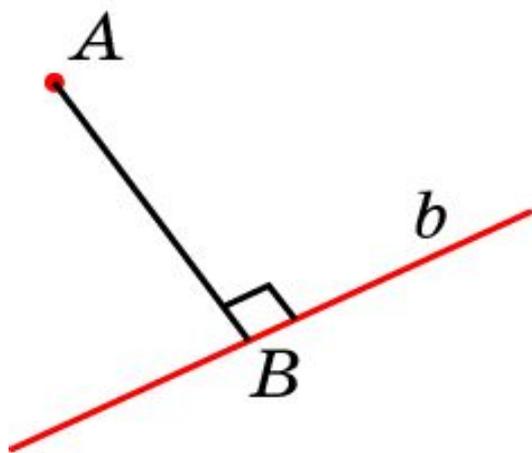


206. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО  
ПРЯМОЙ  
(Куб, пирамида)

Расстоянием от точки до прямой в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

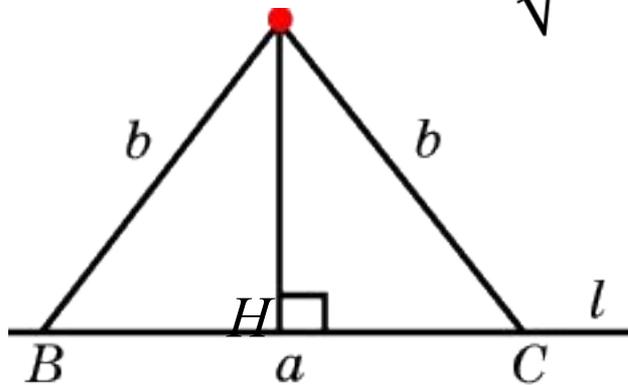


## Нахождение расстояний от точки до прямой

Для нахождения расстояния от точки  $A$  до прямой  $l$  перпендикуляр  $AH$ , опущенный из данной точки на данную прямую, представляют в качестве высоты треугольника, одной вершиной которого является точка  $A$ , а сторона  $BC$ , противолежащая этой вершине, лежит на прямой  $l$ . Зная стороны этого треугольника, можно найти и его высоту.

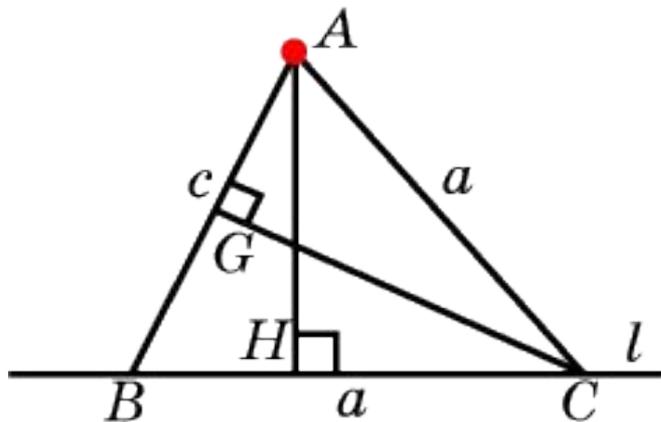
При этом возможны следующие случаи:

1. Треугольник  $ABC$  – равнобедренный,  $AB = AC$ . Пусть  $AB = AC = b$ ,  $BC = a$ . Искомый перпендикуляр находится из прямоугольного треугольника  $ABH$ :  $AH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ .

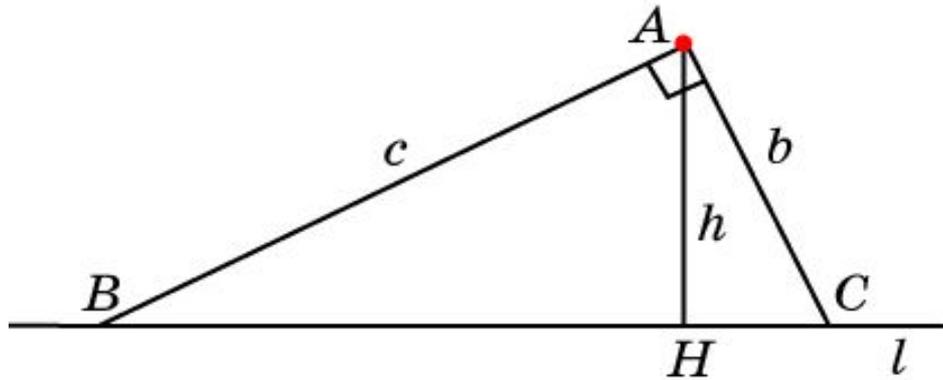


2. Треугольник  $ABC$  – равнобедренный,  $AC = BC$ . Пусть  $AB = c$ ,  $AC = BC = a$ . Найдем высоту  $CG$ .  $CG = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$ . Площадь треугольника  $ABC$  равна  $\frac{1}{2} AB \cdot CG = \frac{1}{2} c \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{4}$ .

С другой стороны, площадь этого треугольника равна  $\frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} a \cdot AH$ . Приравняв первое и второе значения площади, получим значение искомого перпендикуляра  $AH = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a}$ .



3. Треугольник  $ABC$  – прямоугольный, угол  $A$  – прямой. Пусть  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Тогда гипотенуза  $BC$  равна  $\sqrt{b^2 + c^2}$ . Удвоенная площадь треугольника  $ABC$ , с одной стороны, равна  $bc$ , а с другой  $h\sqrt{b^2 + c^2}$ . Следовательно,

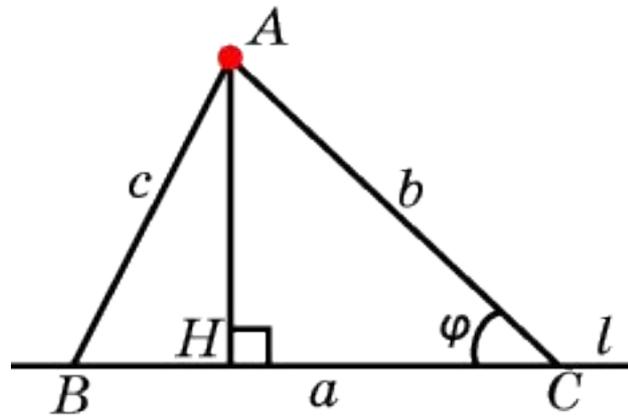
$$h = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$


4. Треугольник  $ABC$  – произвольный.

Пусть  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ ,  $\angle ACB = \varphi$ . По теореме косинусов имеет место равенство  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$ .

