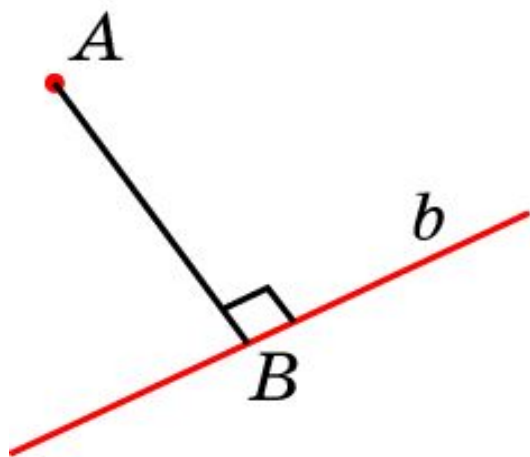


206. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО
ПРЯМОЙ
(Куб, пирамида)

Расстоянием от точки до прямой в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

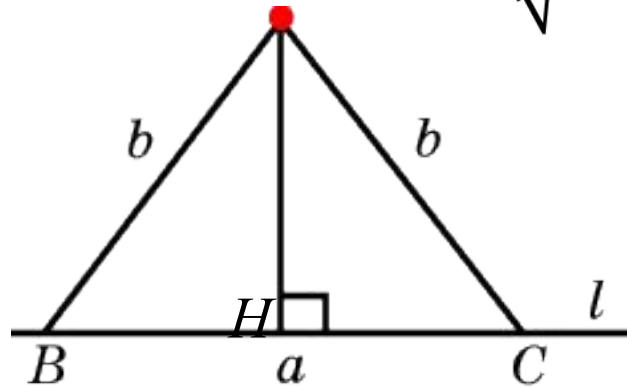


Нахождение расстояний от точки до прямой

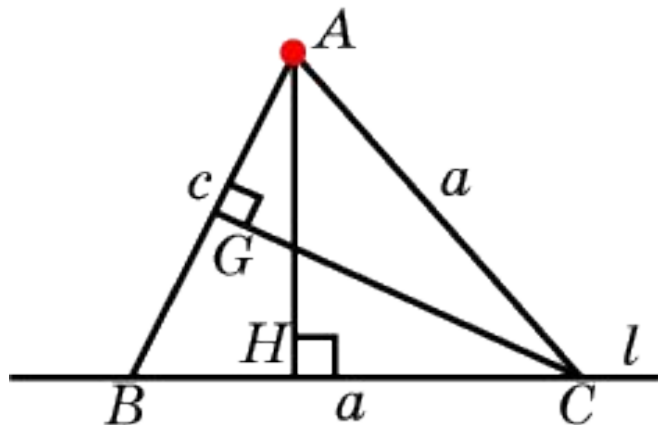
Для нахождения расстояния от точки A до прямой l перпендикуляр AH , опущенный из данной точки на данную прямую, представляют в качестве высоты треугольника, одной вершиной которого является точка A , а сторона BC , противолежащая этой вершине, лежит на прямой l . Зная стороны этого треугольника, можно найти и его высоту.

При этом возможны следующие случаи:

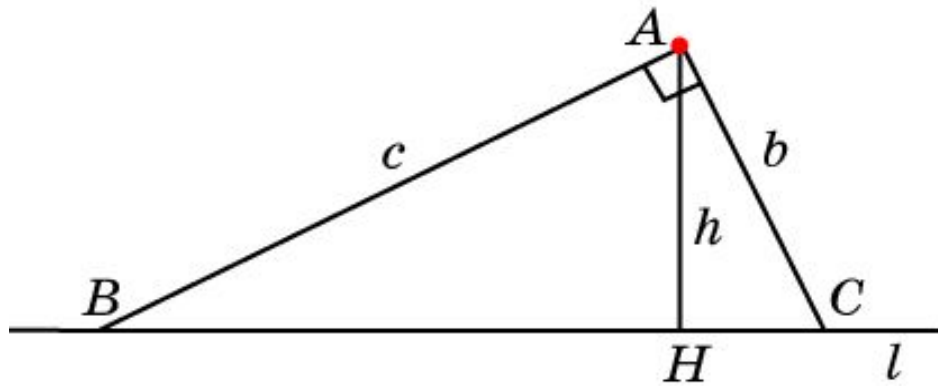
1. Треугольник ABC – равнобедренный, $AB = AC$. Пусть $AB = AC = b$, $BC = a$. Искомый перпендикуляр находится из прямоугольного треугольника ABH : $AH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.



2. Треугольник ABC – равнобедренный, $AC = BC$. Пусть $AB = c$, $AC = BC = a$. Найдем высоту CG . $CG = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} AB \cdot CG = \frac{1}{2} c \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{4}$. С другой стороны, площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} a \cdot AH$. Приравняв первое и второе значения площади, получим значение искомого перпендикуляра $AH = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a}$.



3. Треугольник ABC – прямоугольный, угол A – прямой. Пусть $AB = c$, $AC = b$. Тогда гипотенуза BC равна $\sqrt{b^2 + c^2}$. Удвоенная площадь треугольника ABC , с одной стороны, равна bc , а с другой $h\sqrt{b^2 + c^2}$. Следовательно,

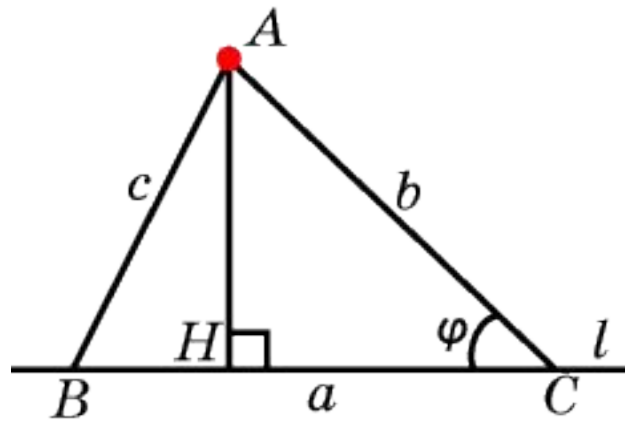
$$h = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$


4. Треугольник ABC – произвольный.

Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle ACB = \varphi$. По теореме косинусов имеет место равенство $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$.

