Первообразная

1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ
2. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

Под дифференцированием функции $f(x)$ мы понимаем нахождение ее производной $f'(x)$.

Нахождение функции $f(x)$ по заданной ее производной $f'(x)$ называют операцией **интегрирования.**

Таким образом, операция интегрирования обратна операции дифференцирования. Следовательно, операция интегрирования состоит в том, что по заданной производной $f'(x)$ находят (восстанавливают) функцию $f(x)$.

Определение: Функция *$F(x)$* называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех *x* из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.

Например, функция $F(x)=x^2$ есть первообразная для функции $f(x)=2x$ на промежутке $(-\infty,+\infty)$, так как для всех действительных x справедливо равенство $F'(x)=(x^2)'=2x$

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ можно представить в виде $F(x)+C$, где C – любое действительное число.

$f(x)$ находится неоднозначно, ведь в качестве $f(x)$ могут быть использованы и такие функции, как

$f(x) = x^4 + 3$,

$f(x) = x^4 — 6$,

и др., так как производная каждой из данных функций равна $4x^3$. Все эти функции отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

Общее решение задачи можно записать в виде $f(x) = x^4 + C$, где C — произвольное действительное число. Любую из найденных функций $f(x)$ называют первообразной для функции $f'(x) = 4x^3$.

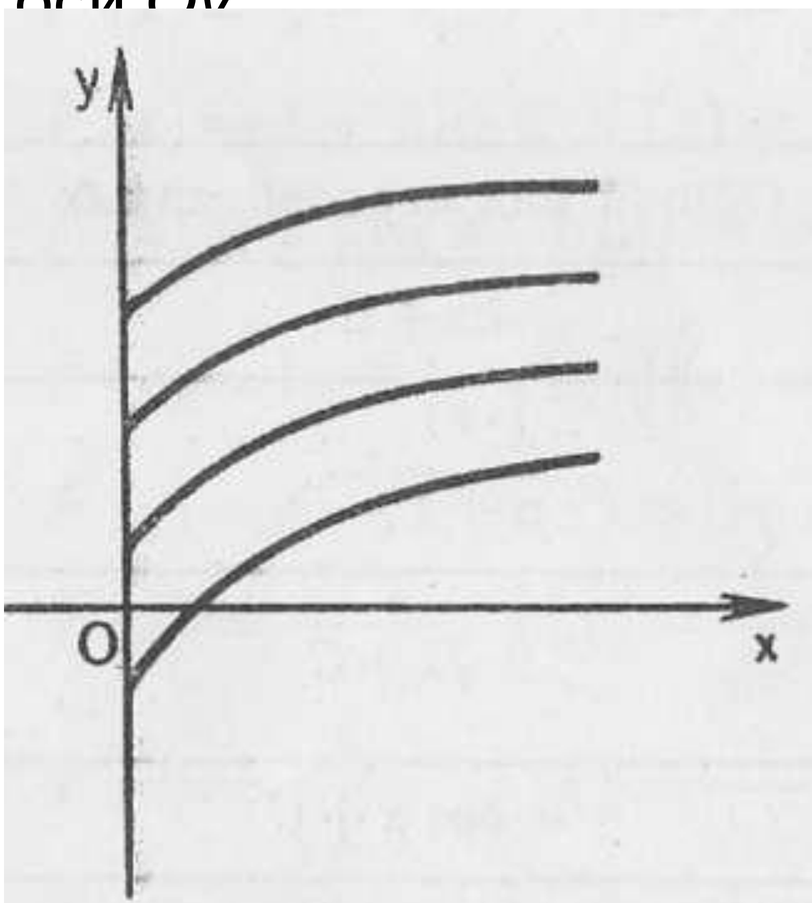
Упражнение с решением

1) Доказать, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если $F(x)=3x^4$, $f(x)=12x^3$, $(-\infty,+\infty)$.

Решение. Так как $F(x) = 3x^4$, то $F'(x)= (3x^4)'= 12x^3 = f(x)$ для всех x, что и требовалось доказать.

2) $F(x)=\sin x$ является первообразной функции $f(x)=\cos x$, так как $(\sin x)'=\cos x$

Геометрически основное свойство первообразных можно интерпретировать так: графики всех первообразных данной функции $f\,(x)$ получаются из любого из них путем параллельного переноса вдоль оси Oy



Выбором C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

Пример

Для функции $f(x) = x$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку (2; 5).

Все первообразные функции $f(x) = x$ находятся по формуле $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, так как $F'(x) = x$. Найдем число C, такое, чтобы график функции $y = \frac{x^2}{2} + C$ проходил через точку (2; 5). Подставляя $x = 2$, $y = 5$, получаем $5 = \frac{2^2}{2} + C$, откуда $C = 3$. Следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$. $\triangleleft$

упражнения с решениями

- Для функции $f(x) = \frac{1}{cos^2x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку М$(\frac{\pi}{4}; 0)$.

Для функции $f(x) = \frac{1}{cos^2x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку М$(\frac{\pi}{4}; 0)$.

