

Первообразная

1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ
2. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

Под дифференцированием функции $f(x)$ мы понимаем нахождение ее производной $f'(x)$.

Нахождение функции $f(x)$ по заданной ее производной $f'(x)$ называют операцией **интегрирования**.



Таким образом, операция интегрирования обратна операции дифференцирования. Следовательно, операция интегрирования состоит в том, что по заданной производной $f'(x)$ находят (восстанавливают) функцию $f(x)$.



Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.

Например, функция $F(x)=x^2$ есть первообразная для функции $f(x)=2x$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$, так как для всех действительных x справедливо равенство $F'(x)=(x^2)'=2x$

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ можно представить в виде $F(x)+C$, где C – любое действительное число.



$f(x)$ находится неоднозначно, ведь в качестве $f(x)$ могут быть использованы и такие функции, как

$$f(x) = x^4 + 3,$$

$$f(x) = x^4 - 6,$$

и др., так как производная каждой из данных функций равна $4x^3$. Все эти функции отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

Общее решение задачи можно записать в виде

$$f(x) = x^4 + C, \text{ где } C \text{ — произвольное}$$

действительное число. Любую из найденных

функций $f(x)$ называют первообразной для

$$\text{функции } f'(x) = 4x^3.$$

Упражнение с решением

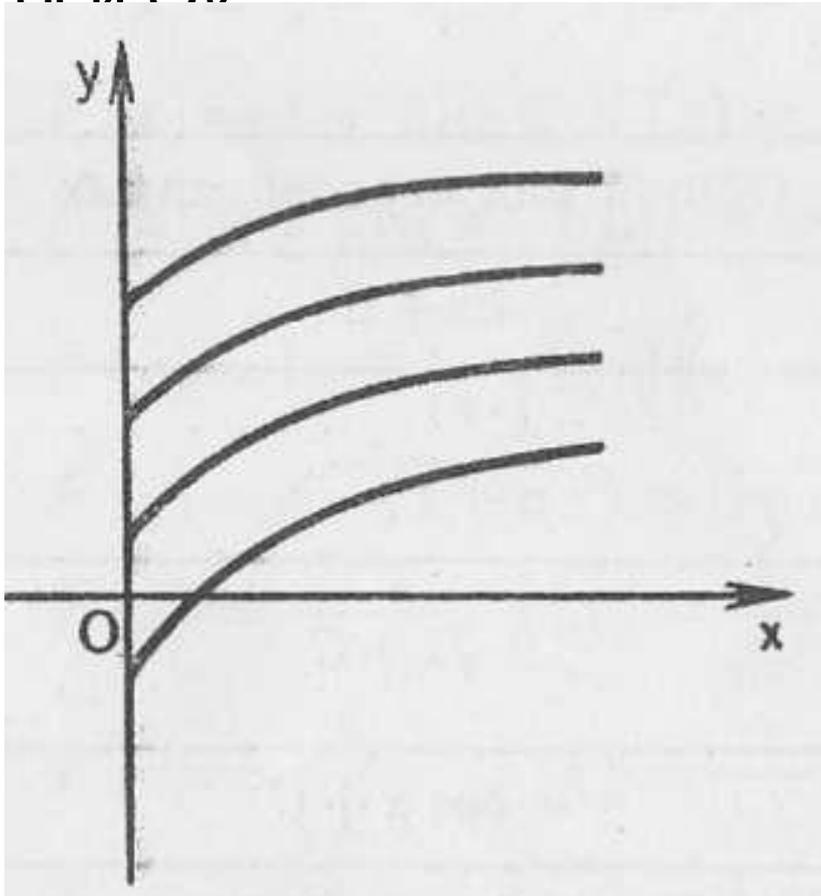
1) Доказать, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если $F(x)=3x^4$, $f(x)=12x^3$, $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Так как $F(x) = 3x^4$, то $F'(x) = (3x^4)' = 12x^3 = f(x)$ для всех x , что и требовалось доказать.

2) $F(x)=\sin x$ является первообразной функции $f(x)=\cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$



Геометрически основное свойство первообразных можно интерпретировать так: графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из любого из них путем параллельного переноса вдоль оси Oy .



Выбором C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

Пример

Для функции $f(x) = x$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку $(2; 5)$.

Все первообразные функции $f(x) = x$ находятся по формуле $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, так как $F'(x) = x$. Найдем

число C , такое, чтобы график функции $y = \frac{x^2}{2} + C$

проходил через точку $(2; 5)$. Подставляя $x = 2$, $y = 5$, получаем $5 = \frac{2^2}{2} + C$, откуда $C = 3$. Следова-

тельно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$. \triangleleft



упражнения с решениями

• Для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ найти первообразную, график которой пройдет через точку $M(\frac{\pi}{4}; 0)$.

Для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(\frac{\pi}{4}; 0)$.



Таблица первообразных для некоторых функций:

Функция	Первообразная
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx + b)^p, p \neq -1, k \neq 0$	$\frac{(kx + b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\frac{1}{kx + b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} \ln(kx + b) + C$
$e^{kx - b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} e^{kx - b} + C$
$\sin(kx + b), k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx + b) + C$
$\cos(kx + b), k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx + b) + C$

3. ТРИ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

1. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$,

а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$, т. е.

$$(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x).$$



Для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(\frac{\pi}{4}; 0)$.