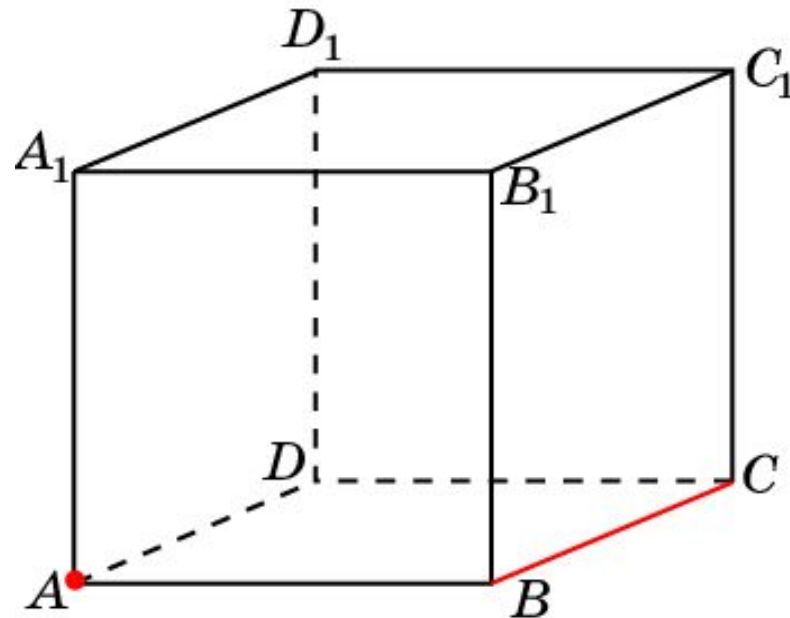
Откуда $\cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Зная косинус угла, можно найти его синус

$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$, а зная синус, можно найти высоту $AH = b \cdot \sin \varphi$.



Упражнение 1

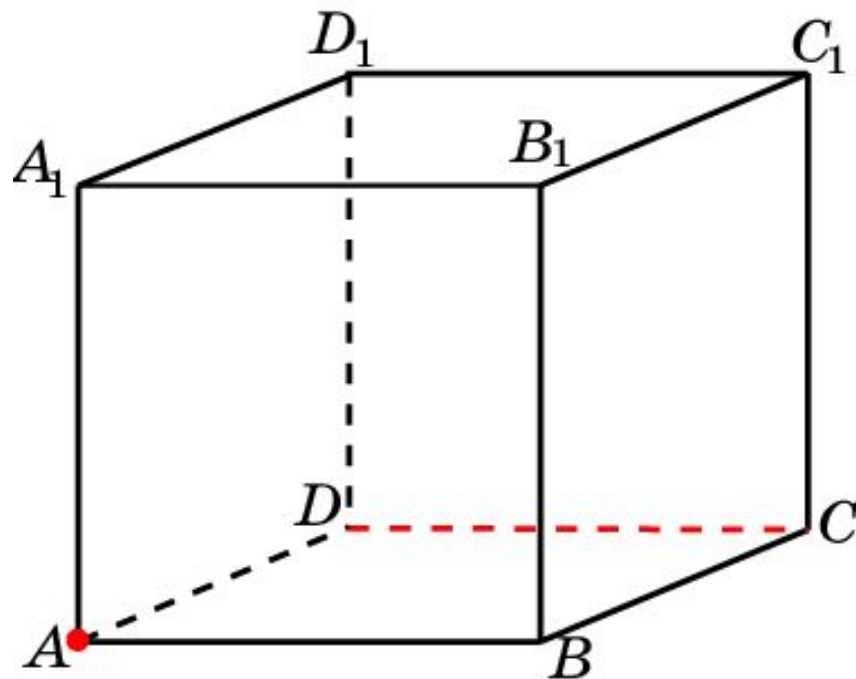
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BC .



Ответ: 1.

Упражнение 2

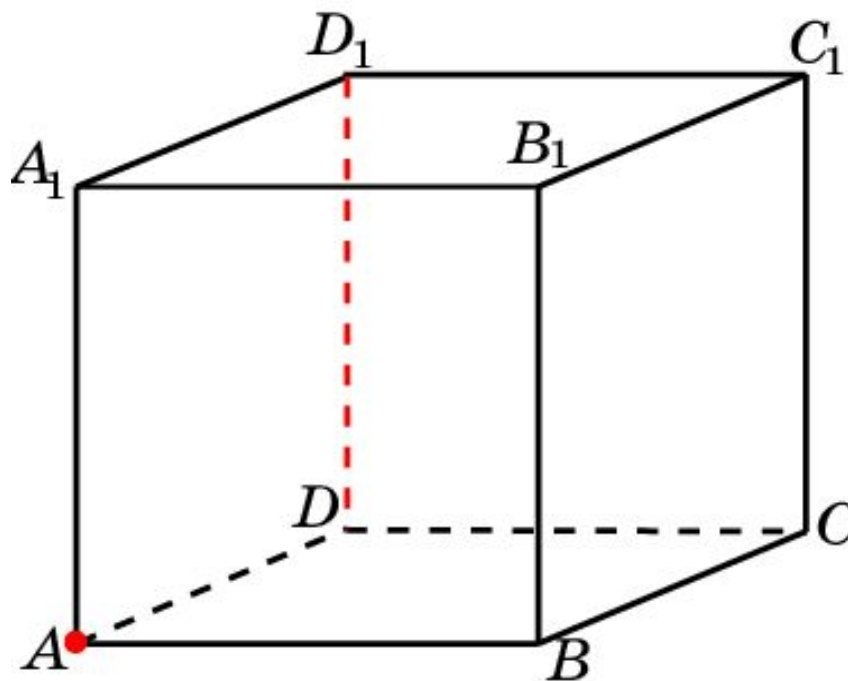
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой CD .



Ответ: 1.

Упражнение 3

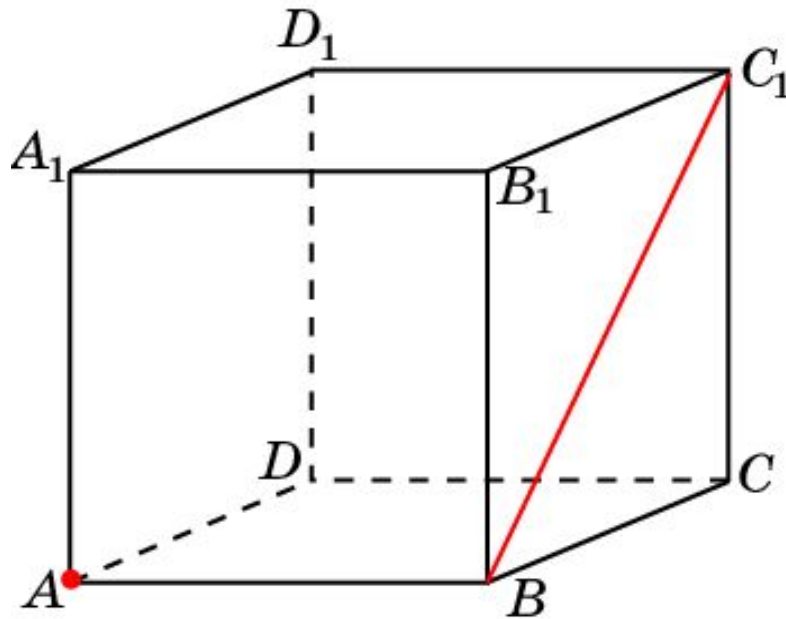
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой DD_1 .



Ответ: 1.

