

## Глава 2

### Кинематика твердого тела

- § 1. Поступательное движение твердого тела
- § 2. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси
  - 2.1. Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела
- § 3. Плоско-параллельное движение твердого тела (ППД)
  - 3.1. Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное. Угловая скорость и угловое ускорение
  - 3.2. Определение траекторий и скоростей точек плоской фигуры
  - 3.3. Теорема о проекциях скоростей
  - 3.4. Мгновенный центр скоростей (МЦС)
  - 3.5. Частные случаи определения МЦС
  - 3.6. Определение ускорений точек при ППД
- § 4. Сферическое движение твердого тела

# Кинематика твердого тела

Две основные задачи кинематики твердого тела

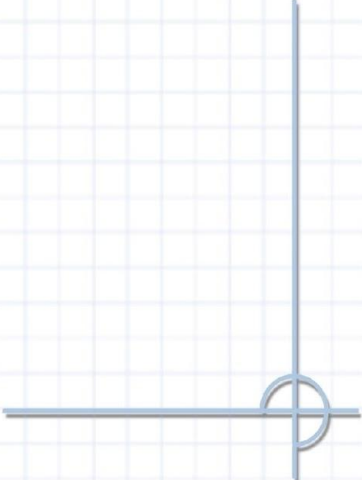
- ✓ Задание движения твердого тела и определение кинематических характеристик тела в целом
- ✓ Определение кинематических характеристик точек тела

Задать движение твердого тела – значит, *указать способ определения положения каждой точки в каждый момент времени*

Число независимых параметров, определяющих положение точки тела или системы тел, называется **числом степеней свободы** точки, твердого тела или системы тел

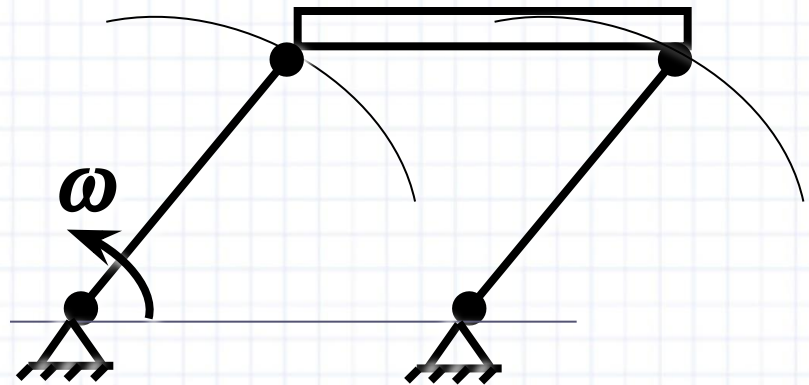
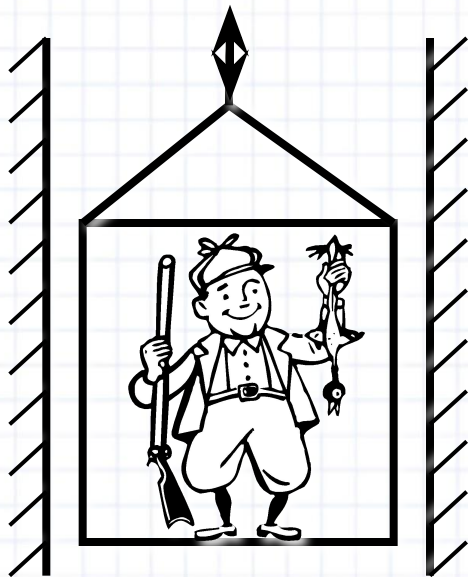
A decorative corner element consisting of a horizontal line extending to the right and a vertical line extending downwards from the left end. A quarter-circle arc is drawn in the top-left corner, connecting the two lines.

# Виды движения твердого тела

- Поступательное движение
  - Вращательное движение
  - Плоско-параллельное движение
  - Сферическое движение
  - Общий случай движения твердого тела
- 
- A decorative corner element consisting of a horizontal line extending to the left and a vertical line extending upwards from the right end. A quarter-circle arc is drawn in the bottom-right corner, connecting the two lines.

# § 1. Поступательное движение твёрдого тела

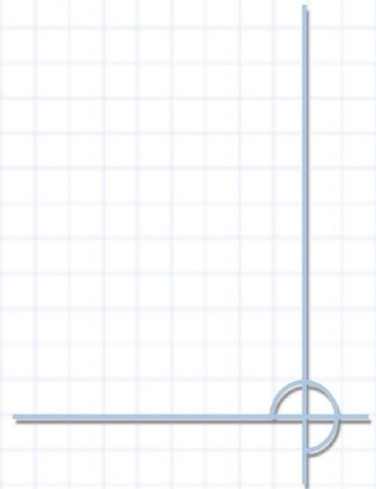
Тело совершает поступательное движение, если любая прямая, проведенная в теле во все время движения, остается параллельной своему первоначальному положению

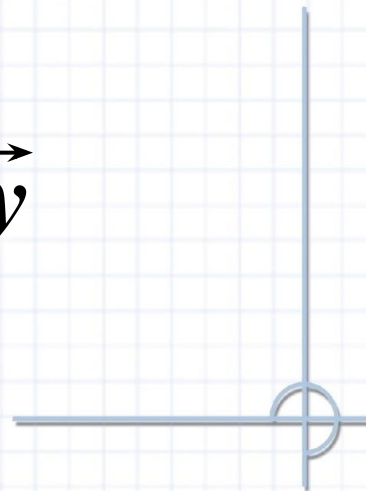
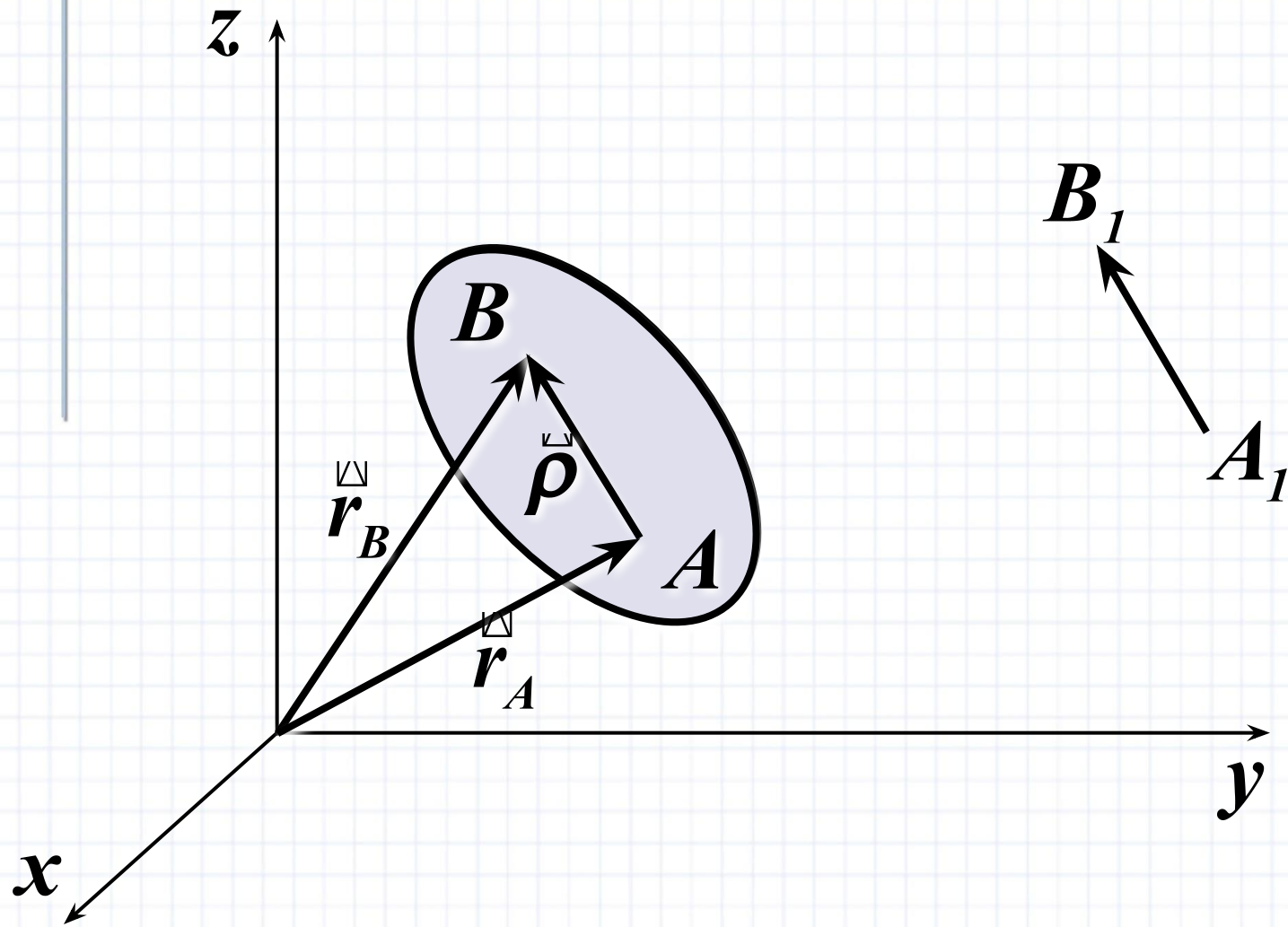
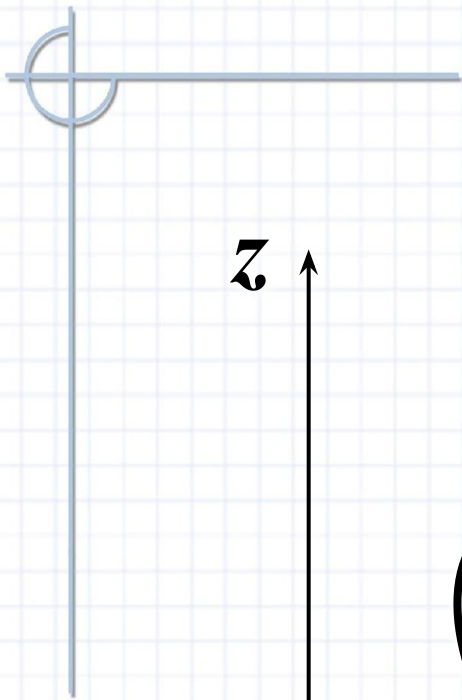





## Теорема, определяющая свойства поступательного движения

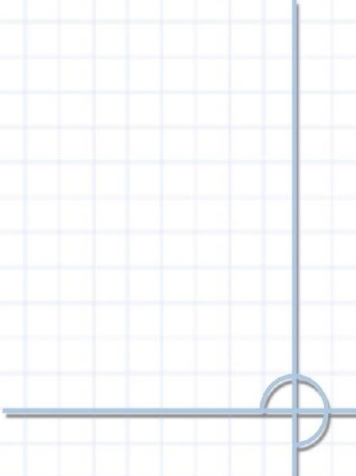
При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и имеют в любой момент времени одинаковые по величине и по направлению скорости и ускорения