• Для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(\frac{\pi}{4}; 0)$.



2. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k — постоянная, то $kF(x)$ есть первообразная для $kf(x)$,

$$\text{т. е. } (kF(x))' = kf(x).$$



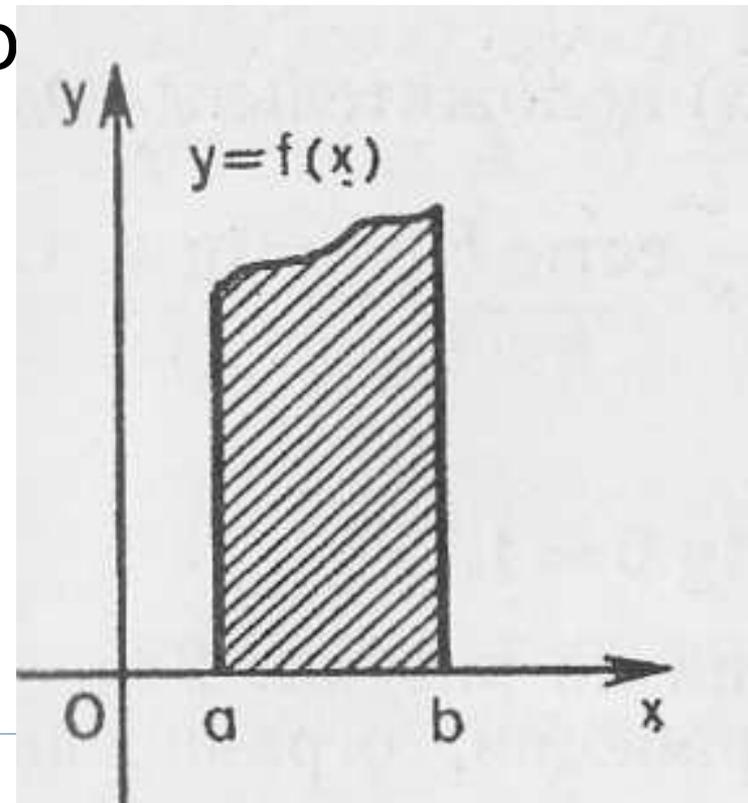
Для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ найти первообразную,
график которой проходит через точку $M(\frac{\pi}{4}; 0)$.



4. КРИВОЛИНЕЙНАЯ ТРАПЕЦИЯ И ЕЕ ПЛОЩАДЬ

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f , осью Ox и пр b .

Отрезок $[a; b]$ называют основанием этой криволинейной трапеции



Теорема. Пусть $f(x)$ – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, $S(x)$ – площадь соответствующей криволинейной трапеции. Если F есть первообразная для f на интервале, содержащем отрезок $[a; b]$, то

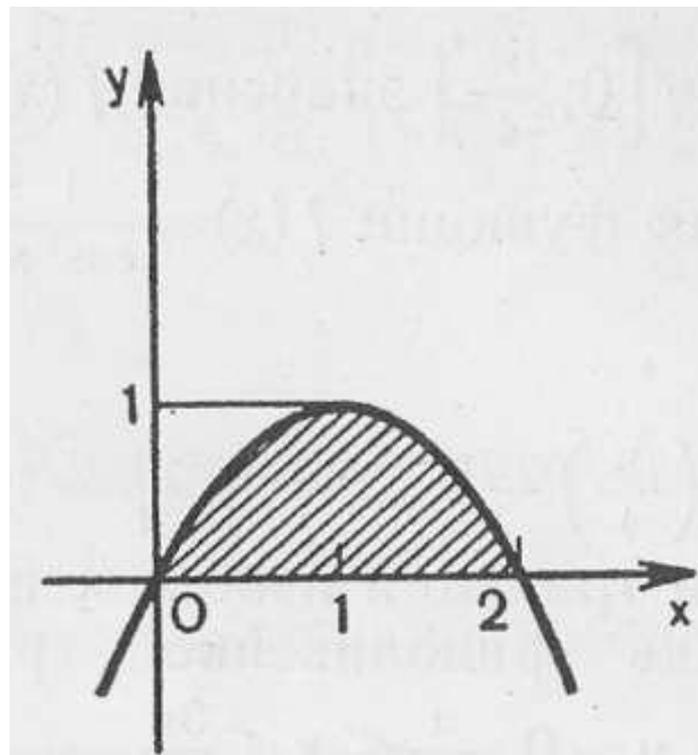
$$S = F(b) - F(a).$$



упражнения с решениями

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x - x^2 \text{ и } y = 0.$$



Решение. Для функции $y = 2x - x^2$ первообразная есть $F(x) = x^2 - 1/3 x^3$.

Найдем точки пересечения кривой $2x - x^2$ с осью абсцисс: $2x - x^2 = 0$, $x = 0$, $x = 2$, т. е. $(0; 0)$ и $(2; 0)$.

Значит, $a = 0$, $b = 2$.

Искомую площадь находим по формуле:

$$S = F(b) - F(a) =$$

$$= F(2) - F(0) = 4 - 8/3 - 0 + 0 = 4/3$$