Упражнение 4

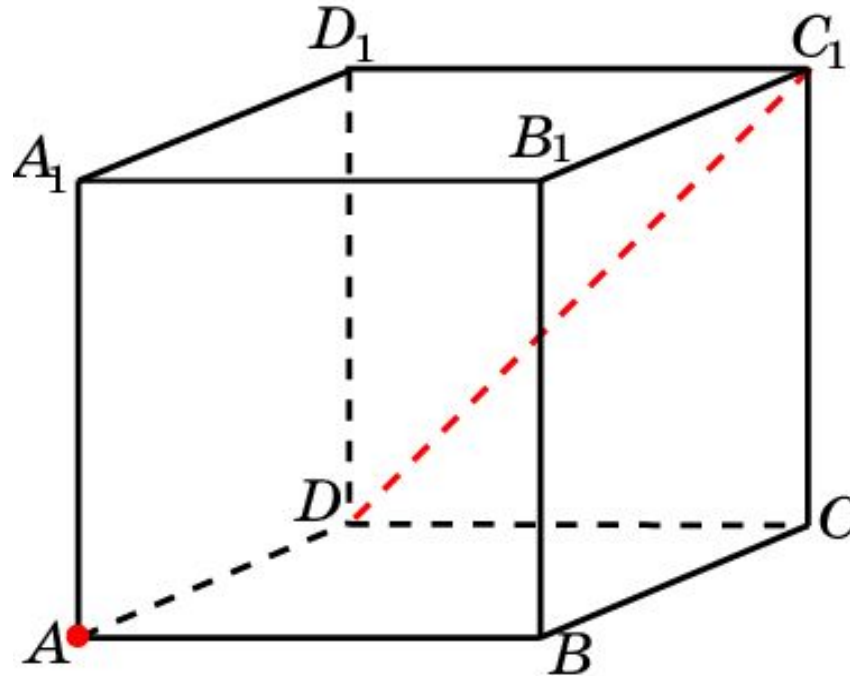
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BC_1 .



Ответ: 1.

Упражнение 5

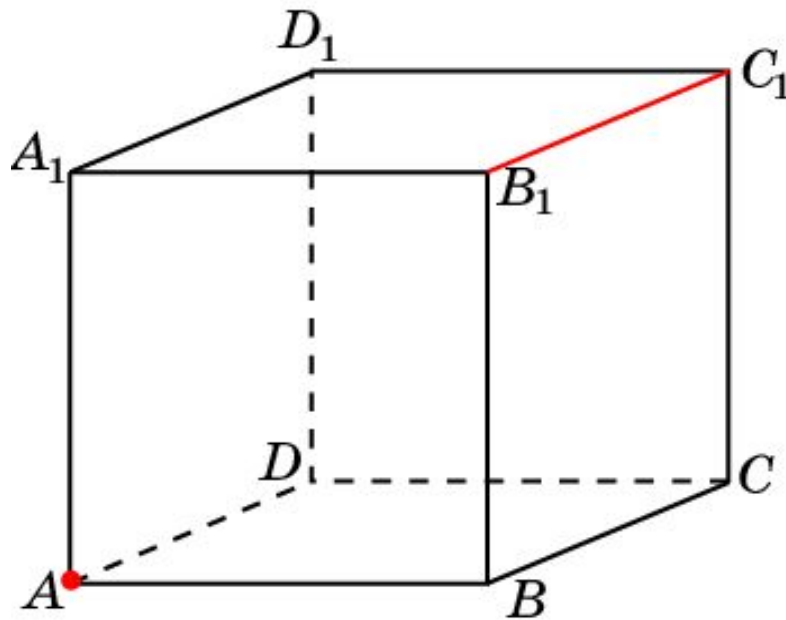
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой DC_1 .



Ответ: 1.

Упражнение 6

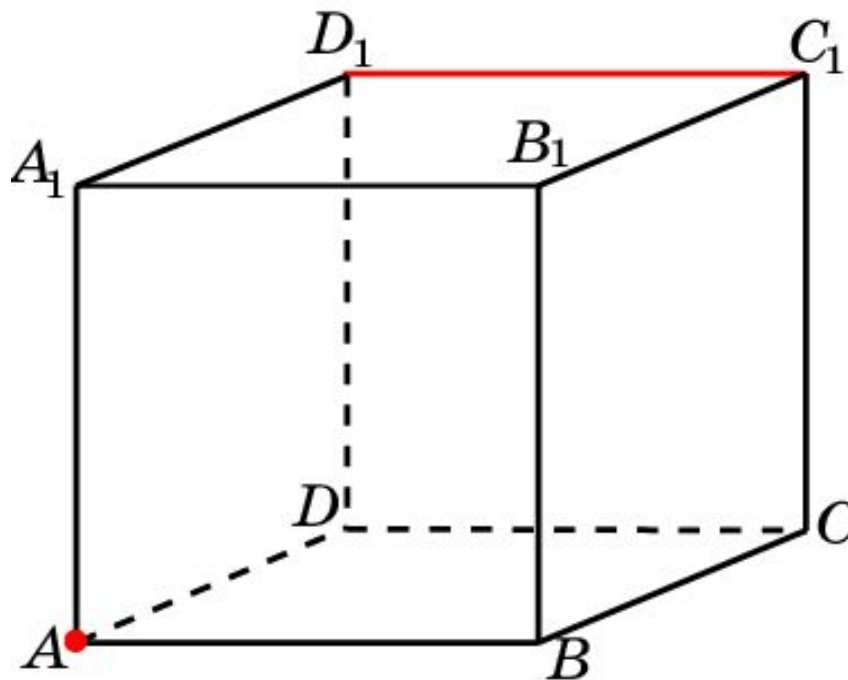
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой $B_1 C_1$.



Ответ: $\sqrt{2}$.

Упражнение 7

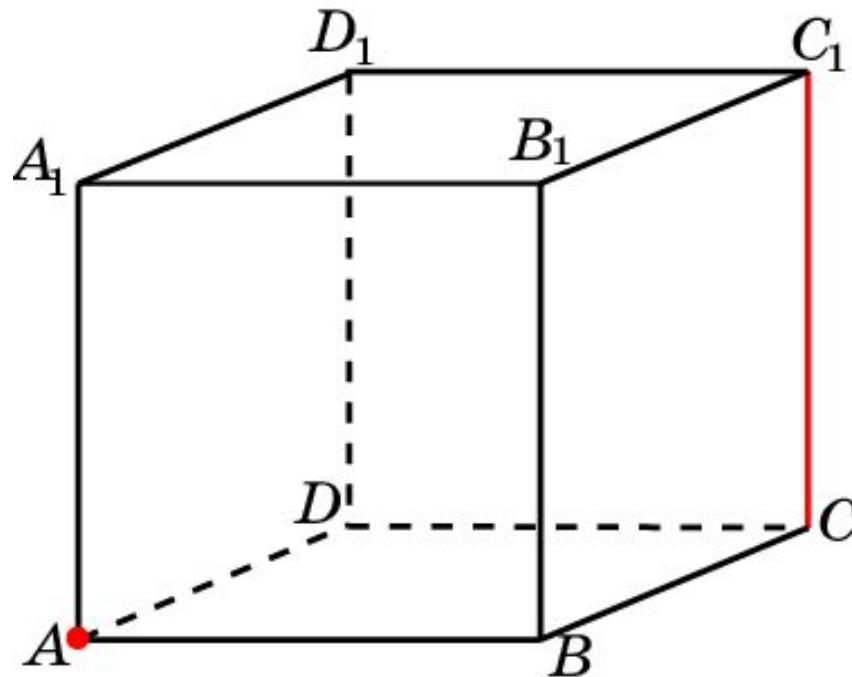
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой $C_1 D_1$.