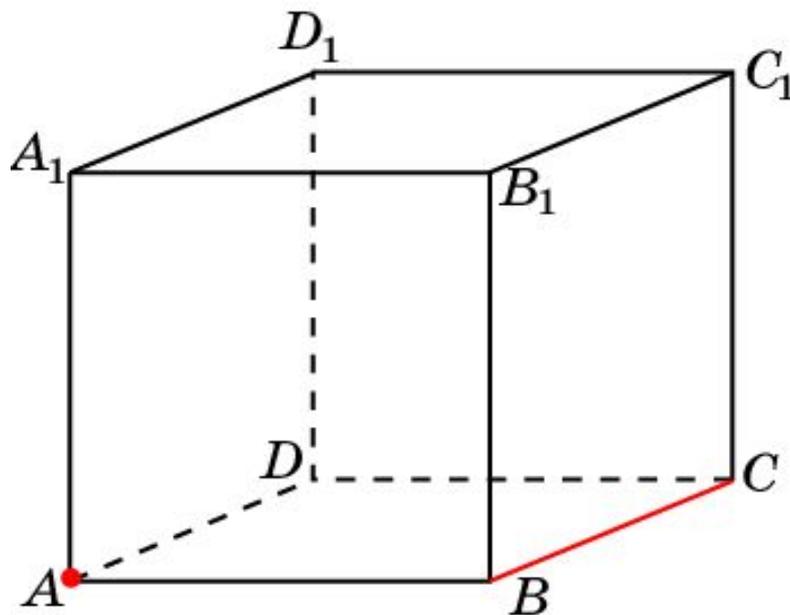
Откуда  $\cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ . Зная косинус угла, можно найти его синус

$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ , а зная синус, можно найти высоту  $AH = b \cdot \sin \varphi$ .



## Упражнение 1

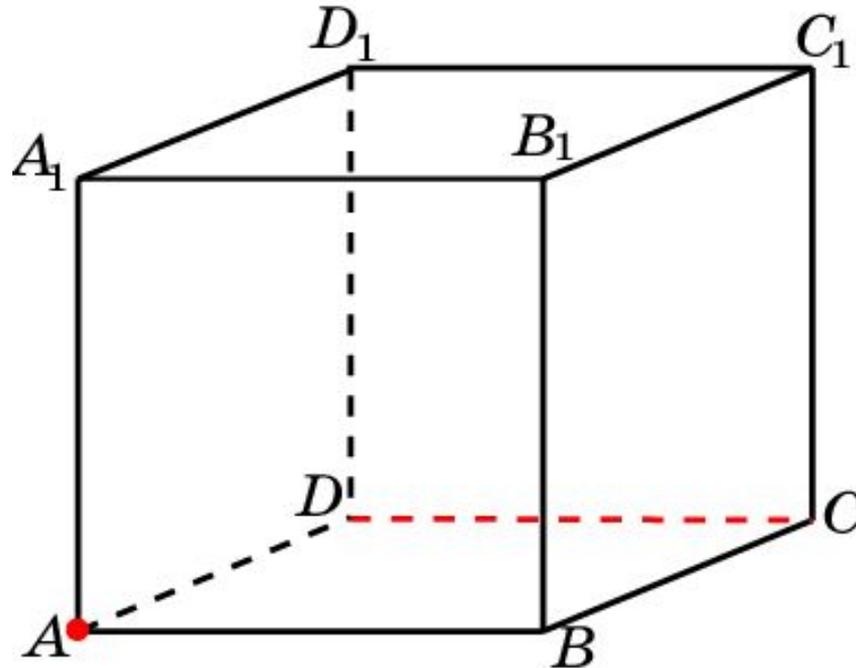
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC$ .



Ответ: 1.

## Упражнение 2

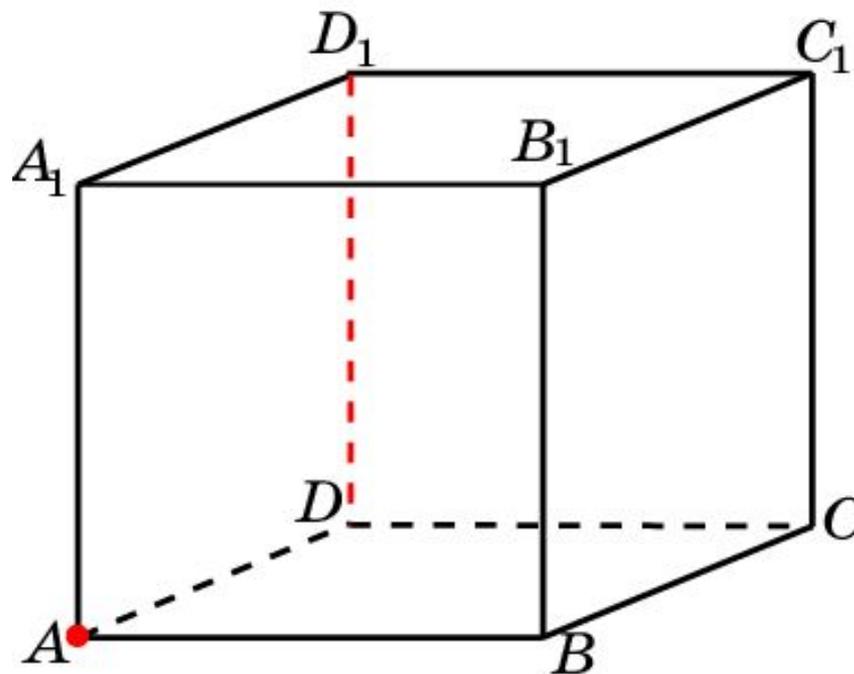
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CD$ .



Ответ: 1.

### Упражнение 3

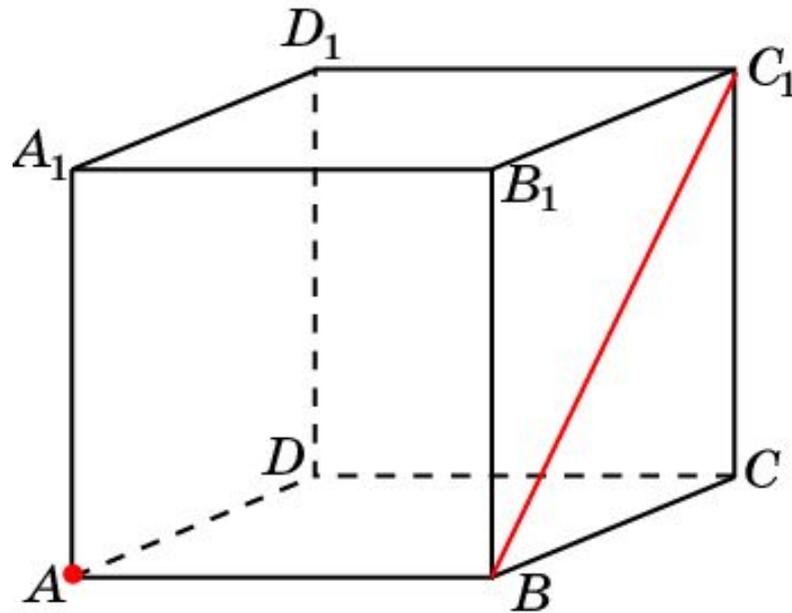
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $DD_1$ .



Ответ: 1.

