

Степень с рациональным показателем. Преобразование выражений, содержащих степень с рациональным показателем.

Нургалиева Айнаш
Кенжебековна

вы знаете:

Способы возведения любого числа в натуральную степень, а также способы возведения любого, отличного от нуля числа ($a \neq 0$), в нулевую и целую отрицательную степень.

Чтобы возвести число в отрицательную степень нужно:

- «перевернуть» число. Записать его в виде дроби с единицей наверху (в числителе) и с исходным числом в степени внизу;
- заменить отрицательную степень на положительную;
- возвести число в положительную степень.

Общая формула возведения в отрицательную степень выглядит следующим образом.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

где $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ (n принадлежит целым числам).

Любое число в нулевой степени, за исключением нуля, равно единице:

$$a^0 = 1, (a \neq 0)$$

Теперь выясним как можно возвести любое неотрицательное число ($a > 0$) в положительную и отрицательную дробные степени, т. е. в любую рациональную степень.

Пусть a — неотрицательное число и требуется возвести его в дробную степень $\frac{m}{n}$. Вам известно равенство $(a^m)^n = a^{mn}$, т. е. правило возведения степени в степень.

В приведенном равенстве предположим, что $m = \frac{1}{n}$, тогда получим:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a.$$

Отсюда можно заключить, что $a^{\frac{1}{n}}$ является корнем n -й степени от числа a , т. е. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Из этого следует, что $(a^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Заметим, что выражения $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ и $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ имеют одно и то же значение.

В самом деле: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ и $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Следовательно,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Таким образом, имеет место следующее равенство: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Определение 1. Степенью неотрицательного числа a с рациональным показателем $\frac{m}{n}$ (где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь) называется значение корня n -й степени из числа a^m .

Следовательно, по определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$.

ПРИМЕР

1. Напишите степень с рациональным показателем в виде корня n -й степени: 1) $5^{\frac{2}{3}}$; 2) $3,7^{-0,7}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}}$.

Решение. 1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$; 2) $3,7^{-0,7} = 3,7^{-\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{3,7^{-7}}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}} = \sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Ответ: 1) $\sqrt[3]{25}$; 2) $\sqrt[10]{3,7^{-7}}$; 3) $\sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Степень с основанием, равным нулю, определяется только для положительного дробного показателя: если $\frac{m}{n} > 0$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$. Для отрицательных оснований степень с дробным показателем в школьном курсе математики не рассматривается.

Над степенями с рациональными показателями можно производить действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня по тем же правилам, как над степенями с целыми показате-

лями и степенями с одинаковыми основаниями: 1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m+p}{nq}}$;

2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m-p}{nq}}$; 3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$; 4) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$,

где n, q — натуральные, m, p — целые числа.

Рассмотрим доказательство первого и второго свойств.

Докажем, что $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m+p}{nq}}$.

Доказательство. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m+p}{nq}}$, т. е. показатели степеней складываются так же, как и в случае умножения степеней с целыми показателями. 

Докажем, что $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m-p}{nq}}$.

Доказательство. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m-p}{nq}}$, показатели степеней вычитаются так же, как и в случае деления степеней с целыми показателями. 

ПРИМЕР

2. Вычислим: 1) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}}$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}}$.

Решение. 1) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5^1 = 5$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}} = 16^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{16^9} = \sqrt[4]{2^{36}} = 2^9 = 512$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}} = 81^{\frac{3}{4} + (-\frac{1}{2})} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$.

Ответ: 1) 5; 2) 512; 3) 3.

ПРИМЕР

3. Вычислим: 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$; 3) $(0,15)^{\frac{8}{5}} : (0,15)^{-\frac{2}{5}}$.

Решение. 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3} - (-\frac{1}{3})} = 5^1 = 5$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; 3) $(0,15)^{\frac{8}{5}} : (0,15)^{-\frac{2}{5}} = (0,15)^{\frac{8}{5} - (-\frac{2}{5})} = (0,15)^2 = 0,0225$.

Ответ: 1) 5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0,0225.

Упражнения

10.1. Запишите следующие степени с дробными показателями в виде корней:

$$\begin{array}{llll} 1) 11^{\frac{2}{3}}; & 2) 0,7^{-\frac{5}{4}}; & 3) \left(\frac{3}{10}\right)^{0,75}; & 4) (-21)^{1\frac{1}{5}}; \\ 5) a^{-2,5}; & 6) (b+1)^{1,5}; & 7) (a-2b)^{3\frac{1}{2}}; & 8) (x-y^2)^{-\frac{7}{4}}. \end{array}$$

10.2. Вычислите:

$$\begin{array}{llll} 1) 8^{\frac{1}{3}}; & 2) 16^{\frac{3}{4}}; & 3) 64^{\frac{1}{2}}; & 4) 0,25^{-\frac{1}{2}}; \\ 5) 0,36^{\frac{1}{2}}; & 6) (-27)^{\frac{4}{3}}; & 7) \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}; & 8) 32^{\frac{1}{5}}. \end{array}$$

10.3. Запишите следующие корни в виде степени с дробным показателем:

$$\begin{array}{llll} 1) \sqrt[3]{a^2}; & 2) \sqrt[5]{b^3}; & 3) \sqrt[3]{a^2 + b^2}; & 4) \sqrt[3]{x-y}; \\ 5) \sqrt[5]{a^2 b^3}; & 6) \frac{1}{\sqrt{a}}; & 7) \frac{1}{\sqrt{a+b}}; & 8) \frac{2}{\sqrt[3]{a-b}}. \end{array}$$

Домашнее задание

10.4. Вычислите:

$$1) 4^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{-\frac{3}{4}} \cdot 32^{\frac{4}{5}} \cdot 2^3;$$

$$2) 27^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3;$$

$$3) 64^{\frac{2}{3}} : 64^{\frac{1}{2}};$$

$$4) 729^{\frac{1}{2}} : 729^{\frac{1}{3}}.$$

10.5. Упростите:

$$1) a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{2}{3}};$$

$$2) (x + y)^{\frac{4}{5}} : (x + y)^{\frac{2}{5}};$$

$$3) a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{2}{3}};$$

$$4) b^{\frac{7}{12}} \cdot y^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}}.$$