Ответ: $\sqrt{2}$.

Упражнение 8

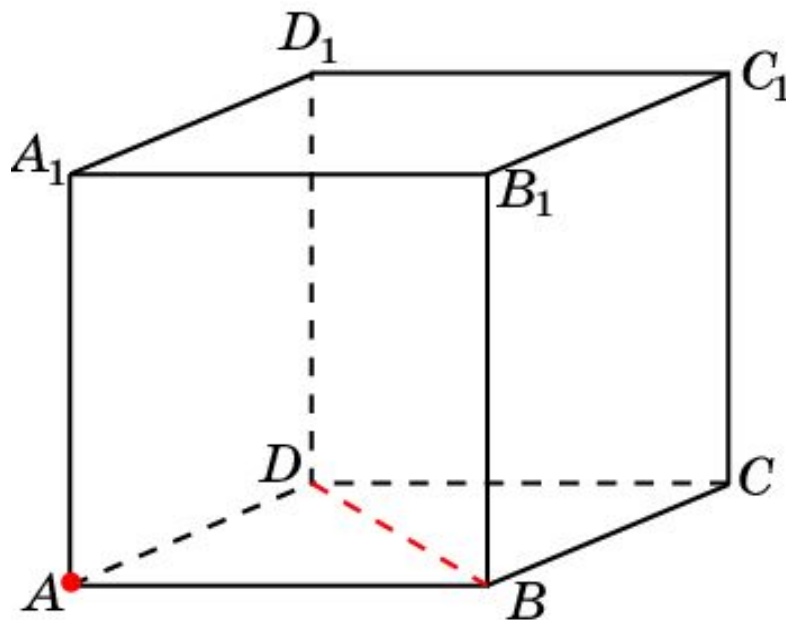
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой CC_1 .



Ответ: $\sqrt{2}$.

Упражнение 9

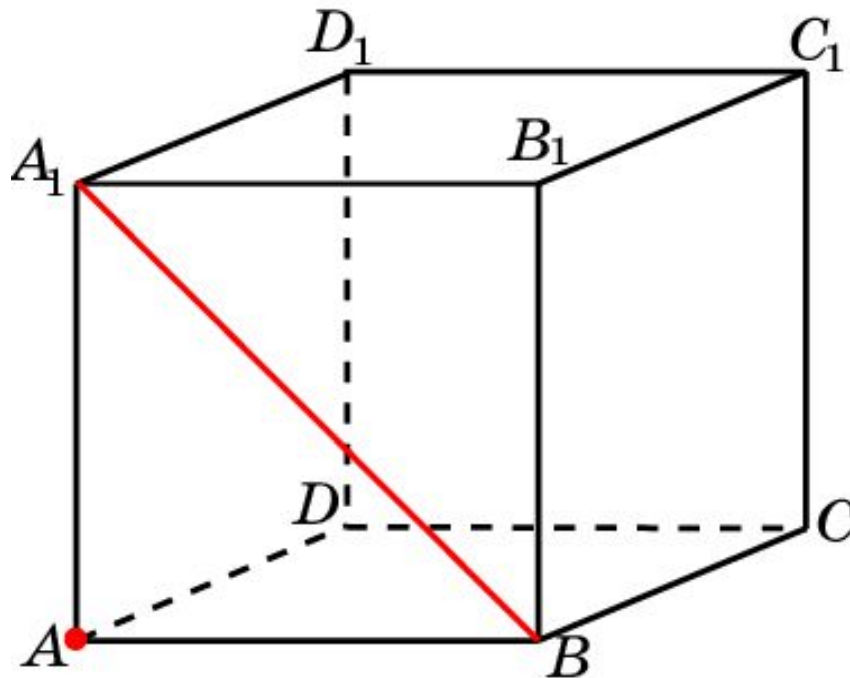
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD .



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 10

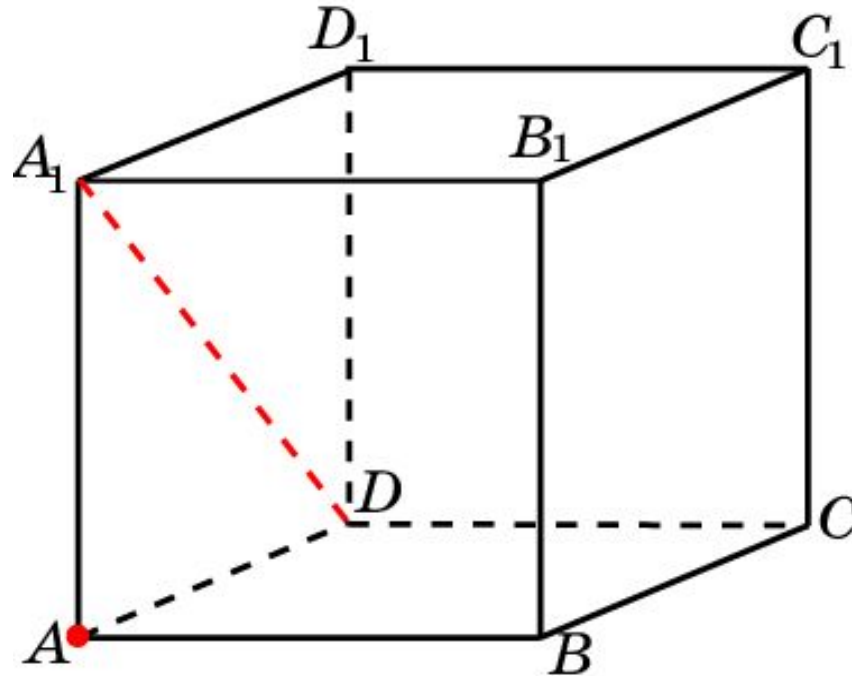
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BA_1 .