## Упражнение 4

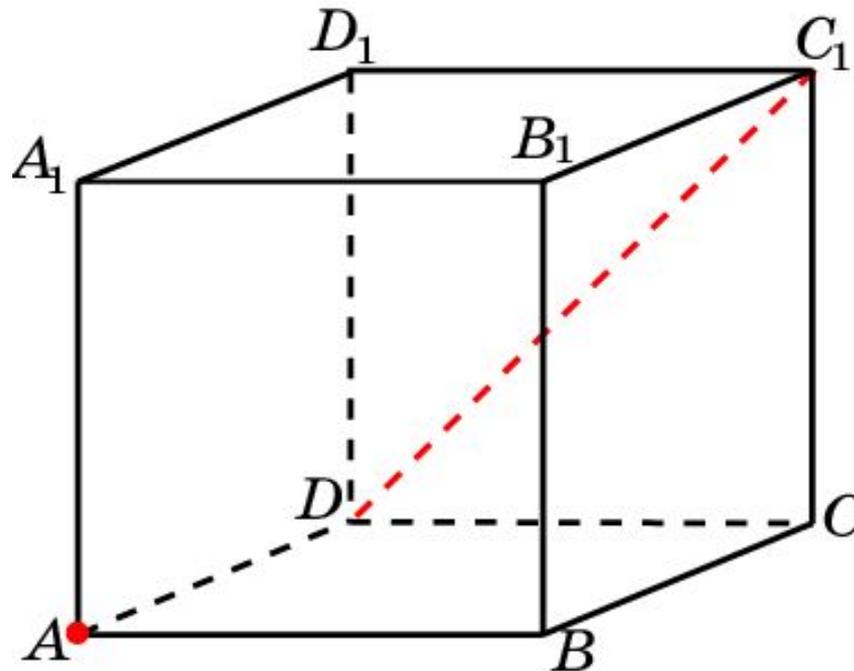
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC_1$ .



Ответ: 1.

## Упражнение 5

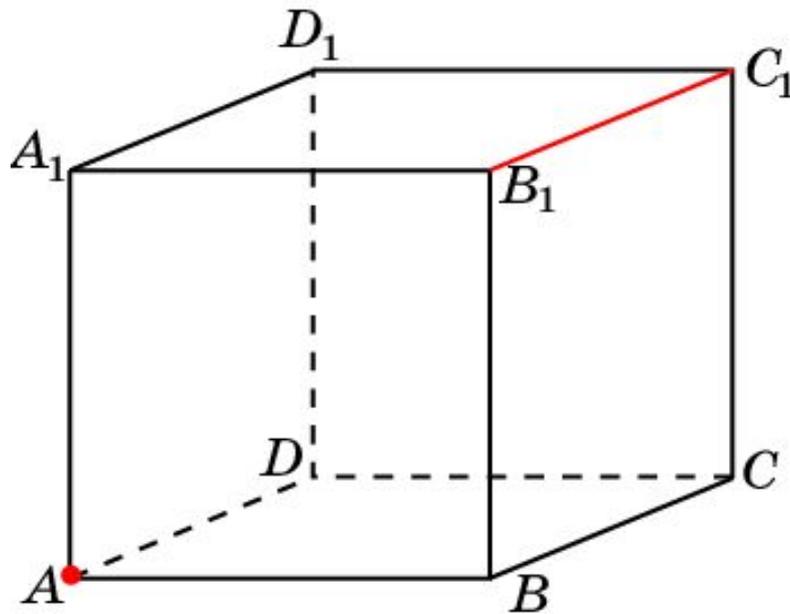
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $DC_1$ .



Ответ: 1.

## Упражнение 6

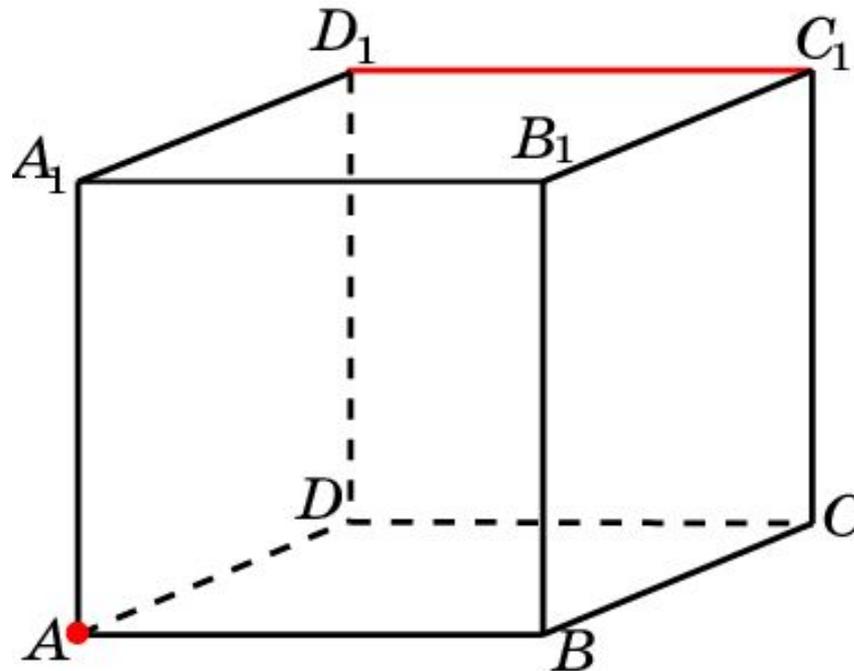
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1 C_1$ .



Ответ:  $\sqrt{2}$ .

## Упражнение 7

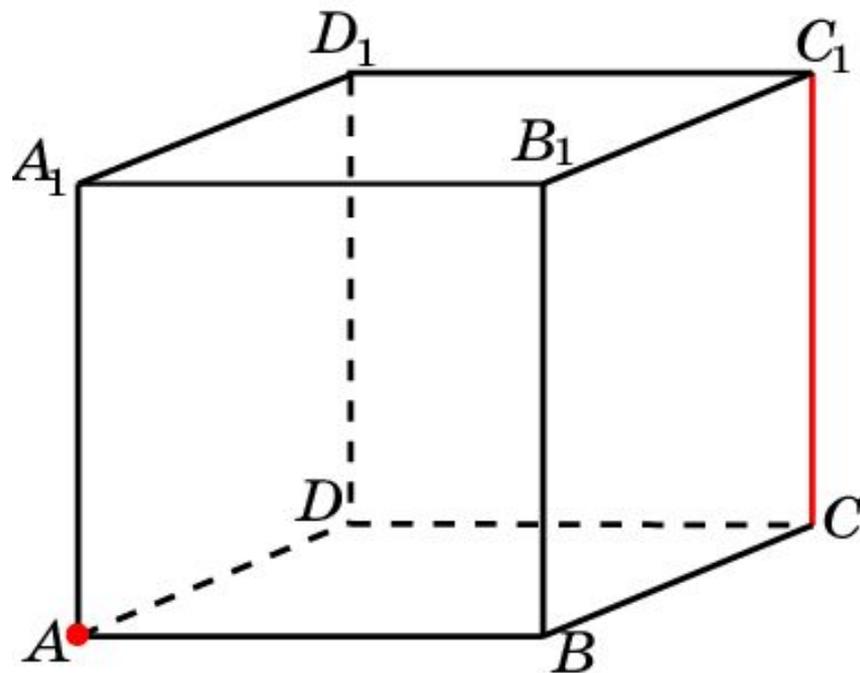
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $C_1 D_1$ .



Ответ:  $\sqrt{2}$ .