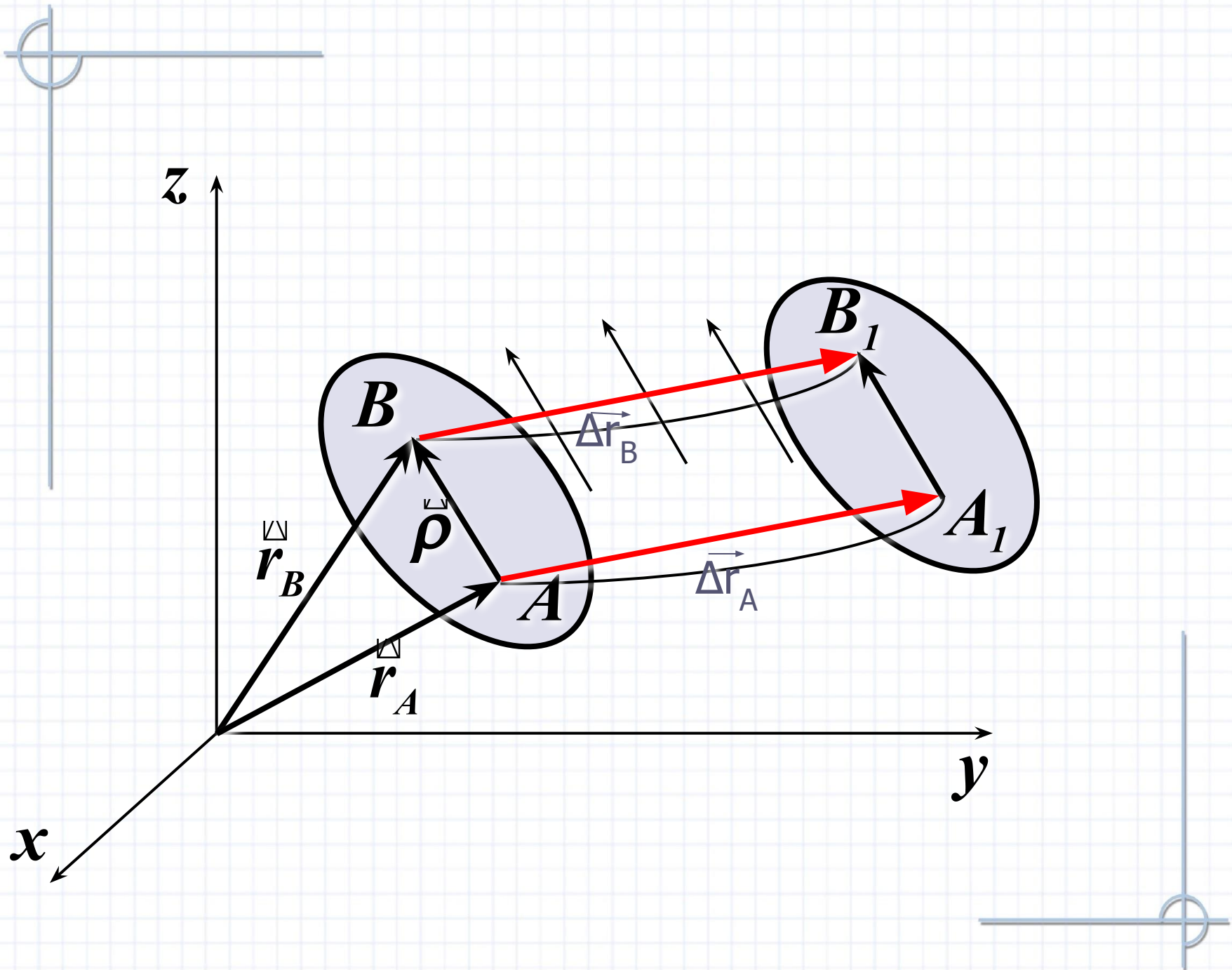





$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{\rho}$$

$$\bar{\rho} = \textit{const}$$

$$\overline{AB} \mid \overline{A_1B_1}$$


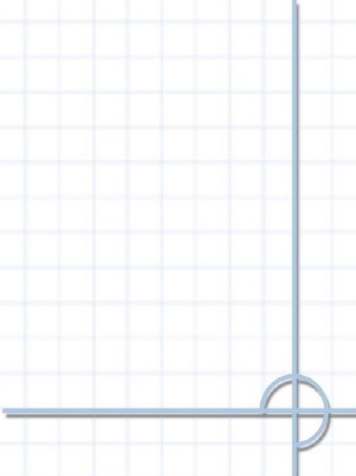


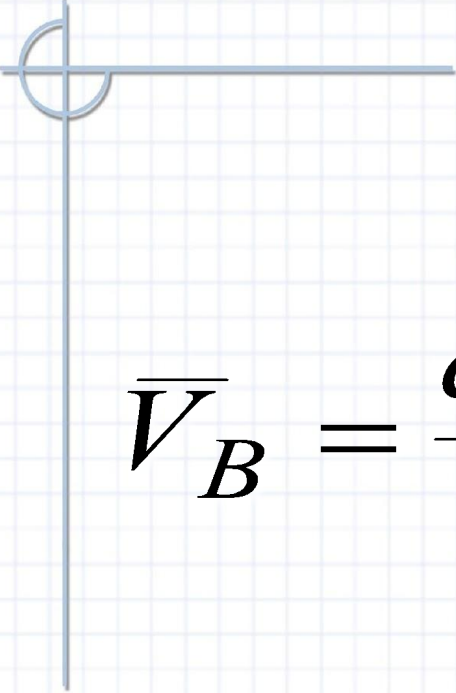



$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{\rho} \quad \bar{\rho} = \textit{const}$$

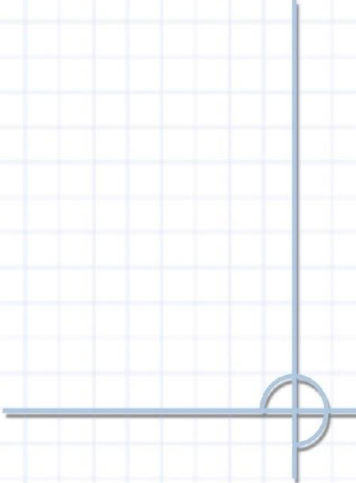
$$\Delta \bar{r}_B = \Delta \bar{r}_A$$

Найдем скорости точек A и B

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}$$



$$\bar{V}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{V}_A$$

$= 0$

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{V}_B}{dt} = \frac{d\bar{V}_A}{dt} = \bar{a}_A$$


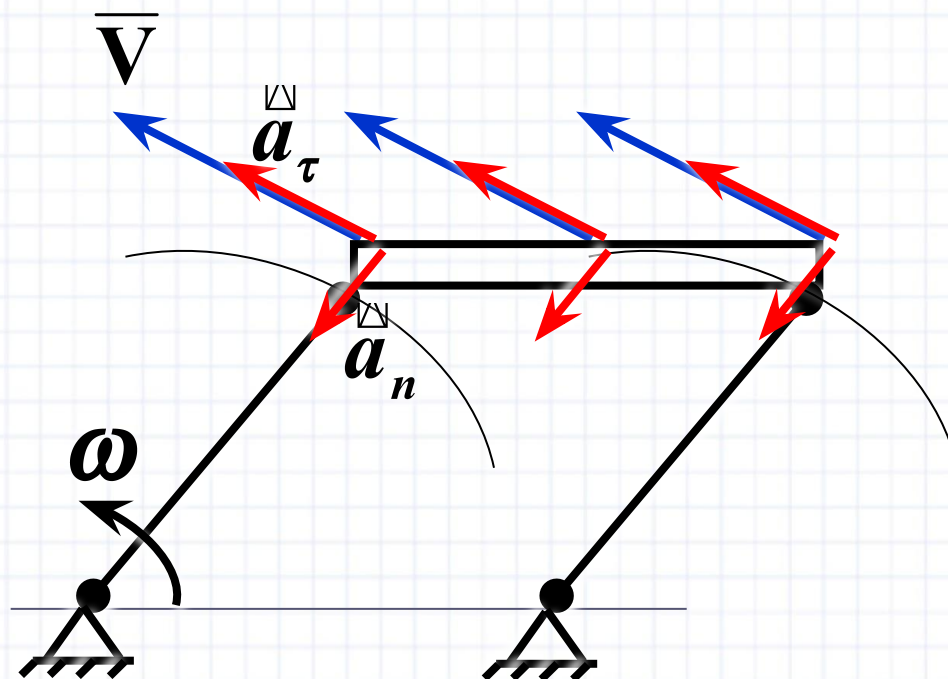
$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{\rho} \quad \bar{\rho} = \text{const}$$

$$\bar{V}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{V}_A$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A, \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A$$

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость называют *скоростью поступательного движения*, а ускорение – *ускорением поступательного движения*

Скорости и ускорения точек движущегося тела образуют векторные поля, однородные, но не стационарные



## § 2. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела с двумя неподвижными точками называется *вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси*

Прямая, точки которой остаются неподвижными, называется ***осью вращения***

При вращении твердого тела все точки тела описывают окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения и с центрами на ней

Определим положение вращающегося тела

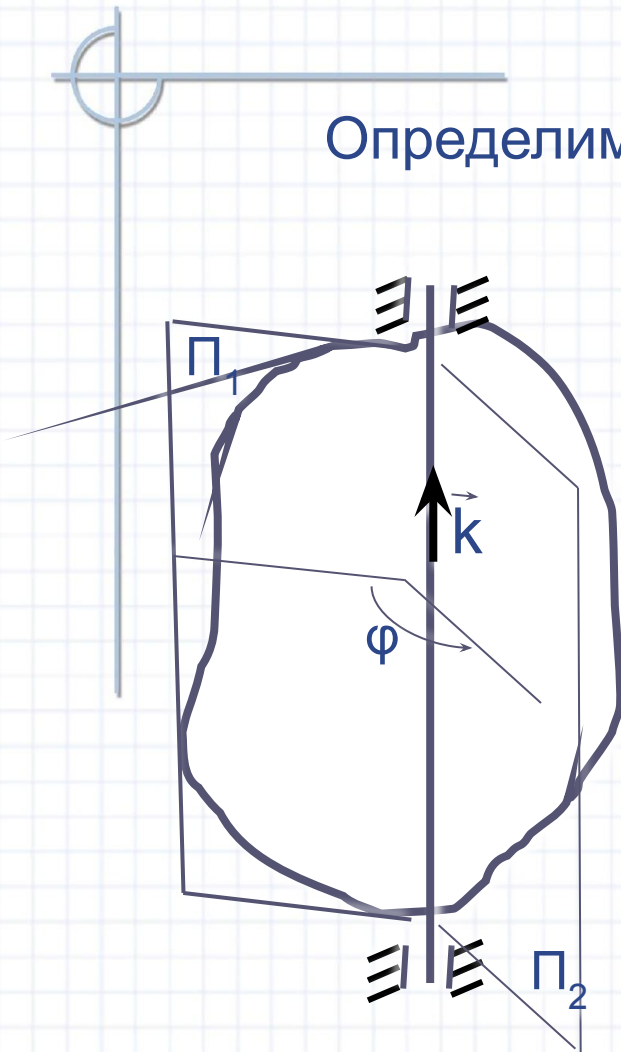
Положение тела однозначно определяется, если задан угол поворота  $\varphi = \varphi(t)$

$\vec{k}$  – единичный вектор, направленный по оси вращения

Будем считать, что угол  $\varphi$  возрастает, если с конца положительного направления оси вращения видим вращение тела происходящим против хода часовой стрелки

В СИ  $[\varphi] = \text{рад}$ ,  
*оборотах*

$\varphi = \varphi(t)$  – уравнение движения твердого тела при его повороте вокруг оси



Определим угловую скорость твердого тела

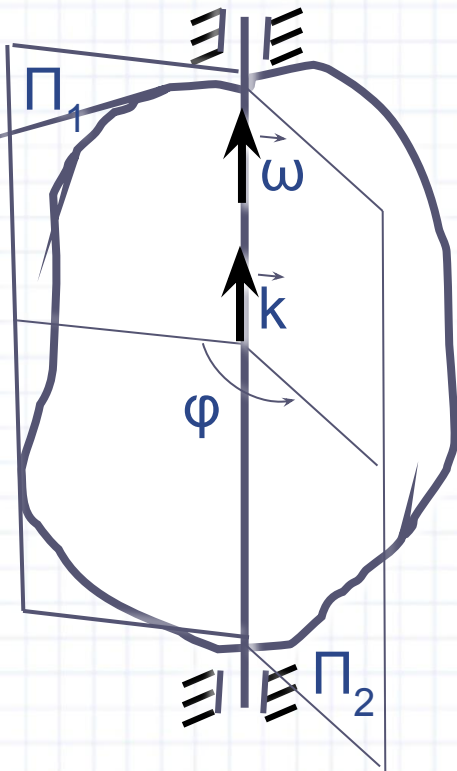
Среднюю угловую скорость тела определяют