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 11

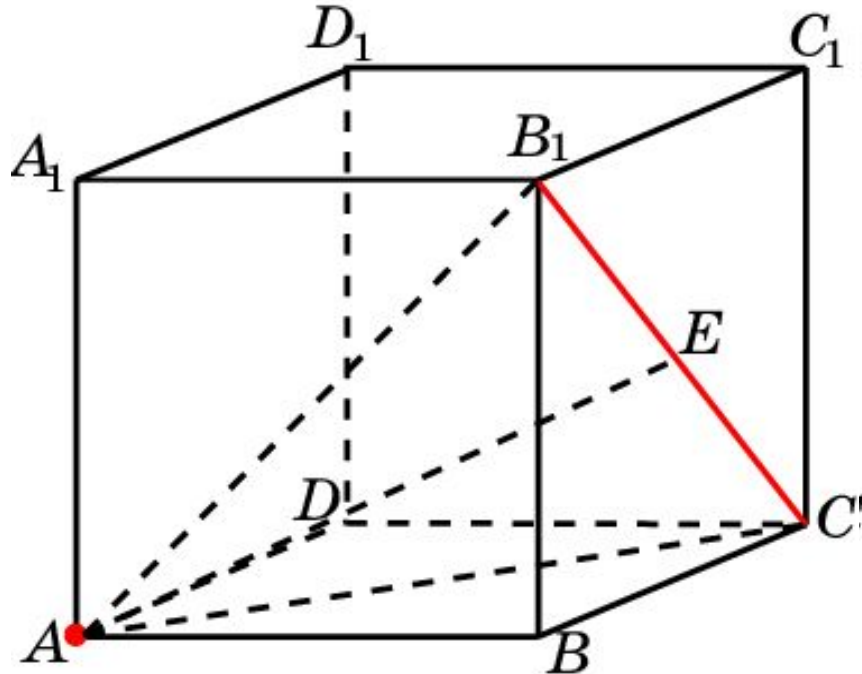
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой DA_1 .



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 13

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой CB_1 .



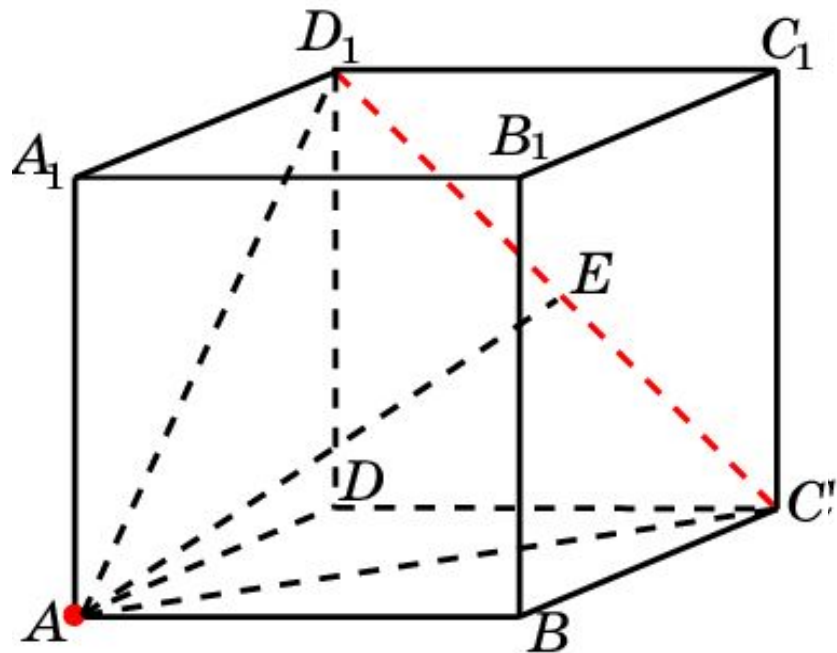
Решение: Искомое расстояние равно высоте AE равностороннего треугольника ACB_1 . Имеем, $AC = AB_1 = CB_1 = \sqrt{2}$.

Следовательно, $AE = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Упражнение 14

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой CD_1 .



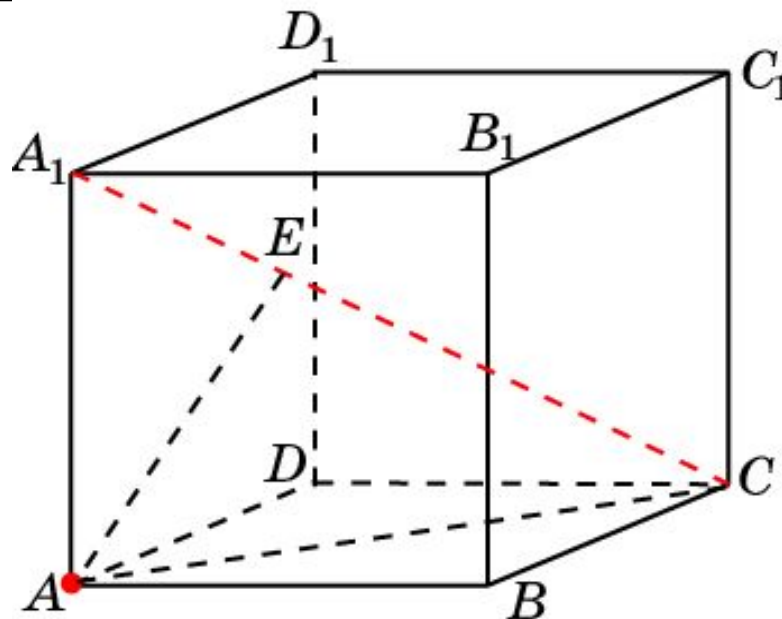
Решение: Искомое расстояние равно высоте AE равнобедренного треугольника ACD_1 . Имеем, $AC = AD_1 = CD_1 = \sqrt{2}$.

Следовательно, $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 15

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой $A_1 C$.



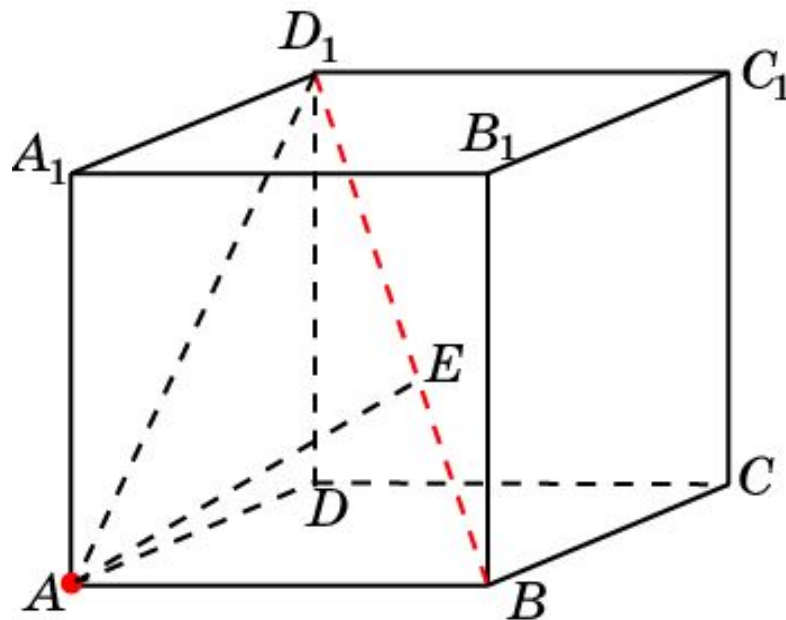
Решение: Искомое расстояние равно высоте AE прямоугольного треугольника ACA_1 . Имеем, $AA_1 = 1$, $AC = \sqrt{2}$, $CA_1 = \sqrt{3}$.

Следовательно, $AE = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Упражнение 16

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1 .