## Упражнение 8

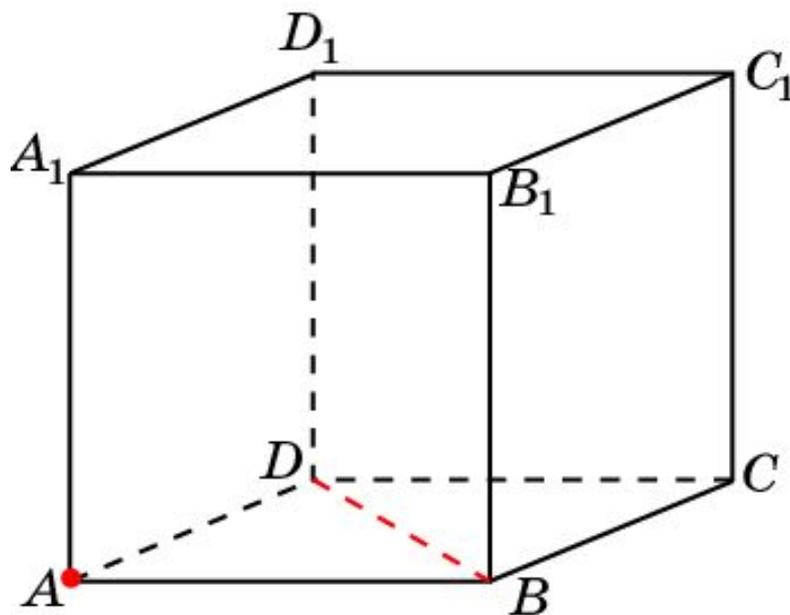
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CC_1$ .



Ответ:  $\sqrt{2}$ .

## Упражнение 9

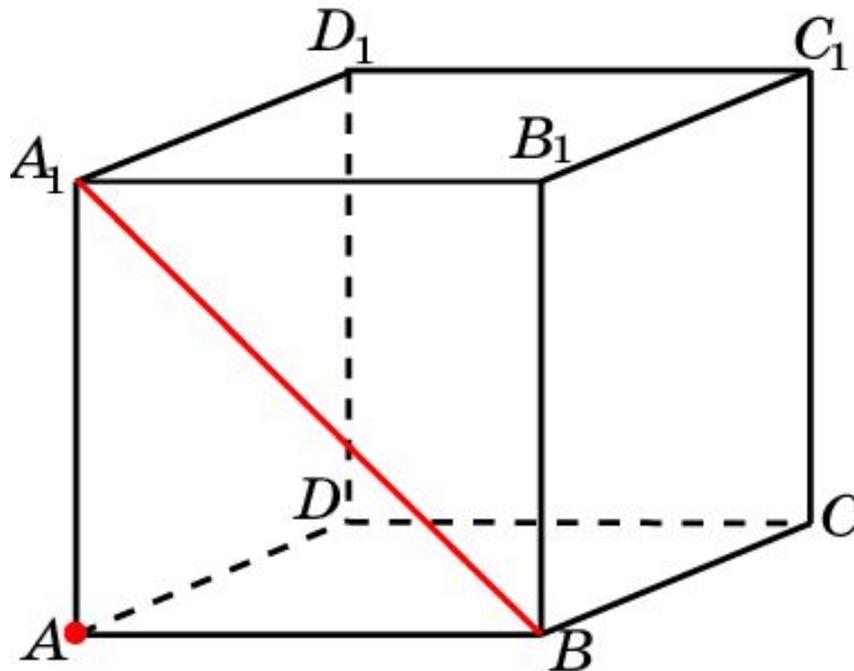
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BD$ .



Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Упражнение 10

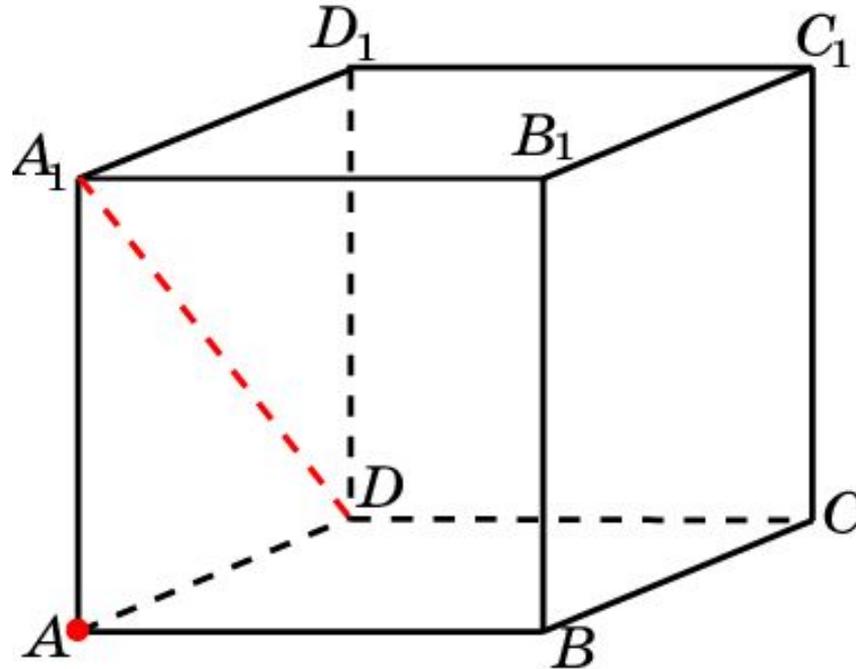
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BA_1$ .



Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Упражнение 11

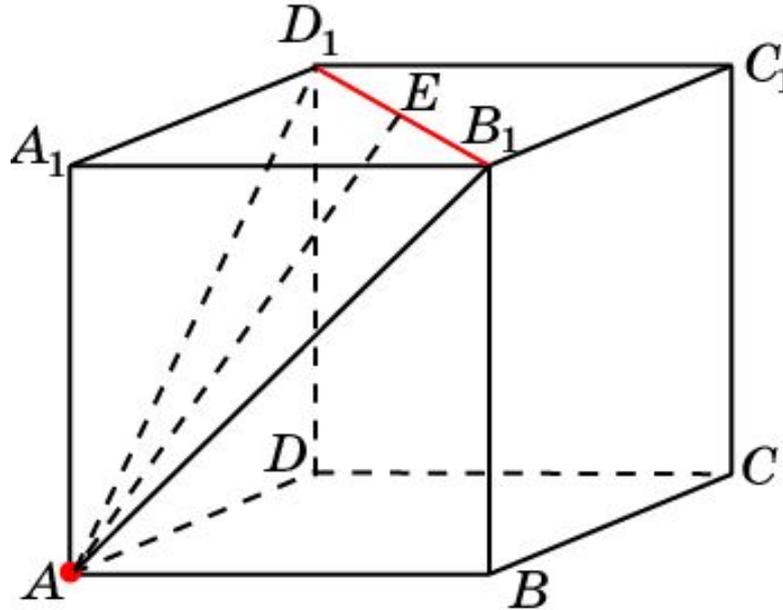
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $DA_1$ .



Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Упражнение 12

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1 D_1$ .