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Мгновенная угловая скорость – векторная величина, равная по модулю

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

по направлению – вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки



В технике при равномерном вращении пользуются  $n$  –  
*числом оборотов в минуту*

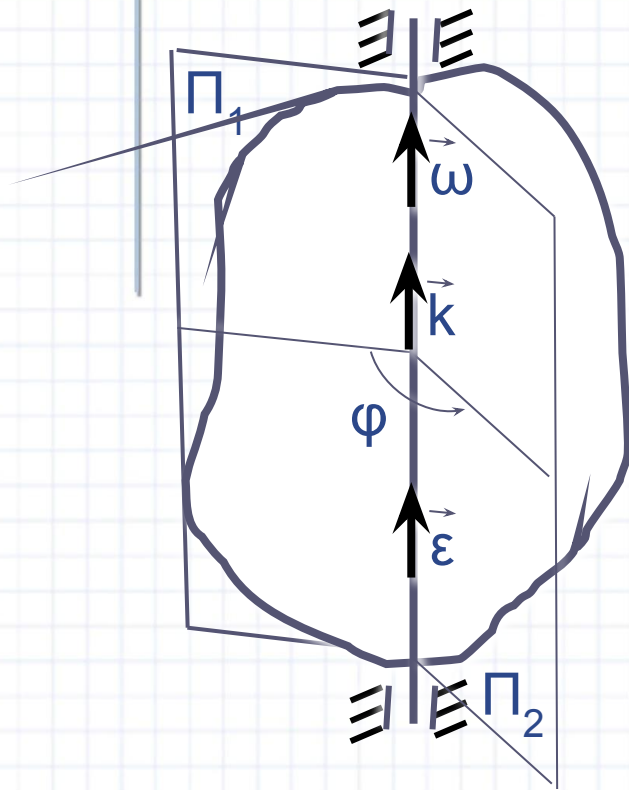
$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60 \text{ с}} = \frac{\pi \cdot n}{30} \text{ с}^{-1} \approx 0.1 \cdot n \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

В системе СИ  $[\omega] = \text{рад/с, с}^{-1}$ , в других единицах – оборот/с



Определим угловое ускорение твердого тела

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости



$$\bar{\varepsilon}_{cp} = \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t}$$

Мгновенное угловое ускорение

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\omega}$$

Если  $\varepsilon$  совпадает с  $\omega$ , то движение ускоренное, если  $\varepsilon$  противоположно  $\omega$  – движение замедленное

В системе СИ  $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2, \text{с}^{-2}$

# Равномерное вращение

Если  $\omega = \text{const}$ ,

то вращение называется **равномерным**

**Закон равномерного вращения твердого тела**

$$d\varphi = \omega dt; \Rightarrow \varphi = \omega t + C,$$

$C$  – константа  
интегрирования

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

## Равнопеременное вращение

Если  $\varepsilon = \text{const}$ ,

то вращение называется **равнопеременным**

**Закон равнопеременного вращения твердого тела**

$$d\omega = \varepsilon dt; \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

проинтегрируем еще раз, т.к.  $d\varphi = \omega dt \Rightarrow$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Если  $\omega$  и  $\varepsilon$  имеют одинаковые знаки, то вращение равноускоренное, если разные – равнозамедленное

# Скорости точек вращающегося твёрдого тела

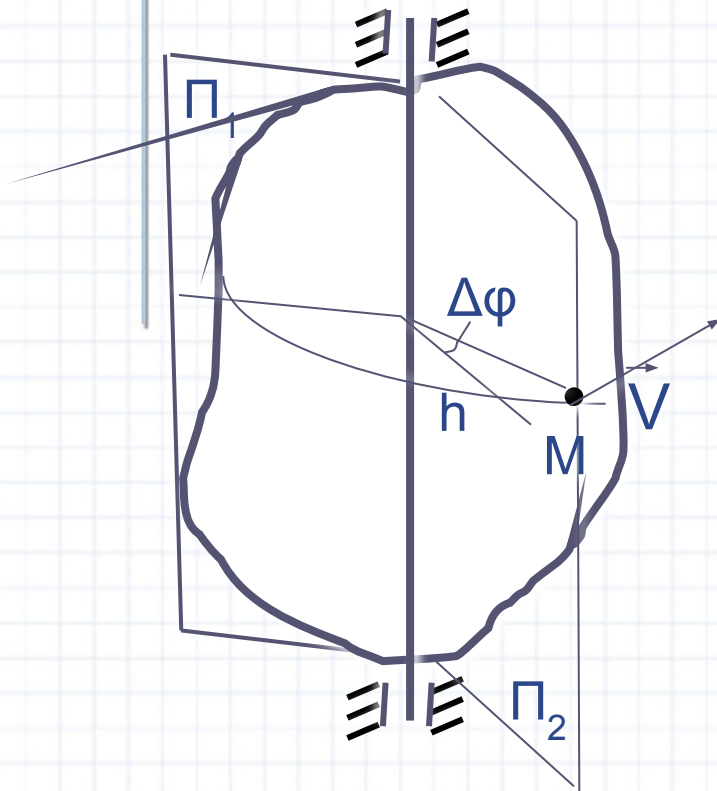
За  $dt$  точка  $M$  совершает вдоль траектории элементарное перемещение  $ds$

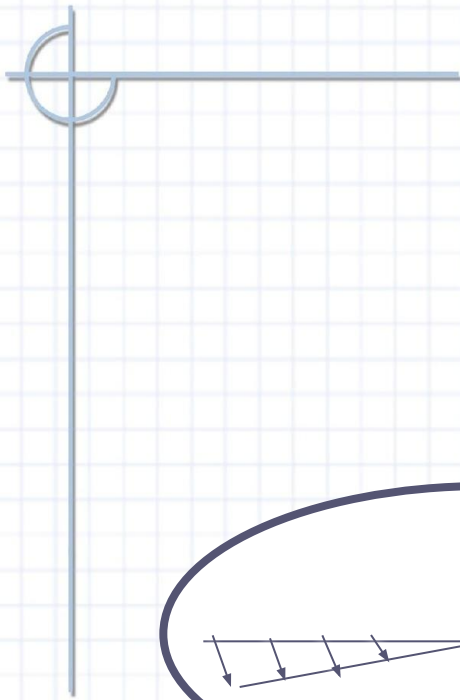
$$ds = h \cdot d\varphi$$

Мгновенная скорость точки  $M$  по величине

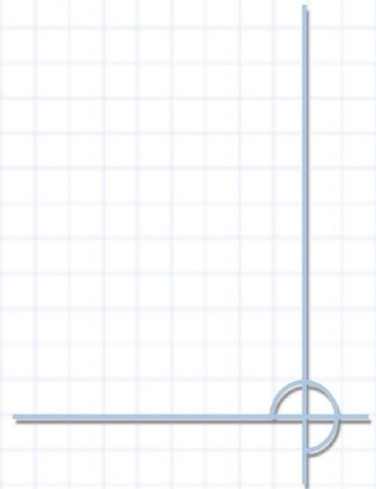
$$V = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega, \quad (1)$$

по направлению – по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения и точку  $M$





Поле скоростей точек  
вращающегося тела



## Ускорения точек вращающегося твёрдого тела

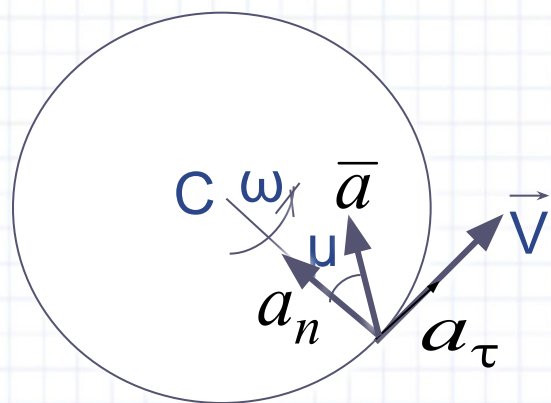
Вспомним, что  $a_\tau = \frac{dV}{dt}$  и  $a_n = \frac{V^2}{\rho}$

Здесь  $\rho = h, \Rightarrow a_\tau = h \frac{d\omega}{dt} = h \cdot \varepsilon$  (2)

и  $a_n = \frac{(h \cdot \omega)^2}{h} = h \cdot \omega^2$  (3)

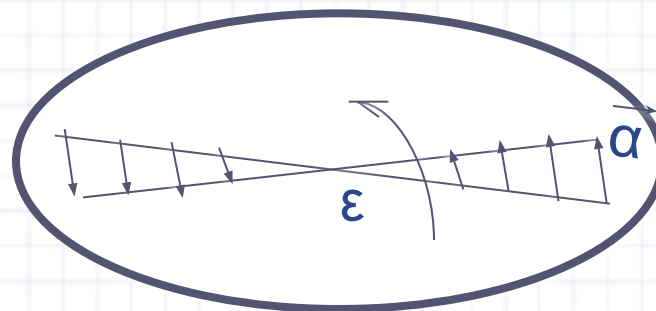
Полное ускорение  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$  (4)

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (5)$$



$\mu$  – угол отклонения вектора ускорения от радиуса окружности, описываемой точкой

## Поле ускорений точек вращающегося тела



Формулы (1)–(5) позволяют определить скорость и ускорение любой точки вращающегося тела, если известен закон движения и расстояние данной точки от оси вращения

И наоборот, зная движение одной точки вращающегося тела, можно найти движение любой другой его точки, а также характеристики движения всего тела в целом



**Леонард Эйлер (1707 –1783)** показал, что скорость вращающейся точки тела можно определить из векторного произведения угловой скорости и радиуса-вектора этой точки. В 19 лет он приехал в Россию, где в 26 лет стал академиком Российской Академии Наук, прожив 15 лет, уехал в Германию.