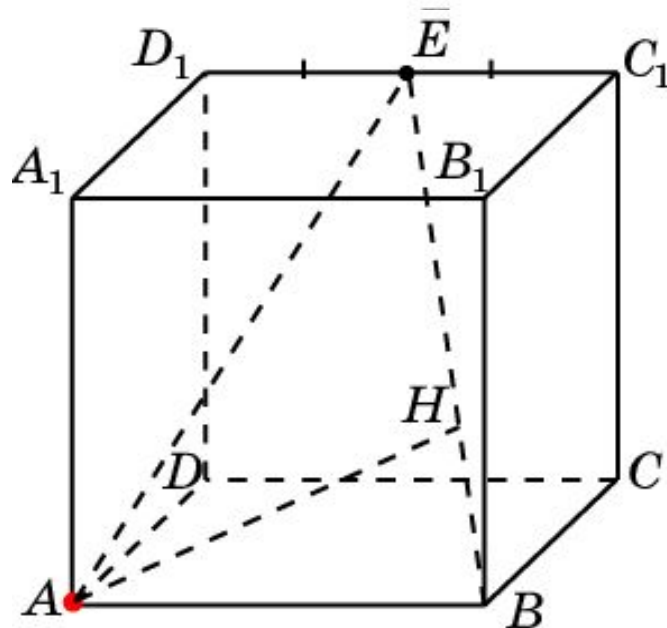
Решение: Искомое расстояние равно высоте AE прямоугольного треугольника ABD_1 . Имеем, $AB = 1$, $AD_1 = \sqrt{2}$, $BD_1 = \sqrt{3}$.

Следовательно, $AE = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Упражнение 17

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E – середина ребра $C_1 D_1$. Найдите расстояние от точки A до прямой BE .



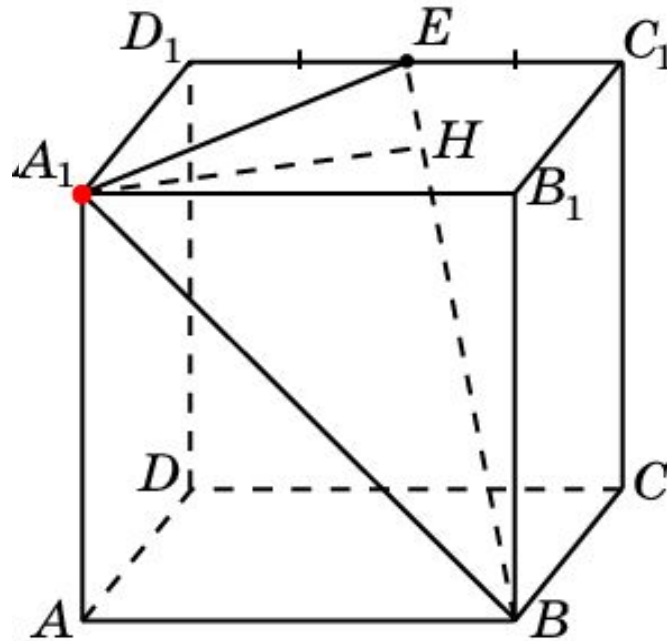
Решение: Искомое расстояние равно высоте AH равнобедренного треугольника ABE . Имеем, $AB = 1$, $AE = BE = 1,5$.

Следовательно, $AH = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Упражнение 18

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E – середина ребра $C_1 D_1$. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BE .



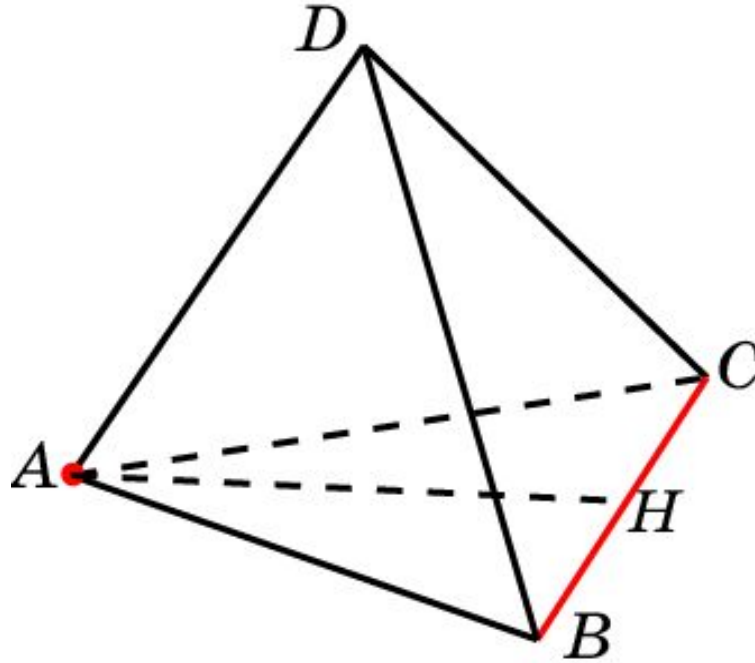
Решение: Искомое расстояние равно высоте $A_1 H$ треугольника $A_1 B E$. Имеем, $A_1 B = \sqrt{2}$, $A_1 E = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $BE = 1,5$.

По теореме косинусов, находим $\cos \angle A_1 B E = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $A_1 H = 1$.

Ответ: 1.

Упражнение 19

В правильном единичном тетраэдре $ABCD$ найдите расстояние от вершины A до прямой BC .



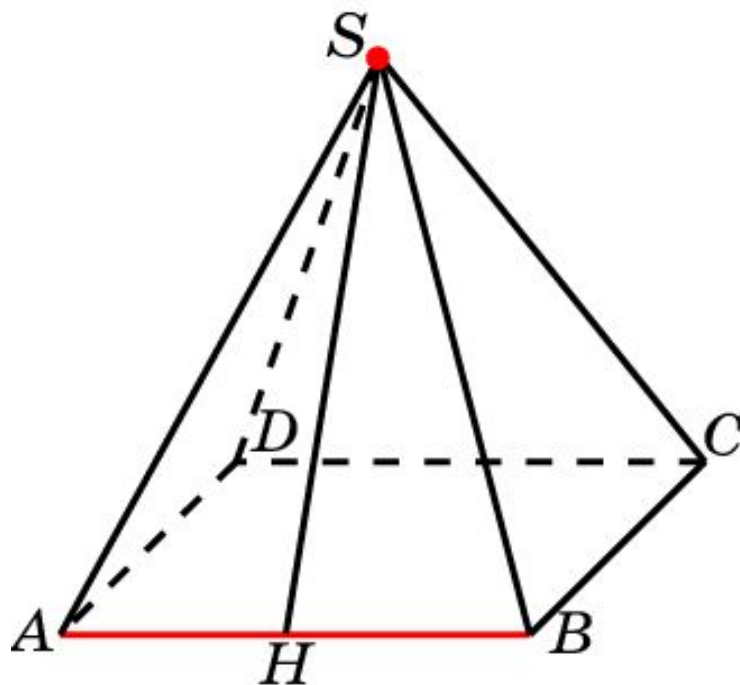
Решение. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника

ABC . Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 20

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины S до прямой AB .