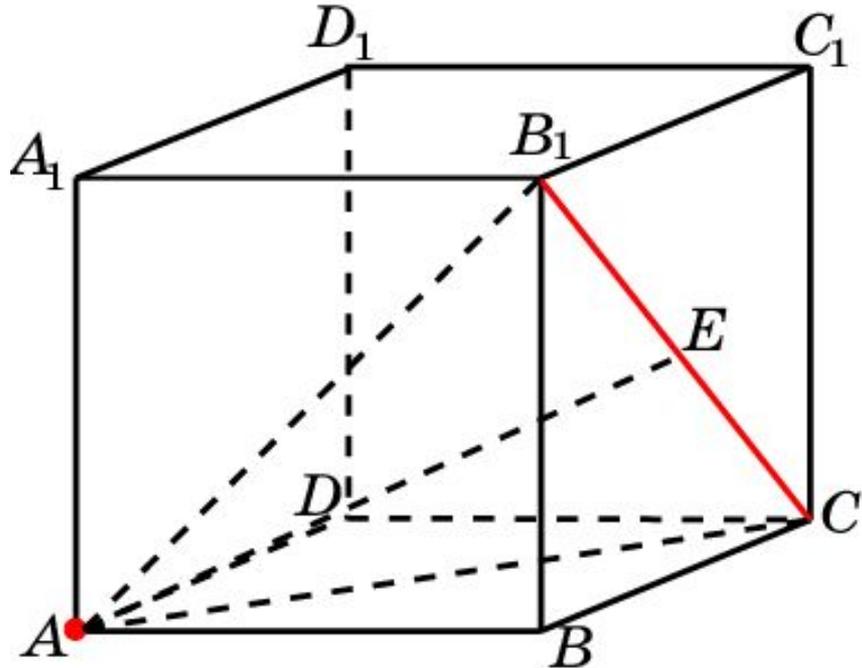
**Решение:** Искомое расстояние равно высоте  $AE$  равностороннего треугольника  $AB_1 D_1$ . Имеем,  $AB_1 = AD_1 = B_1 D_1 = \sqrt{2}$ .

Следовательно,  $AE = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

## Упражнение 13

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CB_1$ .



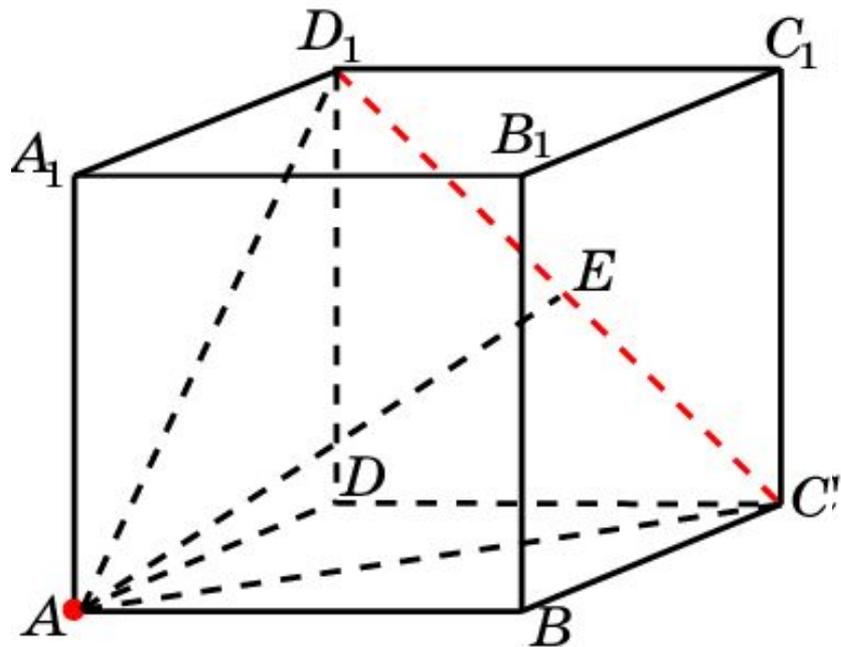
**Решение:** Искомое расстояние равно высоте  $AE$  равностороннего треугольника  $ACB_1$ . Имеем,  $AC = AB_1 = CB_1 = \sqrt{2}$ .

Следовательно,  $AE = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

## Упражнение 14

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CD_1$ .



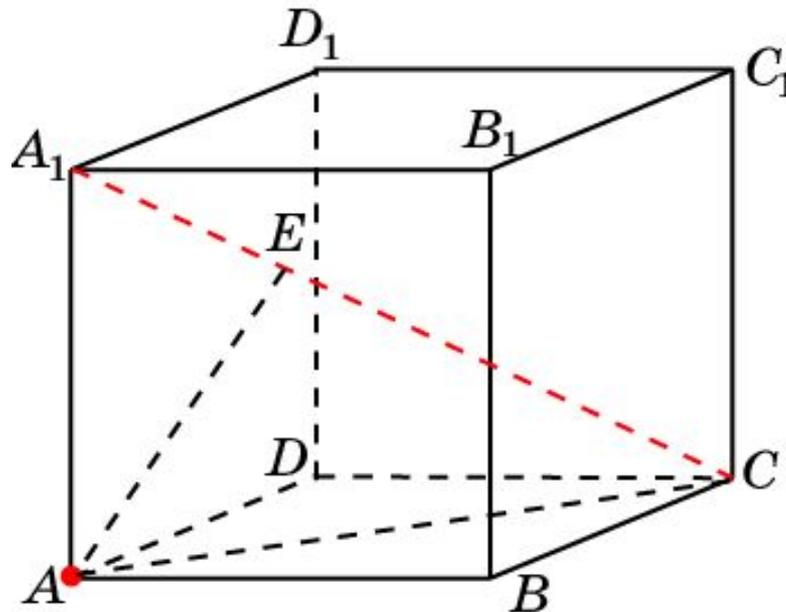
**Решение:** Искомое расстояние равно высоте  $AE$  равнобедренного треугольника  $ACD_1$ . Имеем,  $AC = AD_1 = CD_1 = \sqrt{2}$ .

Следовательно,  $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Упражнение 15

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $A_1 C$ .



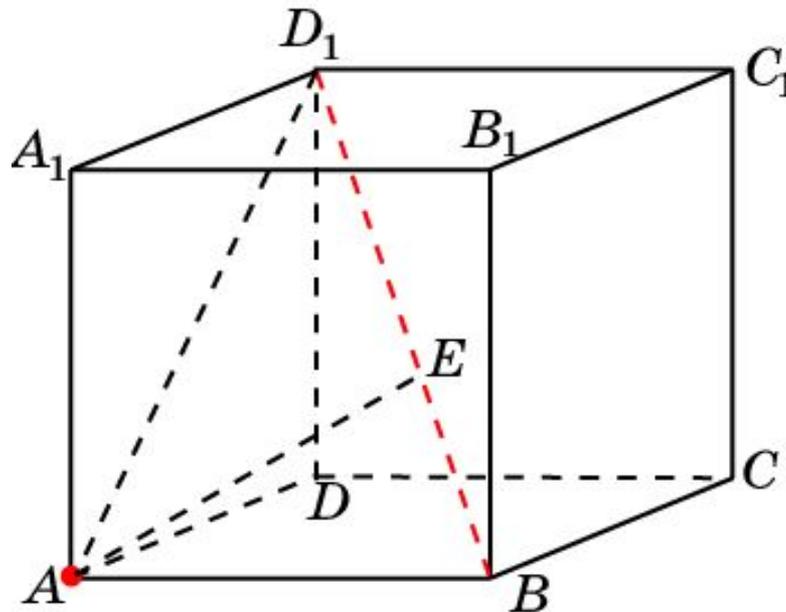
**Решение:** Искомое расстояние равно высоте  $AE$  прямоугольного треугольника  $ACA_1$ . Имеем,  $AA_1 = 1$ ,  $AC = \sqrt{2}$ ,  $CA_1 = \sqrt{3}$ .

Следовательно,  $AE = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

## Упражнение 16

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BD_1$ .



