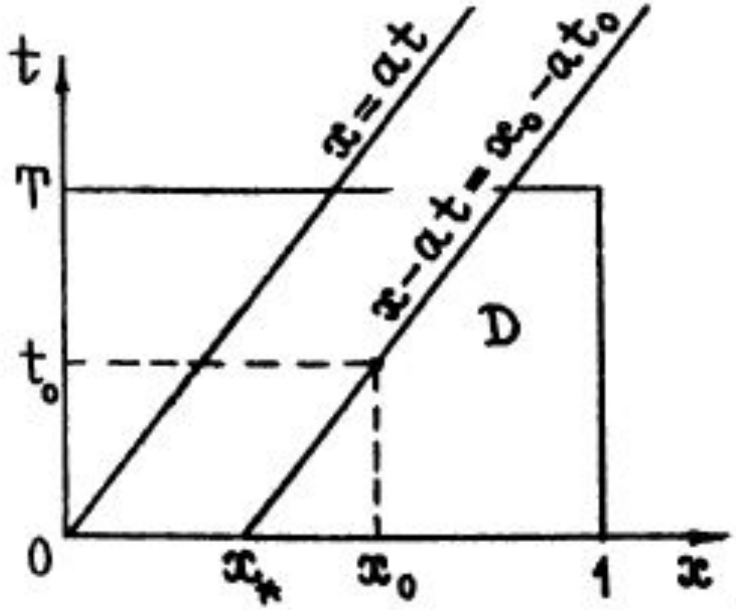


Рис. 5

Случай I. Координата точки (x_0, t_0), в которой ищется решение, удовлетворяет неравенству $x_0 > at_0$. В этом случае точка (x_0, t_0) в плоскости (x, t) находится под прямой $x = at$ (рис.5).

Сравнивая (I) и (25), видим, что вдоль кривой /см.формулу (24)/ уравнение с частными производными первого порядка (I) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению того же порядка, если будут выполнены следующие равенства:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = a. \tag{26}$$

Пусть $s = t$. Тогда из второго уравнения (26) имеем

$$x - at = \text{const} = x_0 - at_0 = x_*, \tag{27}$$

где x_* - абсцисса точки пересечения прямой $x - at = x_0 - at_0$ с осью x (см.рис.5).

Прямая (27) является характеристикой уравнения (I).

Учитывая (I), (25), (26), вдоль характеристики (27), т.е. при $x(t)=at+x_*$, имеем уравнение

$$\frac{du}{dt}=f(x(t),t). \tag{28}$$

Интегрируя (28) от 0 до t_0, получаем

$$u(x_0,t_0)=\int_0^{t_0} f(x(t),t)\,dt+u(x(0),0), \tag{29}$$

где $x(t)=at+x_*$. Так как $x(0)=x_*$, то в соответствии с (2) имеем $u(x_*,0)=\varphi(x_*)=\varphi(x_0-at_0)$.

В результате получаем формулу

$$u(x_0,t_0)=\int_0^{t_0} f(x(t),t)\,dt+\varphi(x_0-at_0), \tag{30}$$

где $x(t)=at+x_*$. Формула (30) представляет собой решение задачи (I)–(3) в случае I.

Случай 2. Координаты точки (x_0, t_0) удовлетворяют неравенству $x_0 < at_0$, т.е. точка (x_0, t_0) в плоскости (x,t) находится выше характеристики $x = at$ (рис. 6).

Уравнение (I) представим в виде

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a} f(x,t). \qquad (31)$$

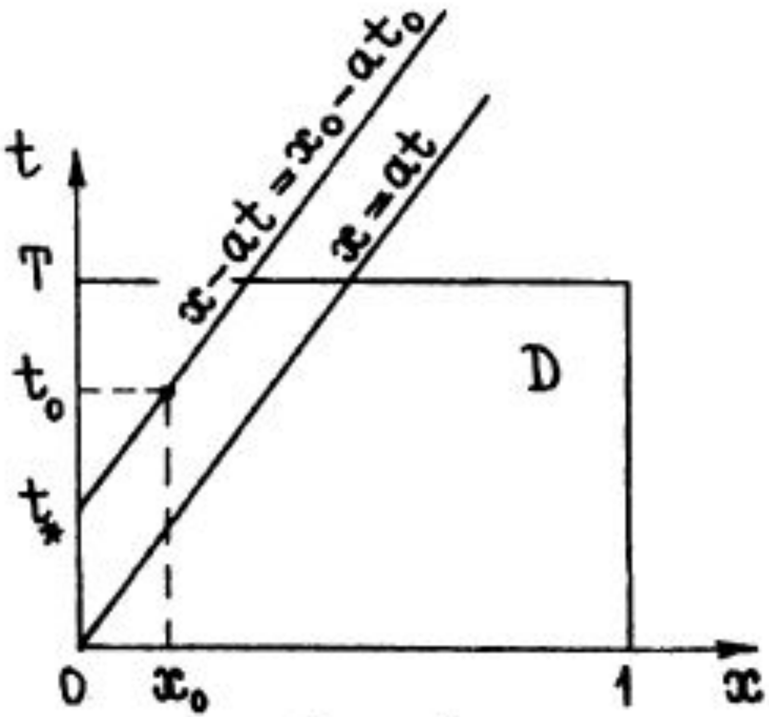


Рис. 6

В результате из выражения (35) находим решение задачи (I)-(3) в случае 2

$$u(x_0,t_0)=\frac{1}{a}\int_0^{x_0} f(x,t(x))\,dx+\alpha\left(t_0-\frac{x_0}{a}\right), \quad (36)$$