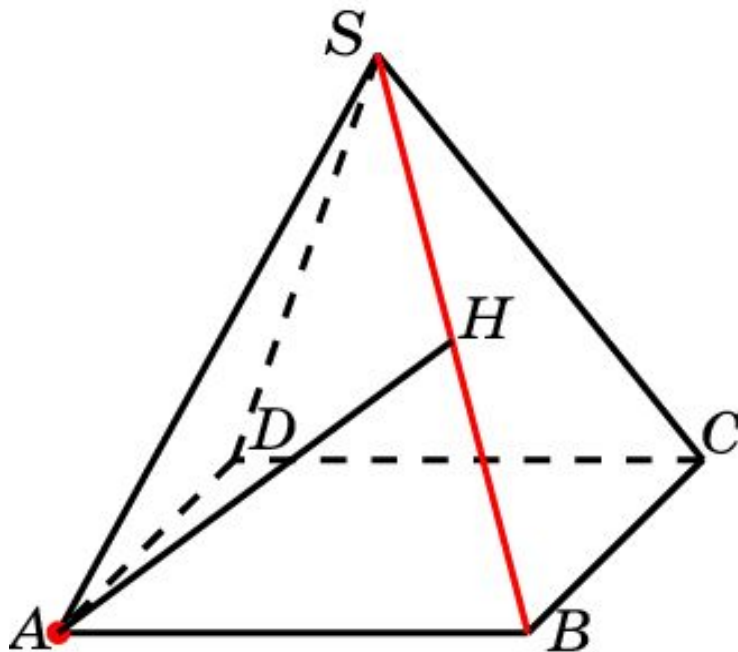


Решение. Искомое расстояние равно высоте SH треугольника SAB . Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 21

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины A до прямой SB .

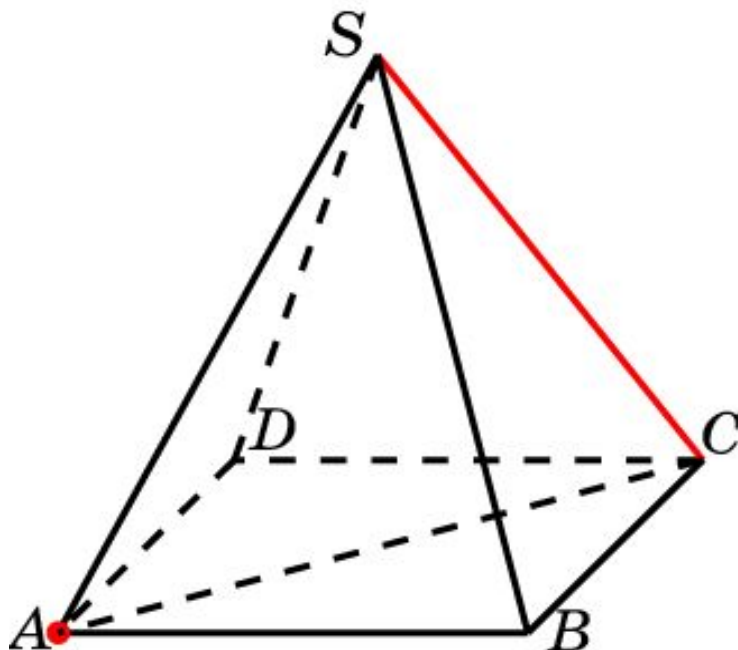


Решение. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника SAB . Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 22

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины A до прямой SC .

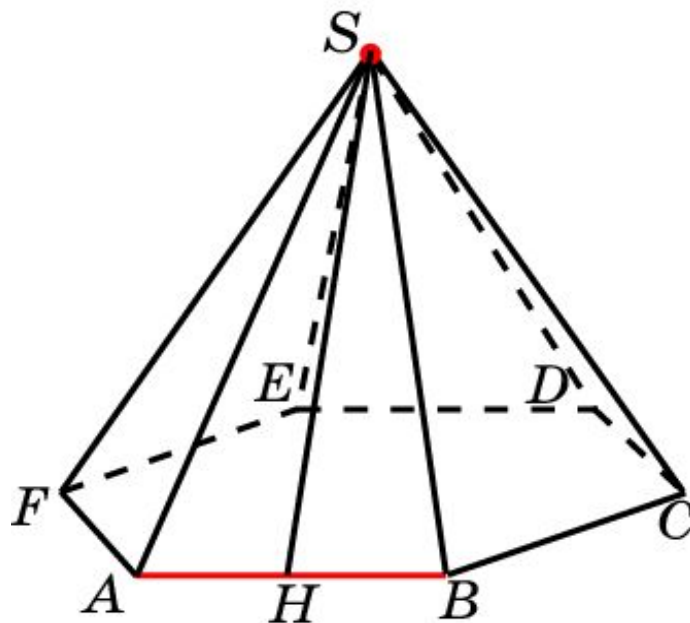


Решение. Треугольник SAC прямоугольный. Искомое расстояние равно катету SA и равно 1.

Ответ: 1.

Упражнение 23

В правильной пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от вершины S до прямой AB .

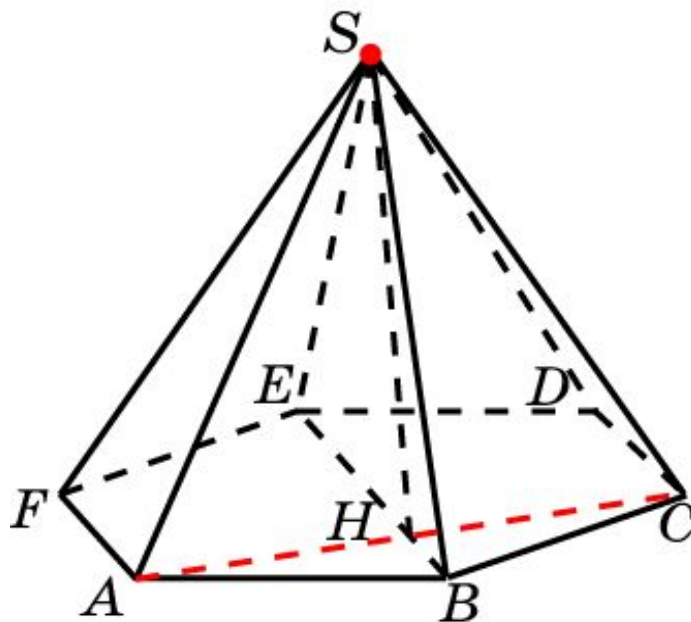


Решение. Искомое расстояние равно высоте SH треугольника SAB . Оно равно $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Упражнение 24

В правильной пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от вершины S до прямой AC .