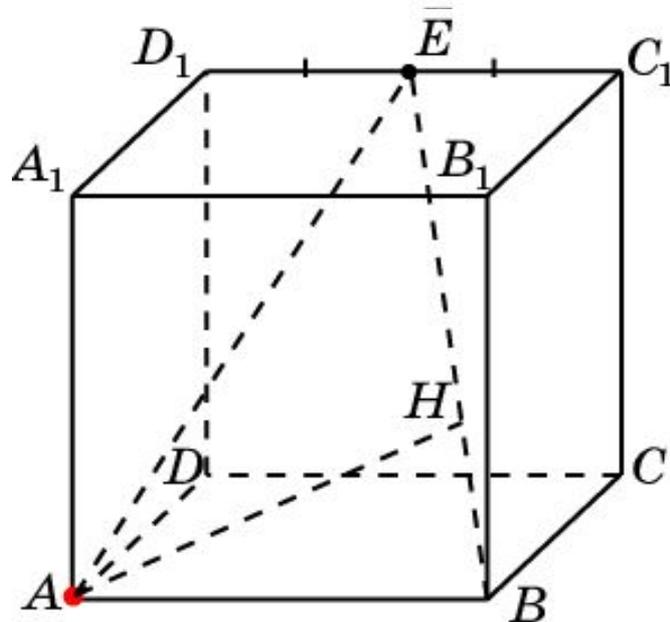
**Решение:** Искомое расстояние равно высоте  $AE$  прямоугольного треугольника  $ABD_1$ . Имеем,  $AB = 1$ ,  $AD_1 = \sqrt{2}$ ,  $BD_1 = \sqrt{3}$ .

Следовательно,  $AE = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

## Упражнение 17

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $E$  – середина ребра  $C_1 D_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BE$ .



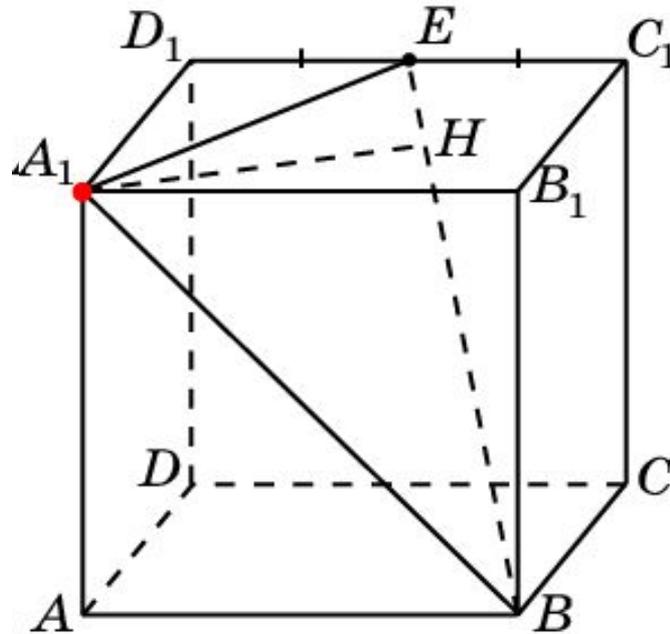
**Решение:** Искомое расстояние равно высоте  $AH$  равнобедренного треугольника  $ABE$ . Имеем,  $AB = 1$ ,  $AE = BE = 1,5$ .

Следовательно,  $AH = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

**Ответ:**  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

## Упражнение 18

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $E$  – середина ребра  $C_1 D_1$ . Найдите расстояние от точки  $A_1$  до прямой  $BE$ .



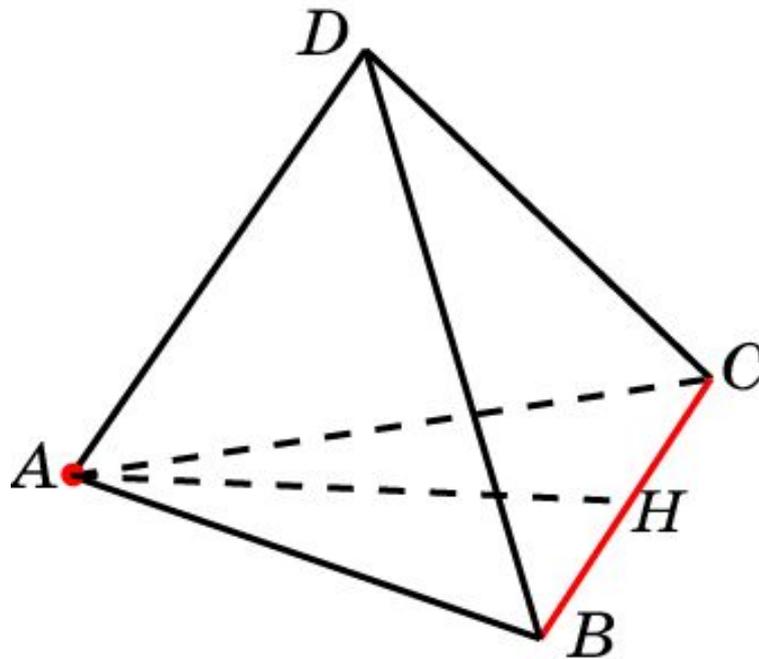
**Решение:** Искомое расстояние равно высоте  $A_1 H$  треугольника  $A_1 B E$ . Имеем,  $A_1 B = \sqrt{2}$ ,  $A_1 E = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $BE = 1,5$ .

По теореме косинусов, находим  $\cos \angle A_1 B E = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Следовательно,  $A_1 H = 1$ .

**Ответ:** 1.

## Упражнение 19

В правильном единичном тетраэдре  $ABCD$  найдите расстояние от вершины  $A$  до прямой  $BC$ .



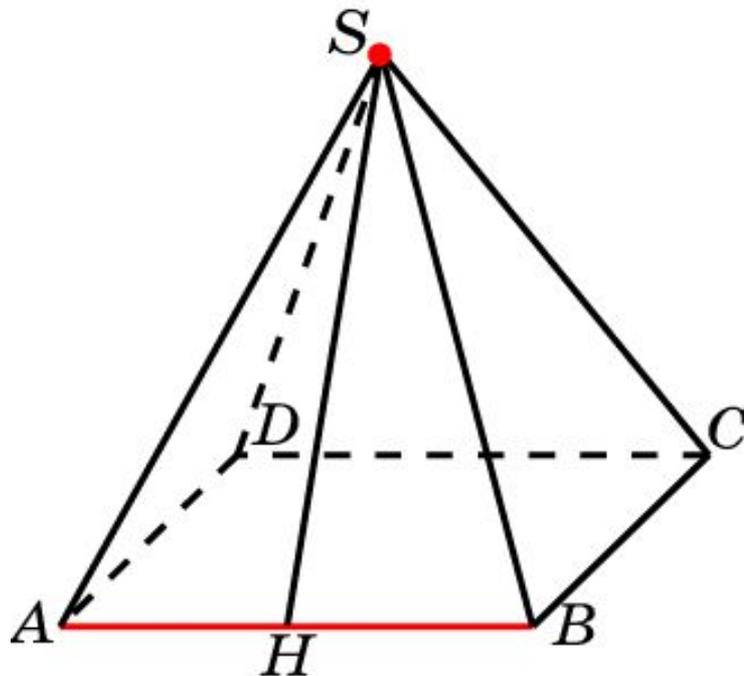
**Решение.** Искомое расстояние равно высоте  $AH$  треугольника

$ABC$ . Оно равно  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## Упражнение 20

В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины  $S$  до прямой  $AB$ .