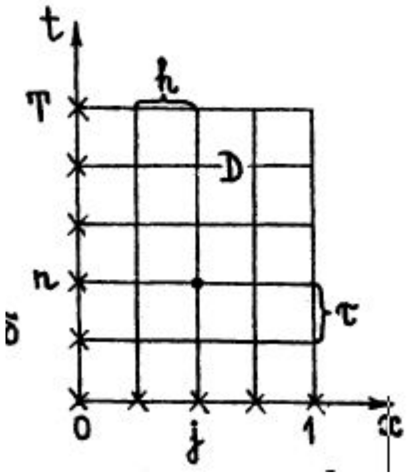
где $t(x)=x/a+t_*$.

$$u(x_0,t_0)=\int_0^{t_0} f(x(t),t)\,dt+\varphi(x_0-at_0), \quad (30)$$

где $x(t)=at+x_*$. Формула (30) представляет собой решение задачи (I)-(3) в случае I.

Численное решение

Сетка



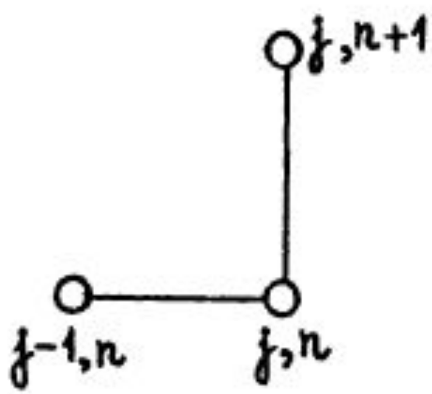
Норма $\|y\|_h = \max_{\Omega_h} |y_j^n|.$

Аппроксимация

$$\frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau},$$

$$\frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial x} \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}.$$

Шаблон



$$(L_h y)_j^{n+1} \equiv \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} + a\,\frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{h} = \tilde{f}_j^{\,n+1}$$

$$l_h y = \mu_h ,$$

$$\mu_h = \begin{cases} \varphi(x_j), & x = x_j,\ t = 0,\ j = 0, 1, \ldots, M \\ \alpha(t_n), & x = 0,\ t = t_n,\ n = 1, 2, \ldots, N \end{cases}$$

2.3. Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость. Очевидно, что решение u дифференциальной задачи (I)–(3) в общем случае не удовлетворяет на сетке Ω_h разностным уравнениям (9). Однако всегда можно написать равенства

$$L_h u_h = \tilde{f} + \delta\tilde{f} \quad \text{на} \quad \Omega'_h, \tag{I0}$$

$$l_h u_h = \mu_h + \delta\mu_h \quad \text{на} \quad \Omega^\gamma_h,$$

где $\delta\tilde{f} = L_h u_h - \tilde{f}$, $\delta\mu_h = l_h u_h - \mu_h$ – сеточные функции.

Определение. Говорят, что разностная схема (9) аппроксимирует дифференциальную задачу (I)–(3) на ее решении u с p-м $(p>0)$ порядком относительно h и q-м $(q>0)$ порядком относительно τ, если нормы невязок решения дифференциальной задачи имеют вид

$$\|\delta\tilde{f}\|'_h = O(h^p+\tau^q), \quad \|\delta\mu_h\|^\gamma_h = O(h^p+\tau^q). \tag{II}$$

Определение. Говорят, что разностная схема (9) устойчива, если существуют такие $h_0 > 0$ и $\tau_0 > 0$, что при $h < h_0$ и $\tau < \tau_0$ выполняется следующий критерий устойчивости:

$$\| y \|_h \leq C' \| \tilde{f} \|'_h + C^{\gamma} \| \mu_h \|^{\gamma}_h , \tag{12}$$

где C' и C^{γ} - константы, не зависящие от $h, \tau, \tilde{f}, \mu_h$. Разностные схемы, устойчивые при любых h и τ ($h < h_0$, $\tau < \tau_0$), называются абсолютно устойчивыми; схемы, устойчивые лишь при некотором ограничении на отношение шагов сетки по пространству и по времени, - условно устойчивыми.

Определение. Говорят, что решение y разностной схемы (9) сходится при измельчении сетки к решению u дифференциальной задачи (I)-(3) с p-м ($p>0$) порядком относительно h и q-м ($q>0$) порядком относительно τ, если

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \tau\to 0}} \|u_h - y\|_h = 0,$$

причем существуют такие положительные числа h_0, τ_0, c, что при всех $h<h_0$, $\tau<\tau_0$ выполняется неравенство

$$\|u_h - y\|_h \leq c\cdot(h^p+\tau^q).$$

В этом случае говорят также, что разностная схема имеет p-й порядок точности по h и q-й порядок точности по τ.

Теорема сходимости. Пусть: I) разностная схема (9) аппроксимирует исходную задачу (I)-(3) на ее решении u с p-м порядком по h и q-м порядком по τ; 2) разностная схема (9) устойчива. Тогда решение разностной задачи y сходится к решению u исходной задачи (I)-(3) с p-м порядком относительно h и q-м порядком относительно τ.