Вернулся опять в Россию при Екатерине II и создал великую русскую школу математиков



# Векторы скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

$$|\bar{\mathbf{V}}| = |\omega| \cdot h = |\omega| \cdot r \sin \alpha, \quad \bar{\mathbf{V}} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

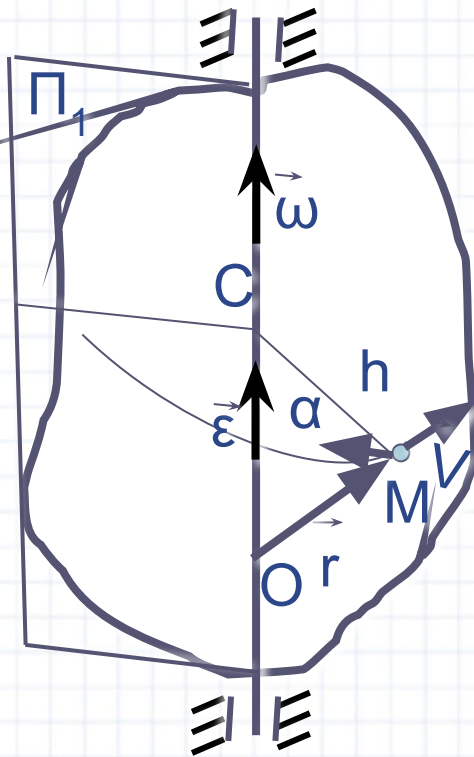
Возьмем производные от обеих  
частей уравнения


$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \left( \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left( \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right)$$

$$\bar{a} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{V}})$$

Проанализируем выражение

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \quad \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{V}}$$

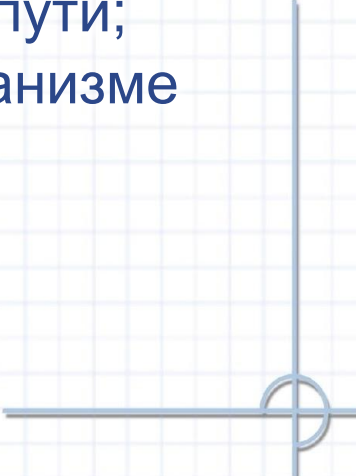


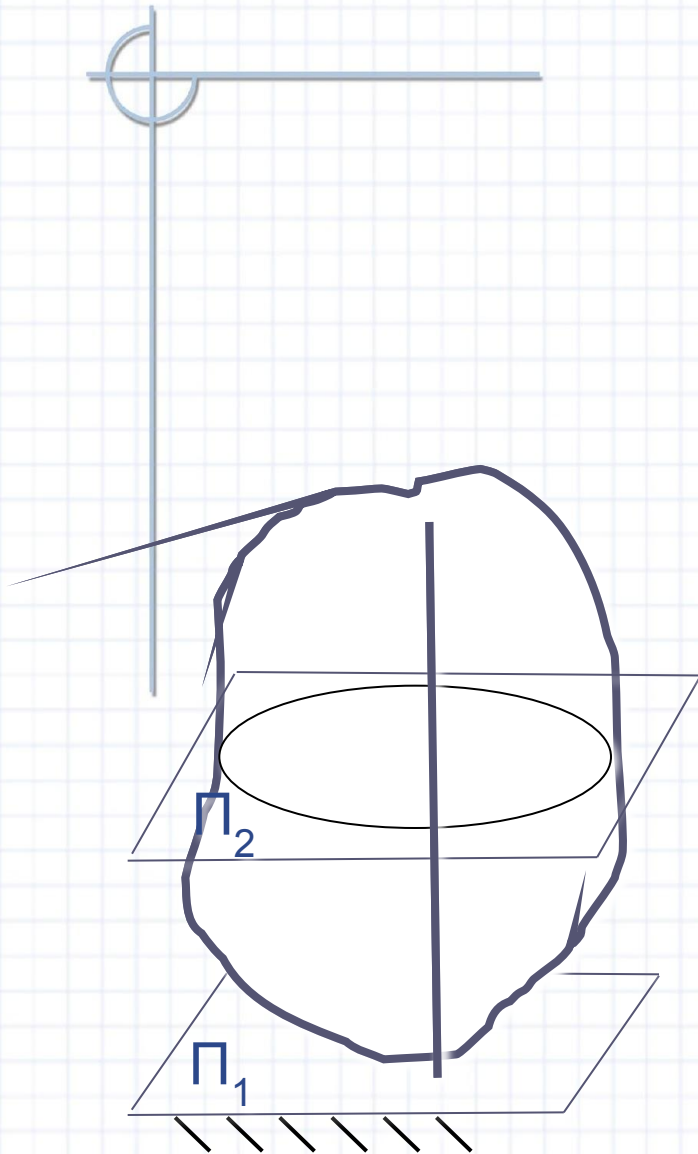


## § 3. Плоско-параллельное движение твёрдого тела

**Плоско-параллельным** (или плоским) **движением** (ППД) твёрдого тела называется такое, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости

Как частный случай ППД можно рассматривать вращательное движение твёрдого тела вокруг оси; катящиеся колеса по прямолинейному участку пути; движение шатуна в кривошипно-шатунном механизме

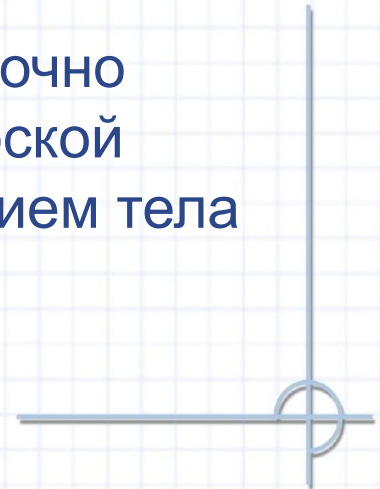




При ПРД все точки тела, лежащие на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости  $\Pi_1$ , имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения, т.к. эта прямая движется поступательно, оставаясь всегда  $\perp$  к плоскости  $\Pi_1$

Достаточно исследовать движение точек этого тела, лежащих в какой-либо плоскости,  $\parallel$  неподвижной  $\Pi_1$

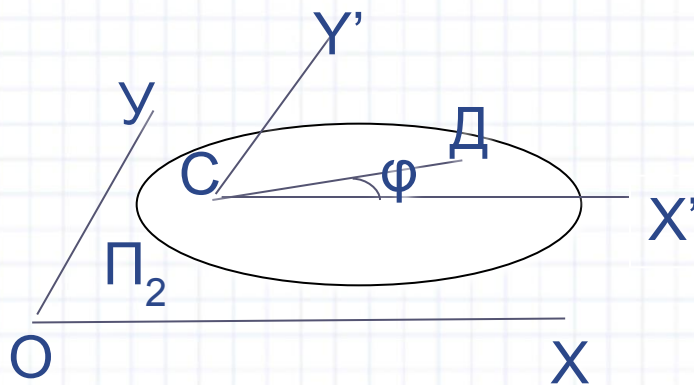
Другими словами, достаточно исследовать движение плоской фигуры, образуемой сечением тела плоскостью  $\Pi_2$



Положение фигуры в плоскости  $\Pi_2$  по отношению к неподвижной системе координат  $OXY$  определяется положением какого-либо отрезка  $CD$ , принадлежащим фигуре

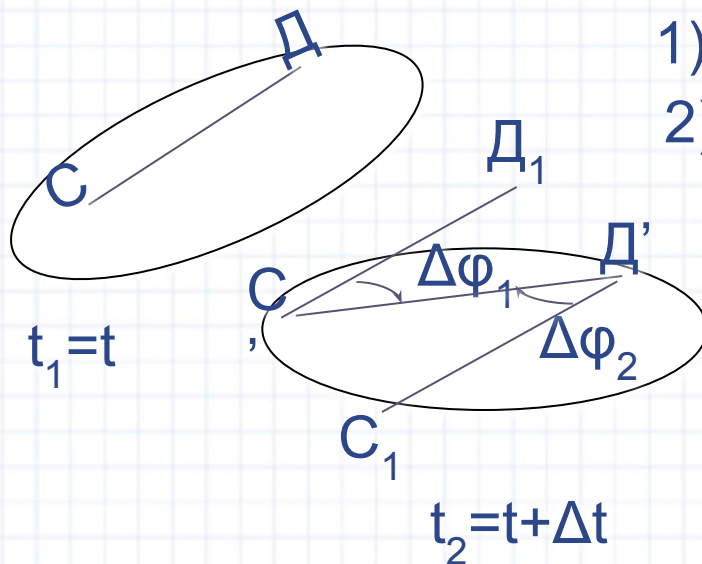
Тогда достаточно исследовать движение точек этого отрезка. Пусть точка  $C$  – полюс

$$\left. \begin{aligned} x_C &= x_C(t) \\ y_C &= y_C(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \right\} (1) - \text{уравнения} \\ \text{плоско-} \\ \text{параллельного} \\ \text{движения} \\ \text{твёрдого тела}$$



### 3.1. Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное. Угловая скорость и угловое ускорение

**Теорема.** Всякое конечное перемещение плоской фигуры в её плоскости может быть составлено из поступательного перемещения вместе с полюсом и вращательного перемещения вокруг полюса



- 1)  $C$  – полюс, тогда  $CD \rightarrow C'D_1 \overset{\Delta\varphi_1}{\curvearrowright} C'D'$
- 2)  $D$  – полюс. тогда  $CD \rightarrow C_1D' \overset{\Delta\varphi_2}{\curvearrowright} C'D'$

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$$

Поступательное перемещение зависит от выбора полюса, вращательное не зависит от выбора полюса

Анализируя (1), имеем, что движение плоской фигуры в её плоскости можно представить как совокупность двух движений: **поступательного** вместе с точкой, выбранной за полюс, и **вращательного** вокруг этого полюса

Для характеристики вращательного движения вокруг подвижной оси, проходящей через полюс, введем понятия угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\varepsilon$  плоской фигуры

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$\omega$  и  $\varepsilon$  не зависят от выбора полюса, т.к.  $\Delta\varphi$  не зависит от выбора полюса

Угловая скорость и угловое ускорение – векторы  $\overline{\omega}$ ,  $\overline{\varepsilon}$

## 3.2. Определение траекторий и скоростей точек плоской фигуры

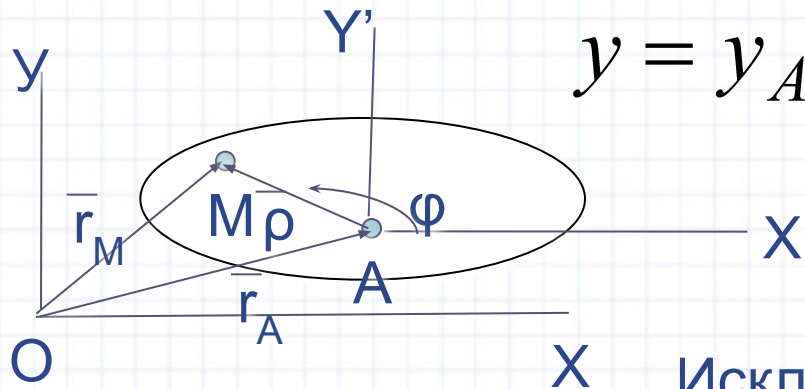
A – полюс; M – произвольная точка плоской фигуры;

$Ax'y'$  – подвижная система

координат, движется поступательно

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{\rho} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_A + \rho \cos \varphi \\ y &= y_A + \rho \sin \varphi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{- уравнения} \\ \text{траектории} \\ \text{точки M в} \\ \text{параметри-} \\ \text{ческом виде} \end{array}$$



Исключив время, получим  
обычное уравнение траектории

## Скорости точек плоской фигуры

$$\bar{\mathbf{V}}_M = \frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}; \quad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{\mathbf{V}}_A; \quad \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{\mathbf{V}}_{MA};$$

$$\bar{\mathbf{V}}_M = \bar{\mathbf{V}}_A + \bar{\mathbf{V}}_{MA} \quad (3)$$

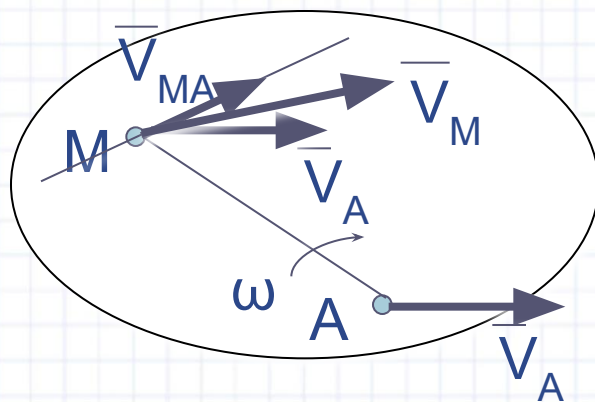
$$|\mathbf{V}_{MA}| = \omega \cdot MA; \quad \bar{\mathbf{V}}_{MA} \perp \overline{MA} \quad (4)$$

Скорость любой точки М плоской фигуры равна геометрической сумме скоростей какой-либо т.А, принятой за полюс, и скорости т.М при её вращении вместе с телом вокруг полюса А.