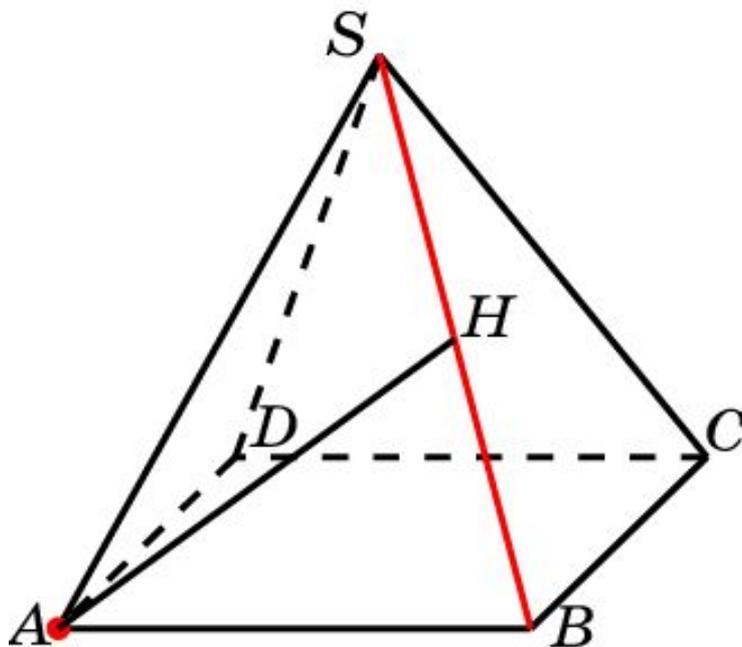


**Решение.** Искомое расстояние равно высоте  $SH$  треугольника  $SAB$ . Оно равно  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## Упражнение 21

В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины  $A$  до прямой  $SB$ .

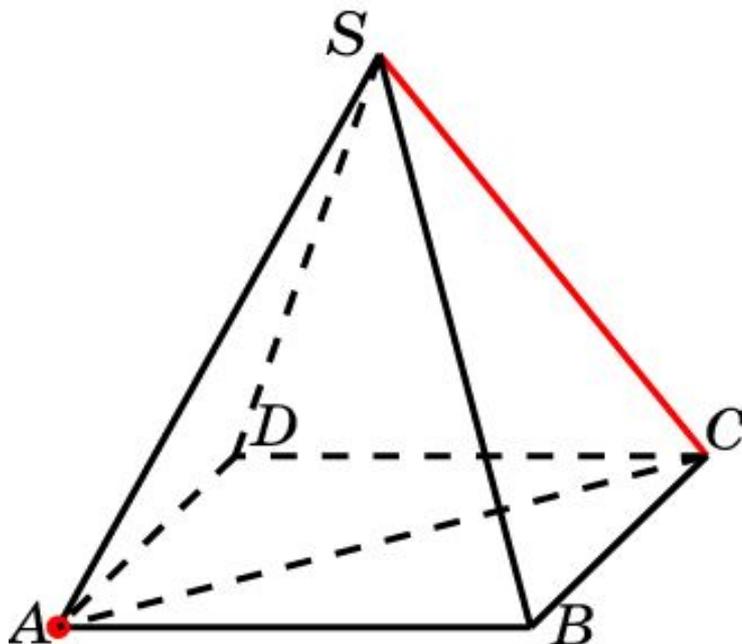


**Решение.** Искомое расстояние равно высоте  $AH$  треугольника  $SAB$ . Оно равно  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## Упражнение 22

В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины  $A$  до прямой  $SC$ .

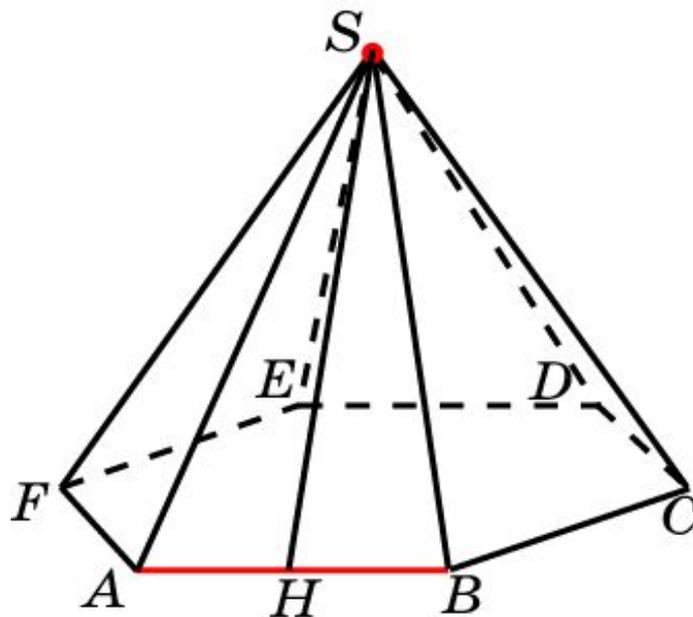


**Решение.** Треугольник  $SAC$  прямоугольный. Искомое расстояние равно катету  $SA$  и равно 1.

**Ответ:** 1.

## Упражнение 23

В правильной пирамиде  $SAB CDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от вершины  $S$  до прямой  $AB$ .

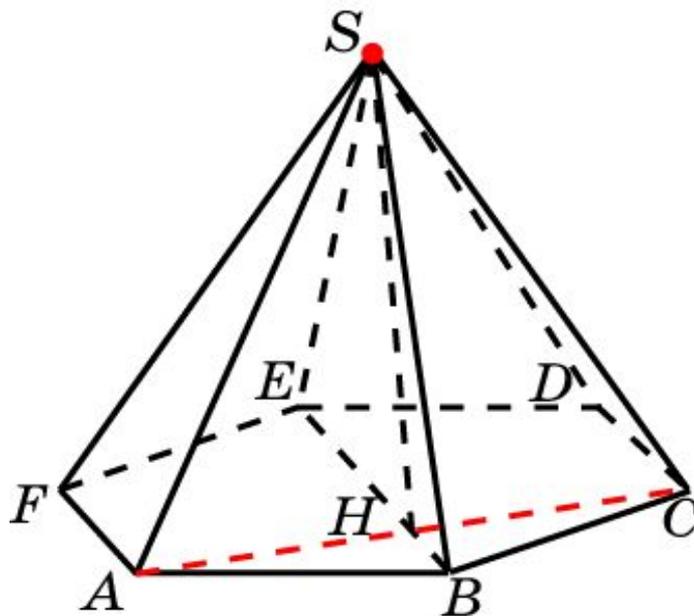


**Решение.** Искомое расстояние равно высоте  $SH$  треугольника  $SAB$ . Оно равно  $\frac{\sqrt{15}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{15}}{2}$ .

## Упражнение 24

В правильной пирамиде  $SAB CDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от вершины  $S$  до прямой  $AC$ .