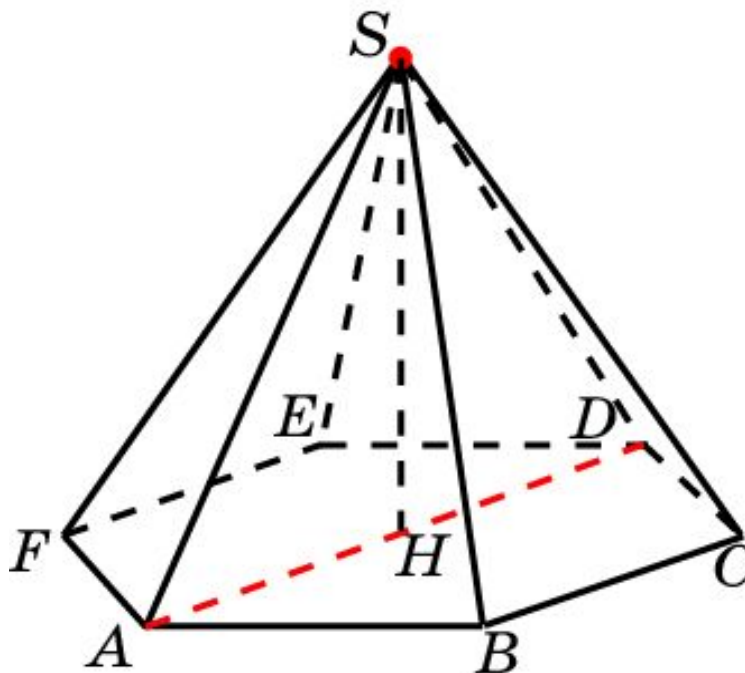
Решение. Искомое расстояние равно высоте SH треугольника

SAC . Оно равно $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Упражнение 25

В правильной пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от вершины S до прямой AD .

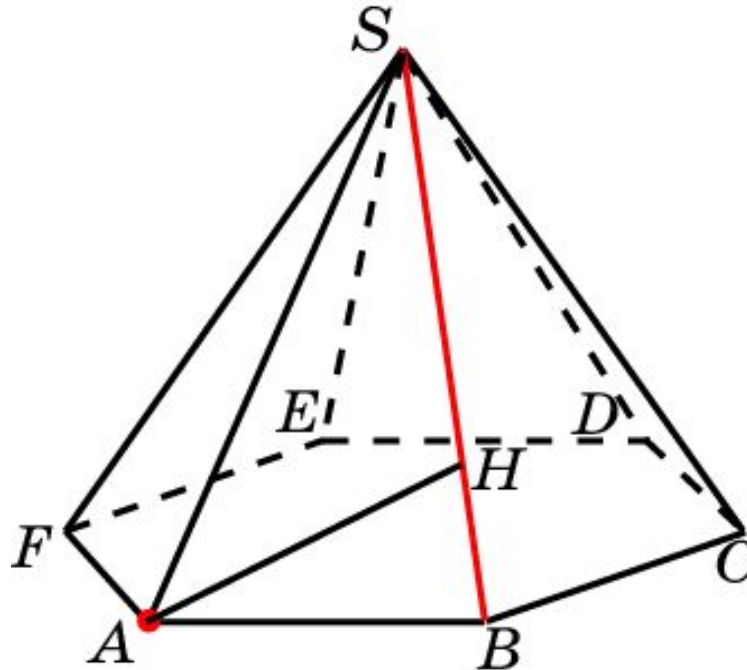


Решение. Искомое расстояние равно высоте SH треугольника SAD . Оно равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Упражнение 26

В правильной пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки A до прямой SB .

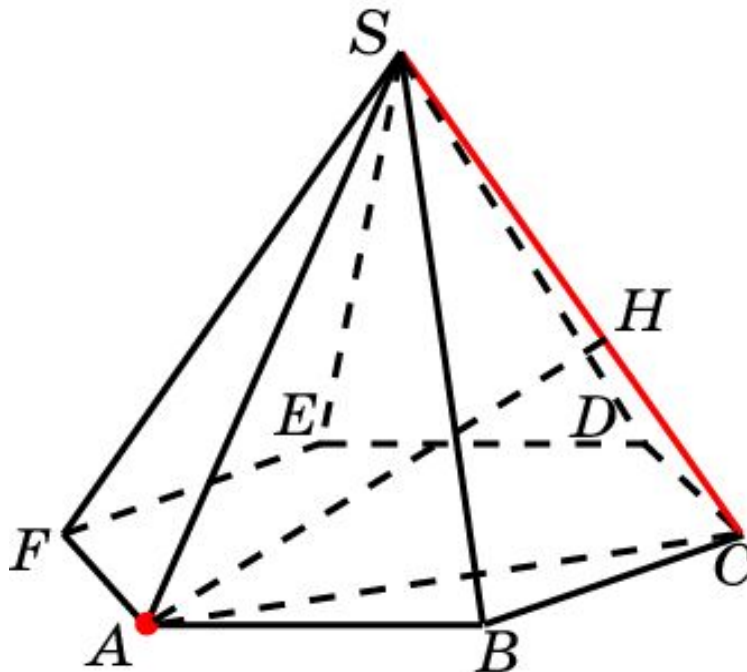


Решение. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника SAB . Оно равно $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Упражнение 27

В правильной пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки A до прямой SC .

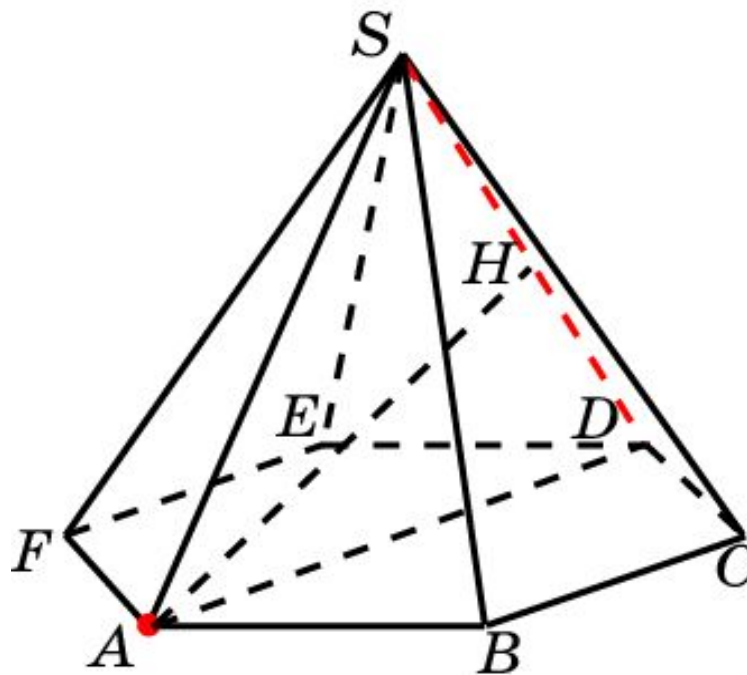


Решение. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника SAC . Оно равно $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

Упражнение 28

В правильной пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки A до прямой SD .



Решение. Искомое расстояние равно высоте AH равностороннего треугольника SAD . Оно равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.