Степень с рациональным показателем. Преобразование выражений, содержащих степень с рациональным показателем.

Нургалиева Айнаш Кенжебековна

вы знаете: Способы возведения любого числа в натуральную степень, а также способы возведения любого, отличного от нуля числа ($a \neq 0$), в нулевую и целую отрицательную степень.

Чтобы возвести число в отрицательную степень нужно:

- «перевернуть» число. Записать его в виде дроби с единицей наверху (в числителе) и с исходным числом в степени внизу;
- заменить отрицательную степень на положительную;
- возвести число в положительную степень.

Общая формула возведения в отрицательную степень выглядит следующим образом.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

,где $a \neq 0$, $n \in z$ (n принадлежит целым числам).

Любое число в нулевой степени, за исключением нуля, равно единице:

$$a^0 = 1, (a \neq 0)$$

Теперь выясним как можно возвести любое неотрицательное число ($a \geqslant 0$) в положительную и отрицательную дробные степени, т. е. в любую рациональную степень.

Пусть a — неотрицательное число и требуется возвести его в дробную степень $\frac{m}{n}$. Вам известно равенство $(a^m)^n = a^{mn}$, т. е. правило возведения степени в степень.

В приведенном равенстве предположим, что $m = \frac{1}{n}$, тогда получим:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a.$$

Отсюда можно заключить, что $a^{\frac{1}{n}}$ является корнем n-й степени от числа a, т. е. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Из этого следует, что $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$

Заметим, что выражения $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ и $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ имеют одно и то же значение.

В самом деле: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ и $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Следовательно,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Таким образом, имеет место следующее равенство: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Определение 1. ***Степенью неотрицательного числа а с рациональным показателем*** $\frac{m}{n}$ ***(где*** $\frac{m}{n}$ ***— несократимая дробь) называется значение корня n-й степени из числа*** a^m.

Следовательно, по определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$.

ПРИМЕР

1. Напишите степень с рациональным показателем в виде корня n-й степени: 1) $5^{\frac{2}{3}}$; 2) $3{,}7^{-0{,}7}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}}$.

Решение. 1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$; 2) $3{,}7^{-0{,}7} = 3{,}7^{-\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{3{,}7^{-7}}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}} = \sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Ответ: 1) $\sqrt[3]{25}$; 2) $\sqrt[10]{3{,}7^{-7}}$; 3) $\sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Степень с основанием, равным нулю, определяется только для положительного дробного показателя: если $\frac{m}{n} > 0$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$. Для отрицательных оснований степень с дробным показателем в школьном курсе математики не рассматривается.

Над степенями с рациональными показателями можно производить действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня по тем же правилам, как над степенями с целыми показателями и степенями с одинаковыми основаниями: 1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$;

2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$; 3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$; 4) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$,

где n, q — натуральные, m, p — целые числа.

Рассмотрим доказательство первого и второго свойств.

Докажем, что $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Доказательство. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} =$

$= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, т. е. показатели степеней складываются так же, как и в случае умножения степеней с целыми показателями. $\blacksquare$

Докажем, что $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

Доказательство. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} =$

$= \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$, показатели степеней вычитаются так же, как и в случае деления степеней с целыми показателями. $\blacksquare$

ПРИМЕР

2. Вычислим: $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}}$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}}$.

Решение. 1) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}} = 16^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{16^9} = \sqrt[4]{2^{36}} = 2^9 =$
$= 512$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}} = 81^{\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$.

Ответ: 1) 5; 2) 512; 3) 3.

ПРИМЕР

3. Вычислим: 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$; 3) $(0{,}15)^{\frac{8}{5}} : (0{,}15)^{-\frac{2}{5}}$.

Решение. 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 5^1 = 5$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} =$
$= \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; 3) $(0{,}15)^{\frac{8}{5}} : (0{,}15)^{-\frac{2}{5}} = (0{,}15)^{\frac{8}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)} = (0{,}15)^2 = 0{,}0225$.

Ответ: 1) 5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0,0225.

Упражнения

10.1. Запишите следующие степени с дробными показателями в виде корней:

1) $11^{\frac{2}{3}}$; 2) $0,7^{-\frac{5}{4}}$; 3) $\left(\frac{3}{10}\right)^{0,75}$; 4) $(-21)^{1\frac{1}{5}}$;

5) $a^{-2,5}$; 6) $(b+1)^{1,5}$; 7) $(a-2b)^{3\frac{1}{2}}$; 8) $\left(x-y^2\right)^{-\frac{7}{4}}$.

10.2. Вычислите:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $16^{\frac{3}{4}}$; 3) $64^{-\frac{1}{2}}$; 4) $0,25^{-\frac{1}{2}}$;

5) $0,36^{\frac{1}{2}}$; 6) $(-27)^{-\frac{4}{3}}$; 7) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; 8) $32^{-\frac{1}{5}}$.

10.3. Запишите следующие корни в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt[3]{a^2}$; 2) $\sqrt[5]{b^3}$; 3) $\sqrt[3]{a^2+b^2}$; 4) $\sqrt[3]{x-y}$;

5) $\sqrt[5]{a^2b^3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$; 8) $\frac{2}{\sqrt[3]{a-b}}$.

Домашнее задание

10.4. Вычислите:

1) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{-\frac{3}{4}} \cdot 32^{-\frac{4}{5}} \cdot 2^3$;

2) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$;

3) $64^{\frac{2}{3}} : 64^{\frac{1}{2}}$;

4) $729^{\frac{1}{2}} : 729^{\frac{1}{3}}$.

10.5. Упростите:

1) $a^{1\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}}$;

2) $(x + y)^{\frac{4}{5}} : (x + y)^{\frac{2}{5}}$;

3) $a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$;

4) $b^{\frac{7}{12}} \cdot y^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}}$.