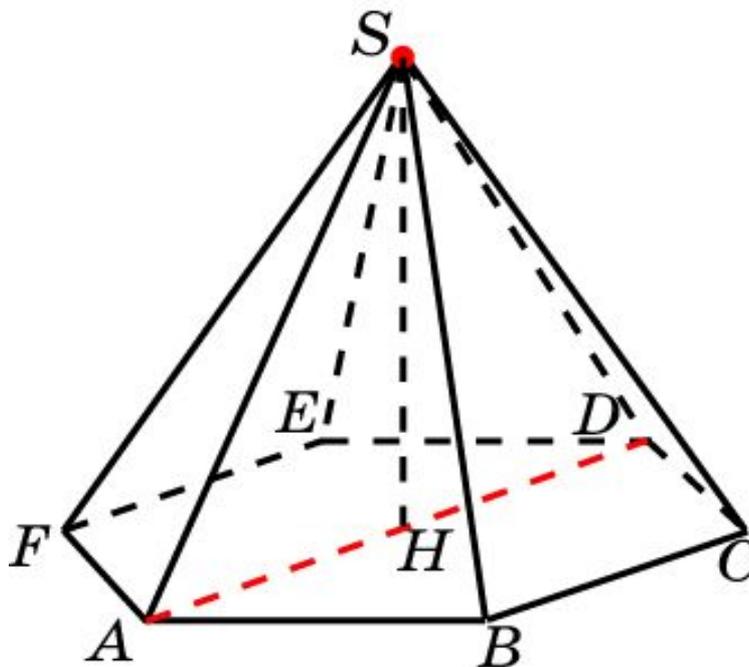
**Решение.** Искомое расстояние равно высоте  $SH$  треугольника

$SAC$ . Оно равно  $\frac{\sqrt{13}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{13}}{2}$ .

## Упражнение 25

В правильной пирамиде  $SAB CDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от вершины  $S$  до прямой  $AD$ .

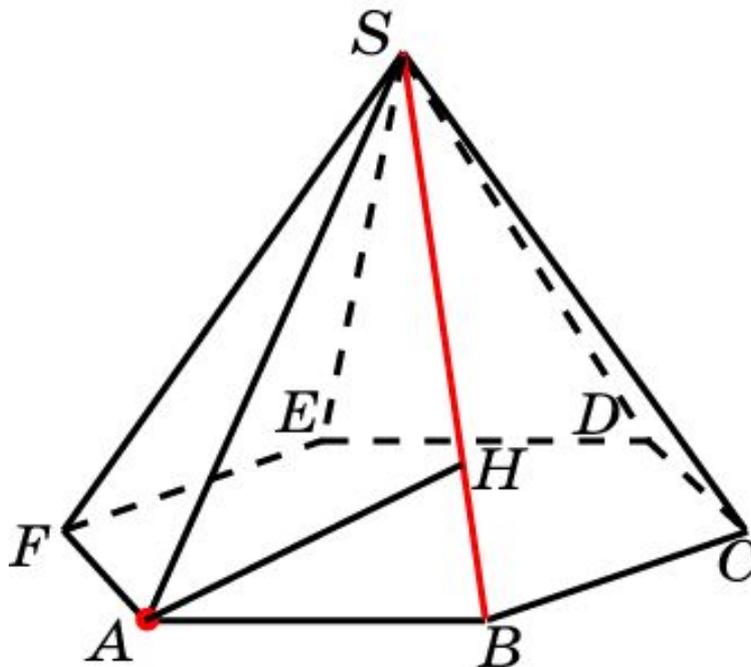


**Решение.** Искомое расстояние равно высоте  $SH$  треугольника  $SAD$ . Оно равно  $\sqrt{3}$ .

**Ответ:**  $\sqrt{3}$ .

## Упражнение 26

В правильной пирамиде  $SAB CDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $SB$ .

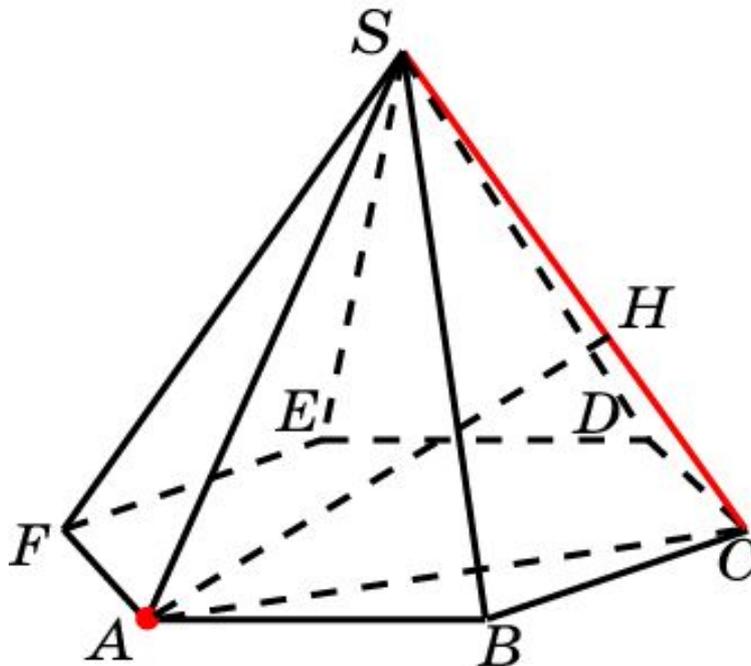


**Решение.** Искомое расстояние равно высоте  $AH$  треугольника  $SAB$ . Оно равно  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ .

## Упражнение 27

В правильной пирамиде  $SAB CDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $SC$ .

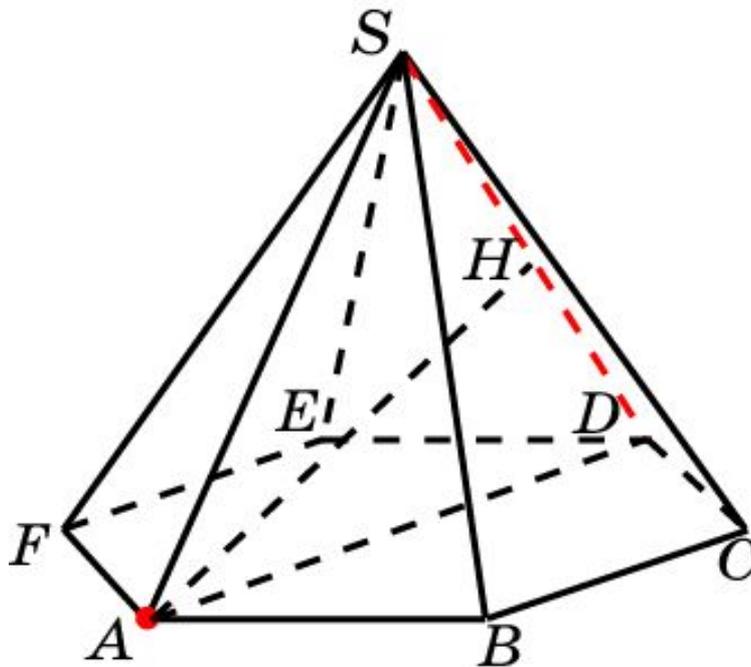


**Решение.** Искомое расстояние равно высоте  $AH$  треугольника  $SAC$ . Оно равно  $\frac{\sqrt{39}}{4}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{39}}{4}$ .

## Упражнение 28

В правильной пирамиде  $SAB CDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $SD$ .



**Решение.** Искомое расстояние равно высоте  $AH$  равностороннего треугольника  $SAD$ . Оно равно  $\sqrt{3}$ .

**Ответ:**  $\sqrt{3}$ .