Вращательная скорость  $V_{MA}$  определяется численно и по направлению так же, как если бы тело совершало вращение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно плоской фигуре

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A V_{MA} \cos(\widehat{V_A, \widehat{V}_{MA}})}; \quad (5)$$



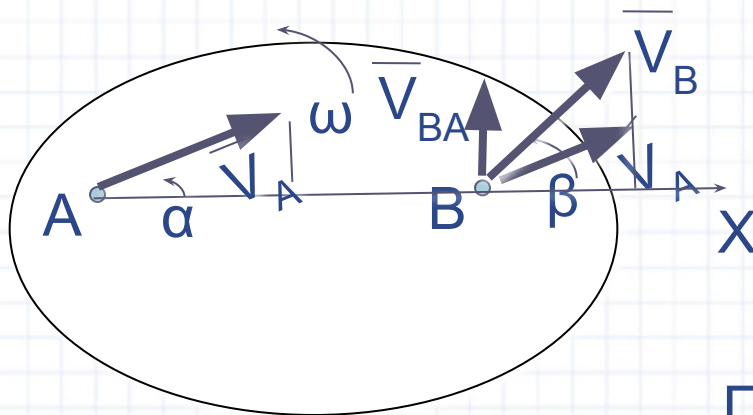
### 3.3. Теорема о проекциях скоростей

Найдем скорость точки В. Пусть точка А – полюс

$$\bar{\mathbf{V}}_B = \bar{\mathbf{V}}_A + \bar{\mathbf{V}}_{BA};$$

$$np_{AB} \bar{\mathbf{V}}_B = np_{AB} \bar{\mathbf{V}}_A + \cancel{np_{AB} \bar{\mathbf{V}}_{BA}}$$

0

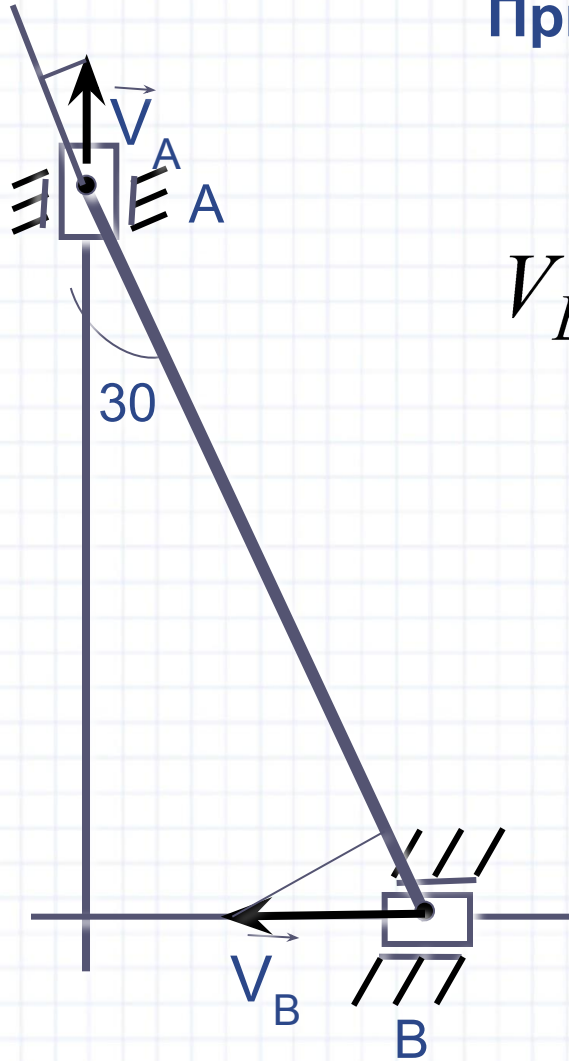


$$np_{AB} \bar{\mathbf{V}}_B = np_{AB} \bar{\mathbf{V}}_A \quad (6)$$

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha$$

При плоском движении проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой

## Пример



$$V_B \cos 60^\circ = V_A \cos 30^\circ$$

## 3.4. Мгновенный центр скоростей (мцс)

**Мгновенный центр скоростей (мцс)** – это такая точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

$$(\cdot)P : V_P = 0$$

**Теорема** (без доказательства)

При непоступательном движении плоской фигуры такая точка (мцс) существует и единственна

Выберем мцс за полюс  $(\cdot)P$

$$\bar{\mathbf{V}}_M = \bar{\mathbf{V}}_P + \bar{\mathbf{V}}_{MP}$$

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_{MP}; \quad 0$$

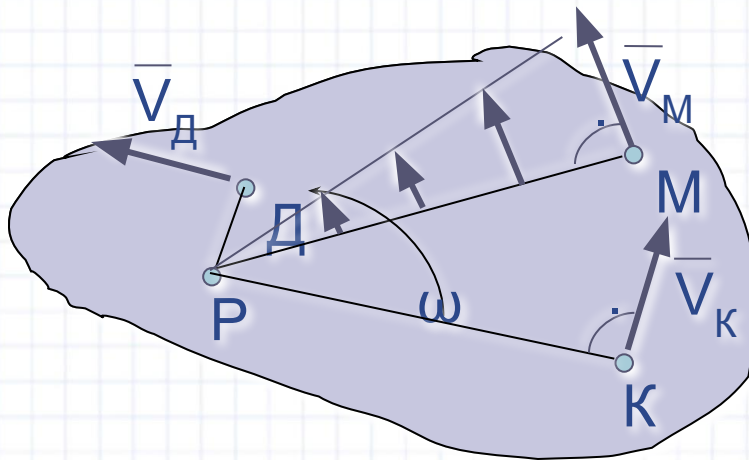
$$\mathbf{V}_M = \omega \cdot MP$$

$$\bar{\mathbf{V}}_M \perp MP$$

## Теорема

Скорости всех точек при плоском движении фигуры можно определять точно так же, как при вращательном движении

Роль неподвижной оси выполняет мгновенная ось, проходящая через мцс перпендикулярно плоскости движения



$$\mathbf{V}_M = \omega \cdot MP$$

$$\mathbf{V}_D = \omega \cdot DP \quad , \Rightarrow ,$$

$$\mathbf{V}_K = \omega \cdot KP$$

$$\omega = \frac{\mathbf{V}_M}{MP} = \frac{\mathbf{V}_D}{DP} = \frac{\mathbf{V}_K}{KP}$$

## Выводы

1. Для определения **мцс** надо знать только **направление скоростей двух** каких-нибудь **точек** плоской фигуры (или траектории этих точек)

МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям (или касательным к траекториям)

2. Для определения **скорости** любой точки плоской фигуры надо знать **модуль** и **направление скорости** какой-нибудь одной точки и **направление скорости** другой

Находят мцс (т. Р), затем величину скорости из

формулы  $\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}$ , направление – в сторону

поворота фигуры. Причём  $\overline{V_B} \perp BP$

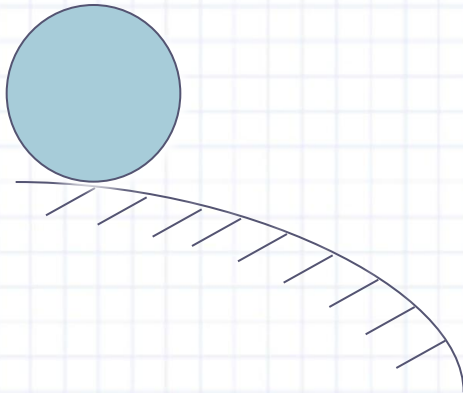
3. **Угловая скорость** плоской фигуры в каждый момент времени равна отношению **скорости** какой-нибудь **точки** фигуры к её **расстоянию от мцс**

$$\omega = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{V_{AB}}{AB} = \frac{|\overline{V}_B - \overline{V}_A|}{AB}$$

т.к.  $V_{AB} = \omega \cdot AB$

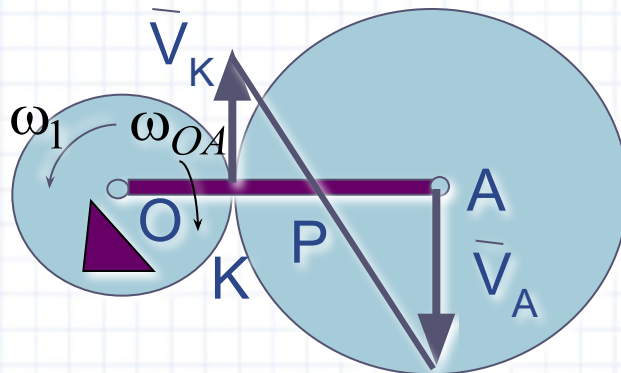
## 3.5. Частные случаи определения МЦС

### 1. Интуитивный



Точка соприкосновения неподвижной поверхности и катящегося без скольжения диска есть мцс

### 2. Из построения



Колесо с закрепленным центром

$$\mathbf{V}_O = 0$$

$$\mathbf{V}_A = \omega_{OA} \cdot OA; \quad \mathbf{V}_K = \omega_1 \cdot OK;$$

$$\mathbf{V}_A = \omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2); \quad \mathbf{V}_K = \omega_1 R_1$$

$$\bar{\mathbf{V}}_A \perp OA$$

$$\bar{\mathbf{V}}_K \perp OK$$

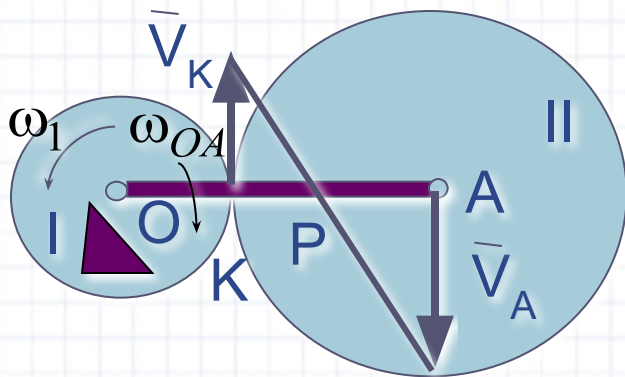


(·)P – МЦС

(·)A и (·)K принадлежат II колесу,  $\Rightarrow \omega_{II} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_K}{KP}$ ;

Свойство пропорции  $2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{4+8}{2+4} = \frac{12}{6} = \frac{8-4}{4-2} = \frac{4}{2}$

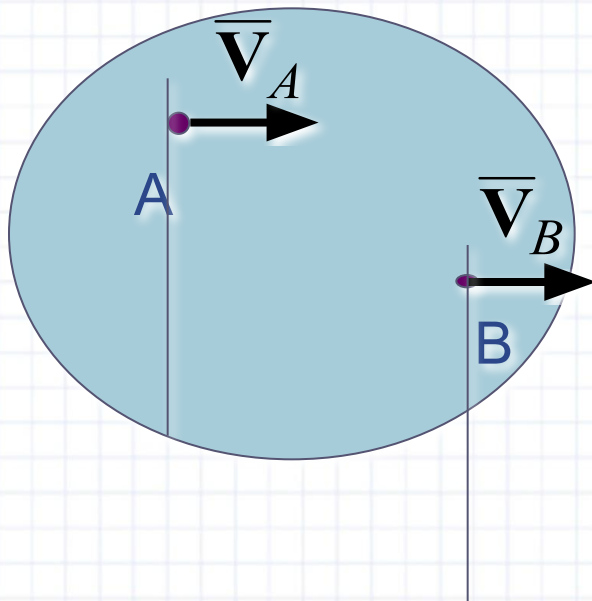
$\omega_{II} = \frac{V_A + V_K}{AP + KP} = \frac{V_A + V_K}{R_2}$ ;  $R_2$  - радиус II колеса



Если  $V_A \parallel V_K$  и  $AK \perp V_A$ , то мцс находят из построения

### 3. Случай мгновенно поступательного движения

Если  $V_A \parallel V_B$ , но  $AB \perp V_A$ , то мцс в бесконечности



$$\omega = 0 = \frac{V_A}{\infty} = \frac{V_B}{\infty};$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B$$

4. Если известна скорость какой-либо  $(\cdot)B$  и угловая скорость тела, то мцс лежит на  $\perp$  к  $V_B$  на расстоянии BP

$$BP = \frac{V_B}{\omega}$$

### 3.6. Определение ускорений точек при ППД

$$\bar{\mathbf{V}}_B = \bar{\mathbf{V}}_A + \bar{\mathbf{V}}_{BA} \quad (7) \quad \text{продифференцируем}$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}_B}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{V}}_A}{dt} + \frac{d\bar{\mathbf{V}}_{BA}}{dt}, \quad \Rightarrow \bar{\mathbf{a}}_B = \bar{\mathbf{a}}_A + \bar{\mathbf{a}}_{BA};$$

$$\bar{\mathbf{a}}_B = \bar{\mathbf{a}}_A + \bar{\mathbf{a}}_{BA}^{\tau} + \bar{\mathbf{a}}_{BA}^n; \quad a_{BA} = BA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

**Пример.** Два колеса соединены водилом ОА. I-е колесо вращается с угловой скоростью  $\omega_1$  относительно неподвижного шарнира О. Водило ОА имеет  $\omega_{OA}$ , причем вращение в другую сторону. Найти ускорение II-го колеса, зная  $R_I, R_{II}, \omega_1, \omega_{OA}, \varepsilon_I, \varepsilon_{OA}$

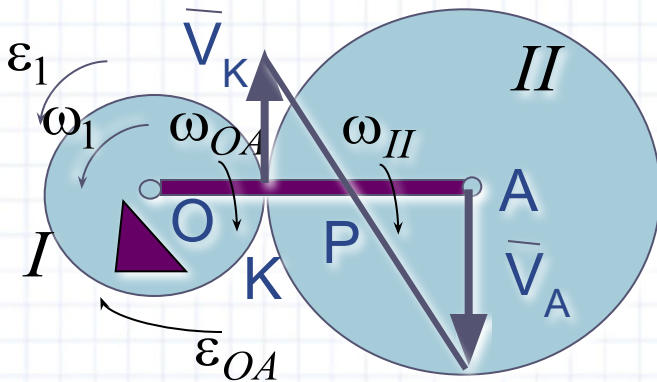
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_A &= \omega_{OA} \cdot OA; \\ \mathbf{V}_K &= \omega_1 \cdot OK; \end{aligned} \right\}$$

$$\omega_{II} = \frac{\mathbf{V}_A}{AP} = \frac{\mathbf{V}_K}{KP}; \Rightarrow$$

$$\omega_{II} = \frac{\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_K}{AP + KP} = \frac{\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_K}{R_{II}};$$

$$\omega_{II} = \frac{\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_K}{R_{II}}; \varepsilon_{II} = \frac{a_A^\tau + a_K^\tau}{R_{II}};$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA}(R_I + R_{II}) \quad a_K^\tau = \varepsilon_I R_I$$



Можем найти линейное ускорение любой точки колеса II

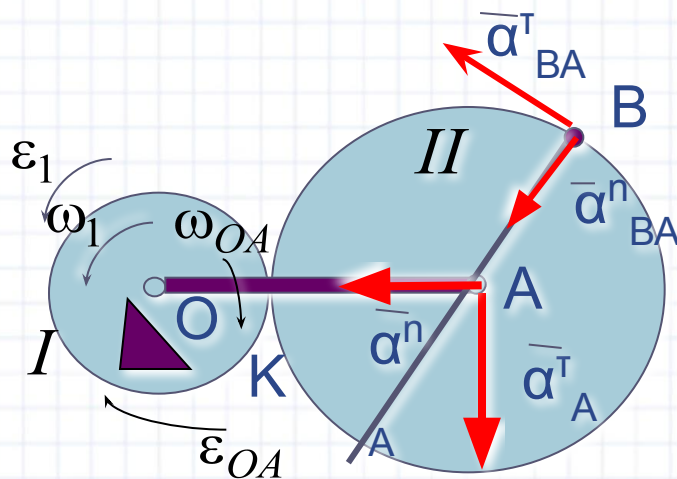
$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA}(R_I + R_{II})$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{II} R_{II}$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 (R_I + R_{II})$$

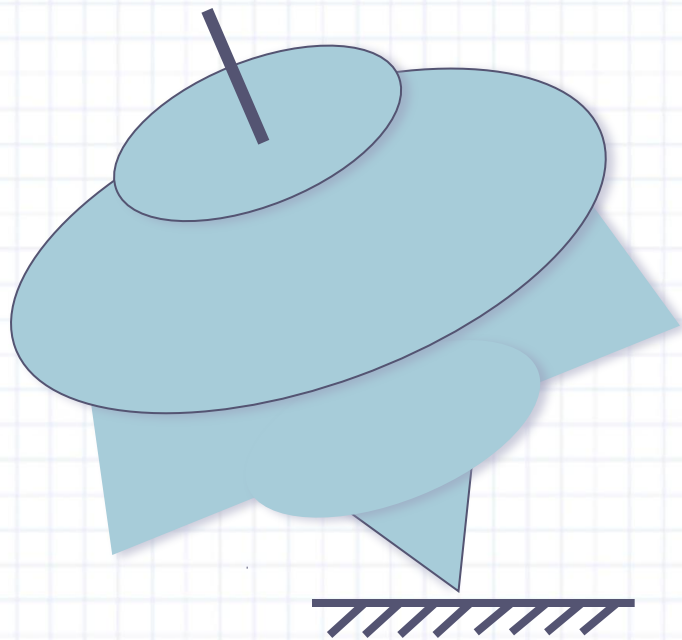
$$a_{BA}^n = \omega_{II}^2 R_{II}$$



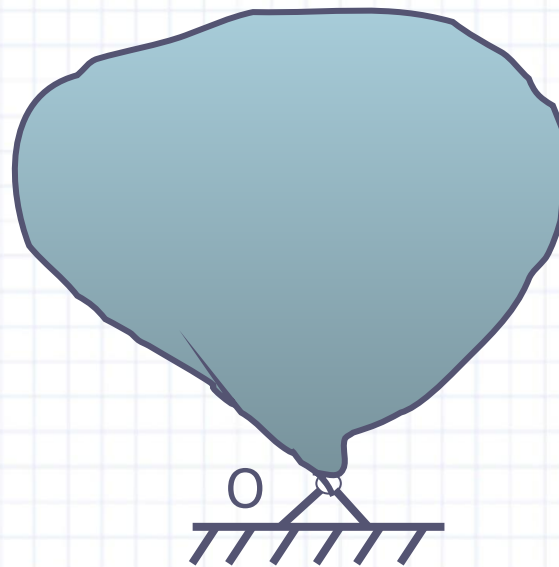
где 
$$\varepsilon_{II} = \frac{a_A^\tau + a_K^\tau}{R_{II}}$$

## § 4. Сферическое движение твердого тела

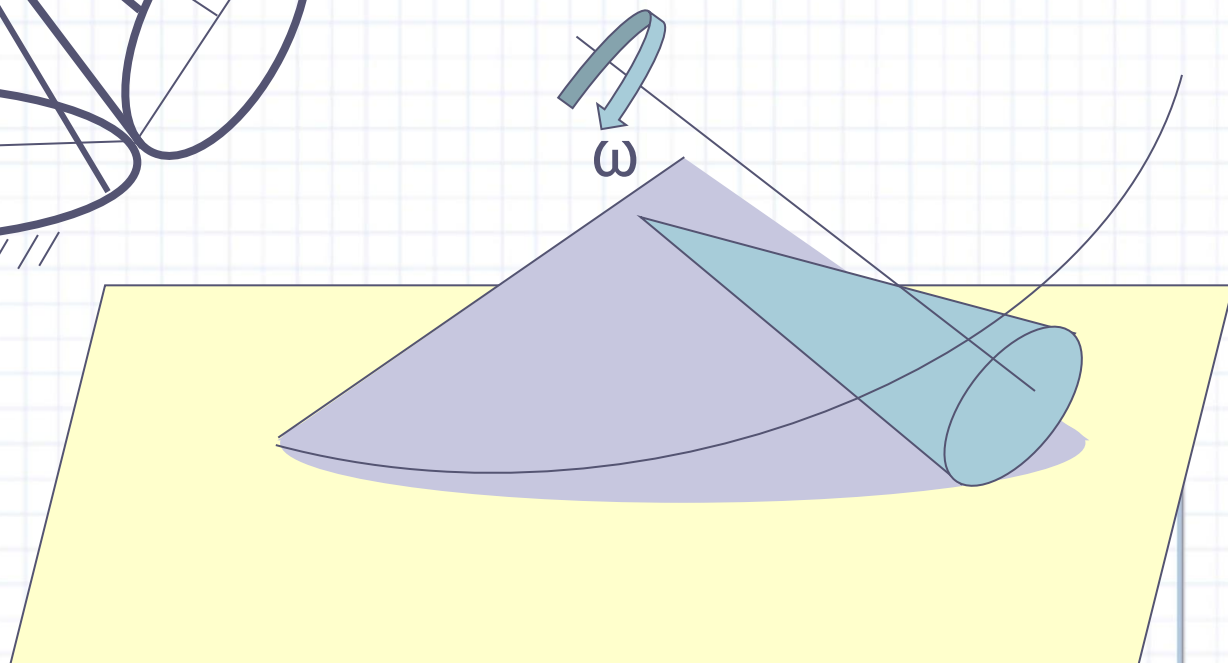
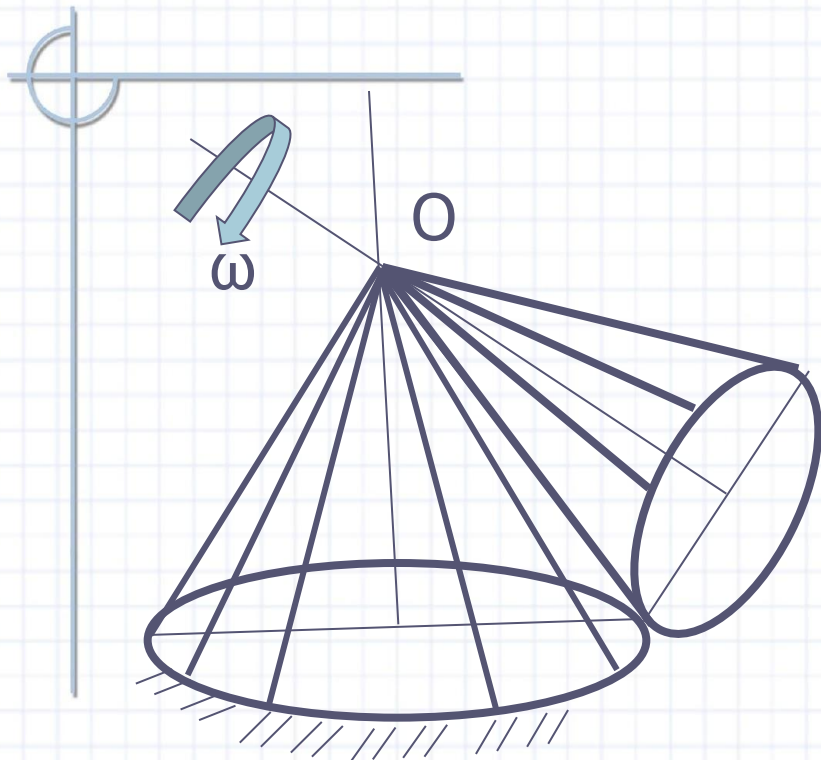
Движ-е тела, когда во все время движения одна его точка остается неподвижной наз-ся **сферическим движением**



а) волчок;



б) тело, закрепленное шаровым шарниром;



в) качение конуса по неподвижной поверхности

## а) Уравнения движения:

Линия  $OK$  – линия узлов.

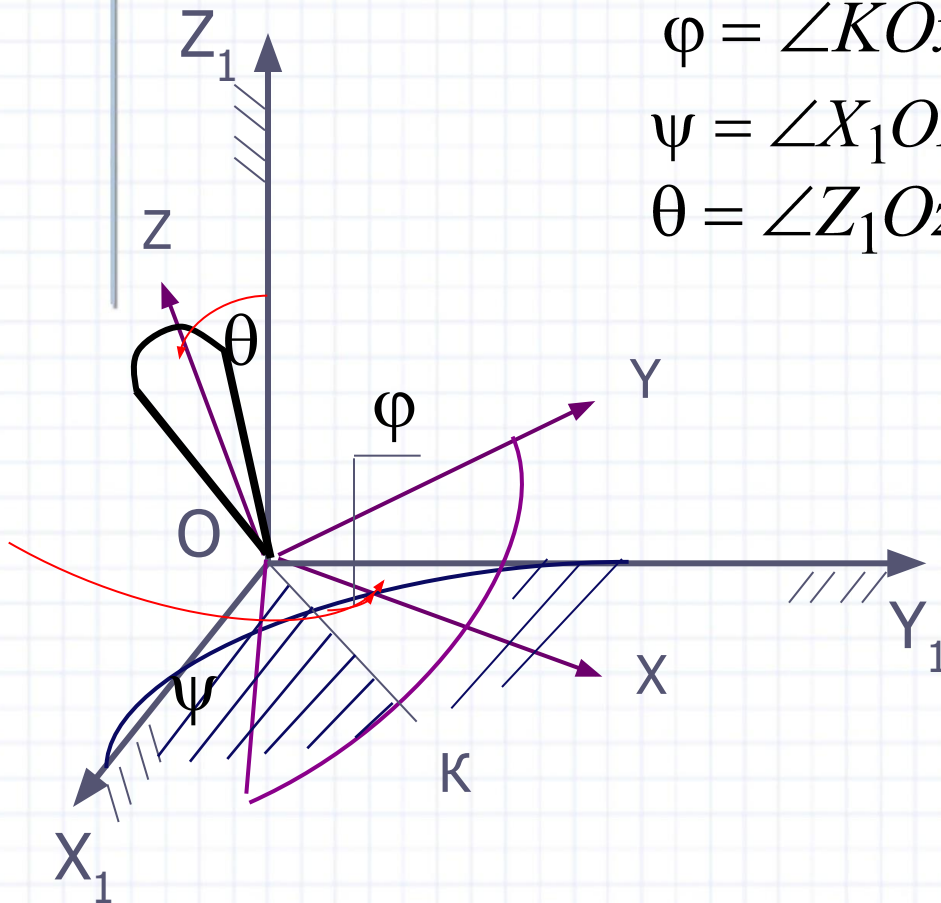
Положение тела отн-но неподвижных осей  $OX_1Y_1Z_1$  можно определить углами Эйлера:

$\varphi = \angle KOx$  - угол собственного вращения

$\psi = \angle X_1OK$  - угол прецессии

$\theta = \angle Z_1Oz$  - угол нутации

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= f_1(t) \\ \psi &= f_2(t) \\ \theta &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{- уравнения} \\ \text{сферич. дв-ния} \\ \text{тв. тела} \end{array}$$





б) угловая скорость тела: **Линия ОК – линия узлов.**

$\omega_1 = \Phi$  - собственное вращение вокруг оси z

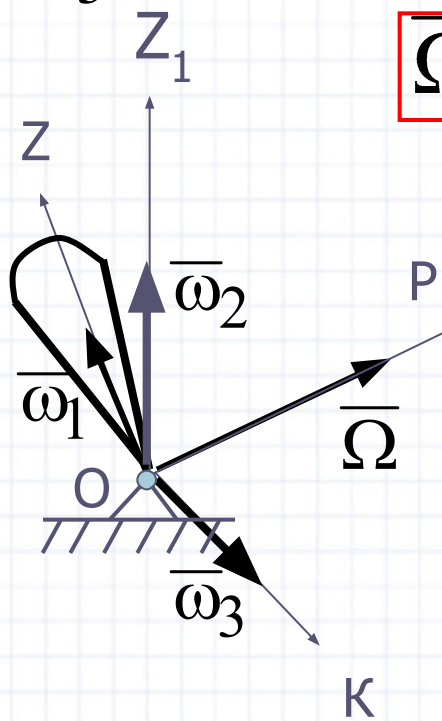
$\omega_2 = \Psi$  - вращение вокруг оси  $Z_1$  (прецессия)

$\omega_3 = \Theta$  - вращение вокруг линии узлов ОК (нута́ция)

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$$

изменяется как по величине так и по направлению, т.к. меняются все три вектора угловых скоростей

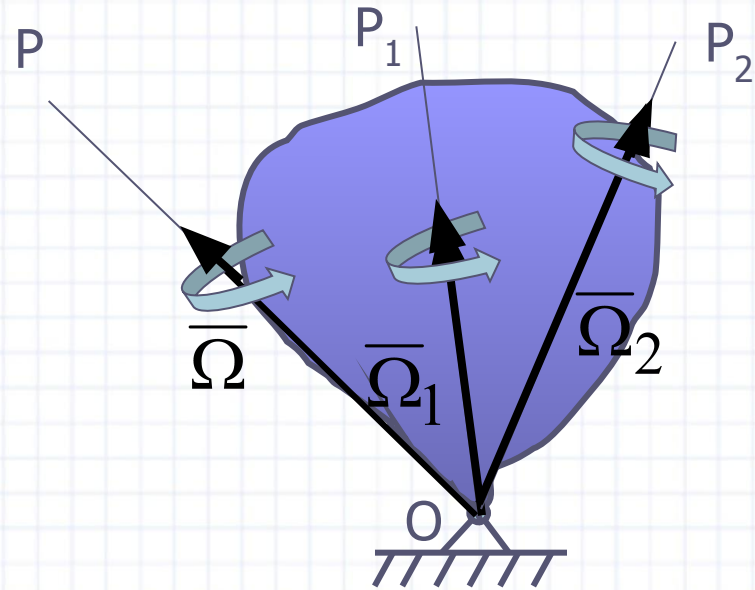
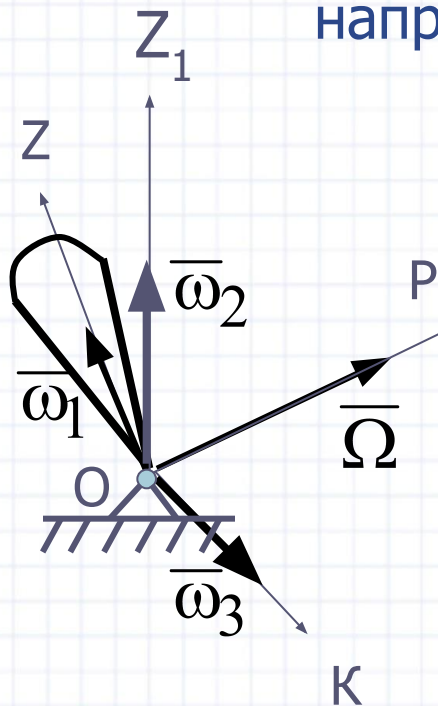
$\bar{\Omega}$  - называют *мгновенной угловой скоростью тела*



в) движение тела:

Элементарное перемещение  $d\Theta$  за время  $dt$  – элементарный поворот вокруг оси  $OP$ , вдоль кот. направлен вектор  $\bar{\Omega}$

$d\Theta = \Omega dt$   $OP$  называют *мгновенной осью вращения*, её напр-ние постоянно меняется со временем



Дв-ние складывается из ряда последовательных элемент. поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через т.О

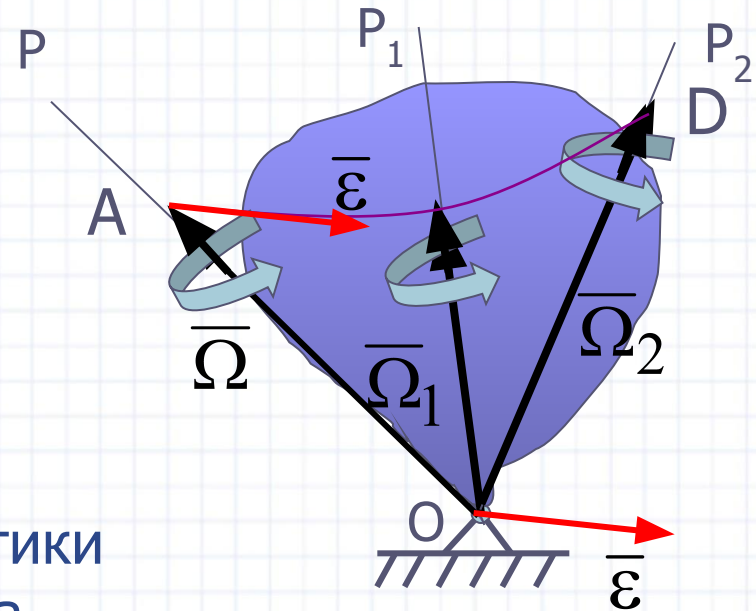
г) угловое ускорение тела:

Векторная величина, характеризующая изменение с течением времени угловой скорости по модулю и по направлению – *мгновенное угловое ускорение тела*

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\Omega}/dt$$

AD – годограф вектора  $\bar{\Omega}$   
Направление  $\varepsilon$  совпадает с касательной к кривой AD в соответствующей точке

Векторы  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\varepsilon}$  - основные кинематические характеристики сферического движения тела



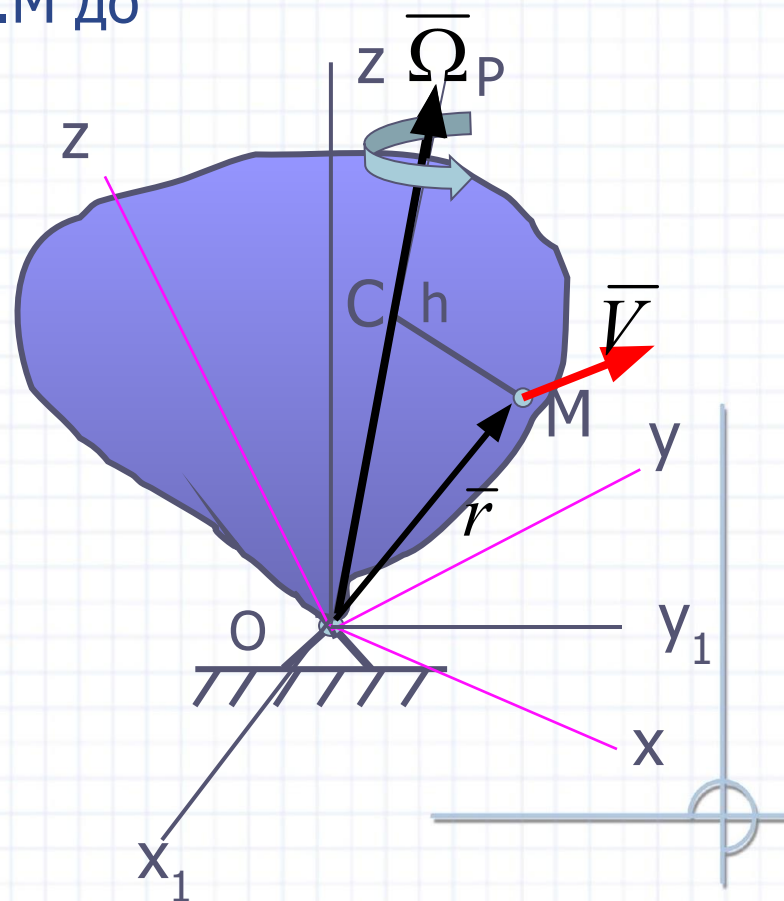
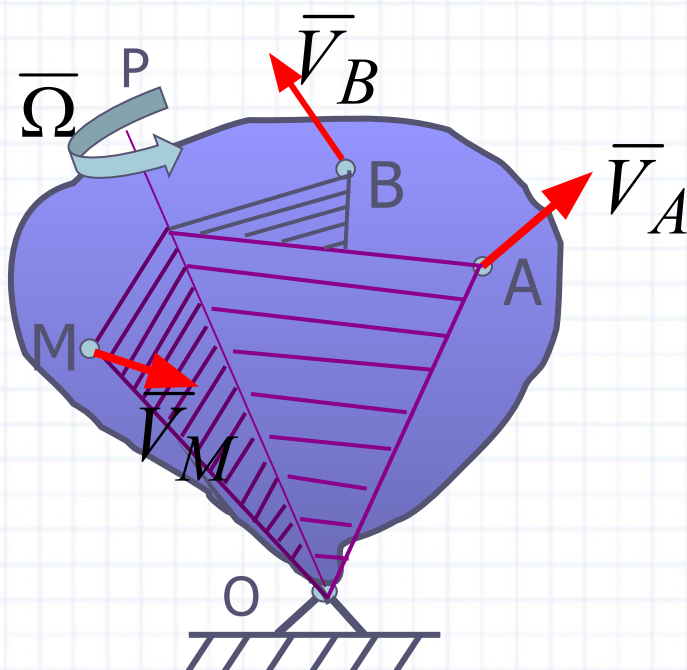
д) линейные скорости точек тв. тела:

Скорость какой-нибудь т.М тела -  $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ , где  $\vec{r}$  - радиус-вектор от т.О до т.М,  $\vec{\Omega}$  - вектор мгно. угловой ск-ти тела

Направлен  $\vec{V} \perp$  пл-ти МОР в сторону поворота тела

$$V = \Omega \cdot h,$$

где  $h = MC$  - расстояние от т.М до мгновенной оси вращения



е) линейные ускорения точек тв. тела:

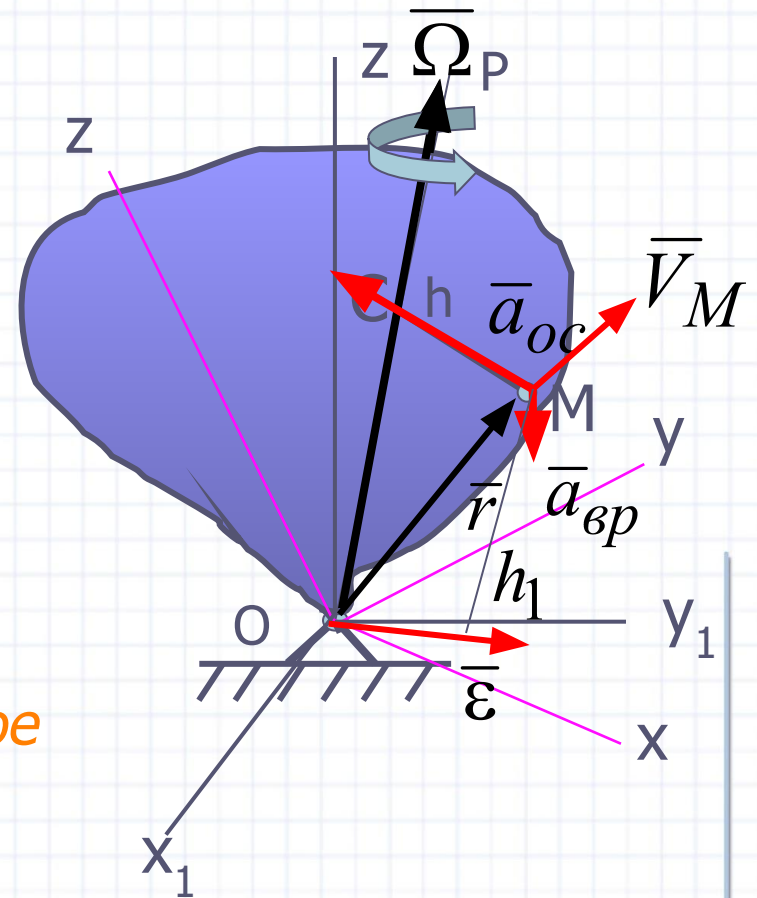
Ускорение какой-нибудь т.М тела -

$$\bar{a} = \bar{V}' = (\bar{\Omega} \times \bar{r}) + (\bar{\Omega} \times \bar{V})$$

или 
$$\bar{a} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\Omega} \times \bar{V})$$

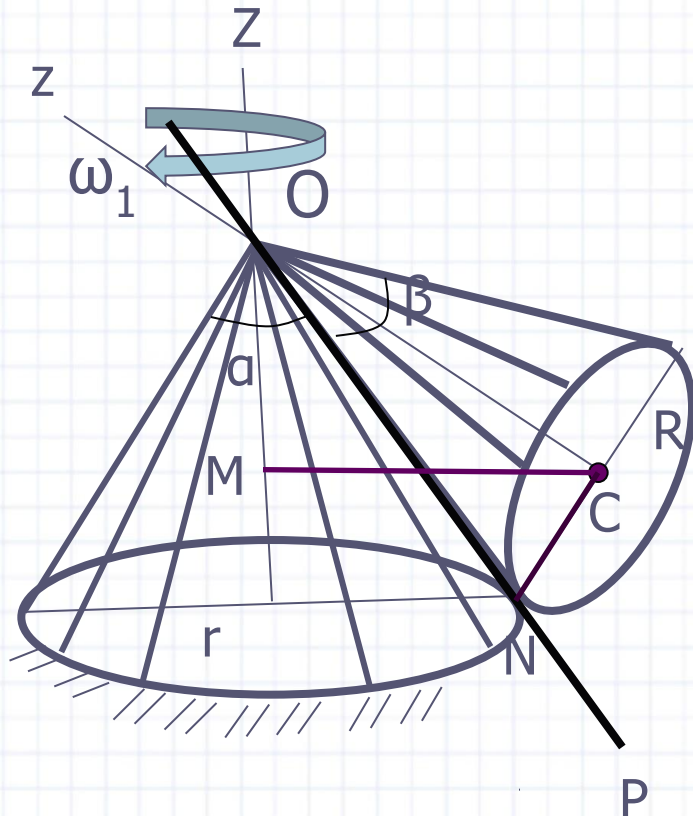
$$\bar{a}_{вр} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})$$
 - вращательное ускорение

$$\bar{a}_{ос} = (\bar{\Omega} \times \bar{V})$$
 - осестремительное ускорение



## Пример:

Подвижный конус катится без проскальзывания по неподвижному так, что угл. ск-ть вращения оси  $OC$  вокруг оси  $Z$  неподв. конуса постоянна и равна  $\omega_1$ . Чему равна мгновенная угловая скорость тела, если известны углы и радиус основания  $R$



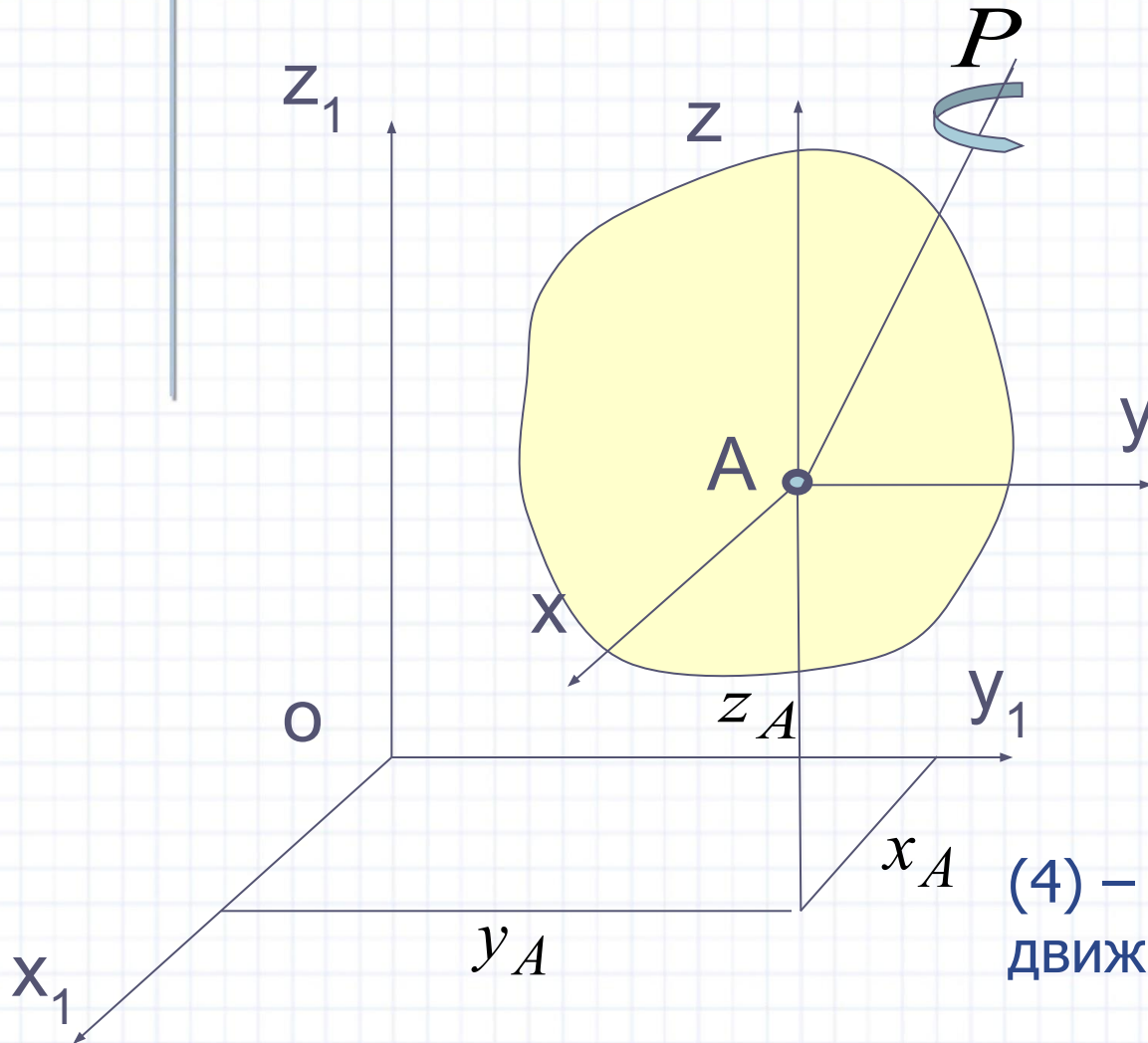
$$V_C = \omega_1 \cdot CM \quad V_C = \Omega \cdot CN$$

$$CM = OC \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad CN = OC \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\omega_1 \cdot OC \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \Omega \cdot OC \sin \frac{\beta}{2}$$


$$\Omega = \omega_1 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} / \sin \frac{\beta}{2}$$

## § 5. Общий случай движения свободного твердого тела



$$\left[ \begin{array}{l} x_A = x_A(t); \\ y_A = y_A(t); \\ z_A = z_A(t); \\ \varphi = \varphi(t); \\ \psi = \psi(t); \\ \theta = \theta(t); \end{array} \right. \quad (4)$$

(4) – уравнения свободного движения твёрдого тела

- 
- ✓ Движение свободного твердого тела в общем случае можно рассматривать как совокупность поступательного движения вместе с точкой  $A$ , принятой за плюс, и серии элементарных поворотов вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку  $A$