Таблица первообразных для некоторых функций:

Функция	Первообразная
$x^p,\ p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\dfrac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx + b)^p,\ \ p \neq -1,\ k \neq 0$	$\dfrac{(kx + b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\dfrac{1}{kx+b},\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} \ln (kx + b) + C$
$e^{kx-b},\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} e^{kx-b} + C$
$\sin (kx + b),\ \ k \neq 0$	$-\dfrac{1}{k} \cos (kx + b) + C$
$\cos (kx + b),\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} \sin (kx + b) + C$

3. ТРИ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

1. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$,

а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$, т. е.

$$(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x).$$

Для функции $f(x) = \frac{1}{cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку М($\frac{\pi}{4}$; 0).

- Для функции $f(x) = \frac{1}{cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку М$(\frac{\pi}{4}; 0)$.

2. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k — постоянная, то $kF(x)$ есть первообразная для $kf(x)$,

т. е. $(kF(x))' = kf(x)$.

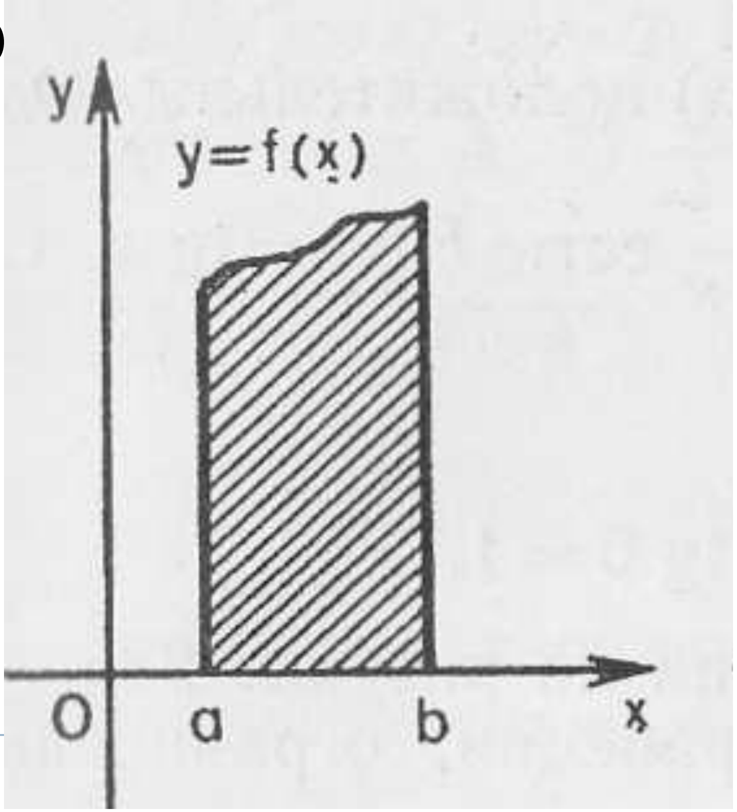
Для функции $f(x) = \dfrac{1}{cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(\dfrac{\pi}{4}; 0)$.

4. КРИВОЛИНЕЙНАЯ ТРАПЕЦИЯ И ЕЕ ПЛОЩАДЬ

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке [a; b] функции *f*, осью *Ox* и пр

b.

Отрезок [a; b] называют основанием этой криволинейной трапеции



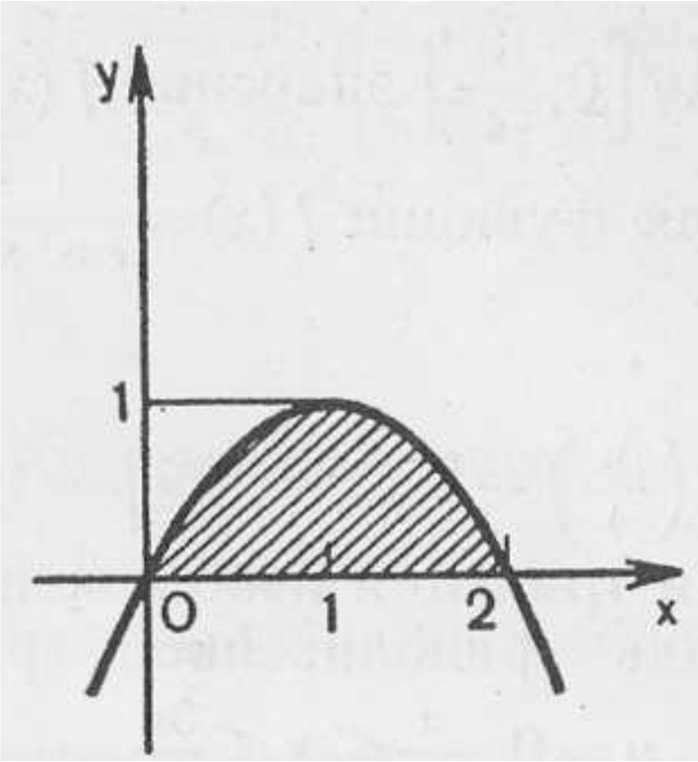
Теорема. Пусть $f(x)$ – непрерывная и неотрицательная на отрезке [a; b] функция, а $S(x)$–площадь соответствующей криволинейной трапеции . Если F есть первообразная для f па интервале, содержащем отрезок [a; b] , то

$$S = F(b) — F(a).$$

упражнения с решениями

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 2x - x^2$ и $y = 0$.



Решение. Для функции $y = 2x — x^2$ первообразная есть $F(x) = x^2 –1/3\ x^3$.

Найдем точки пересечения кривой $2x — x^2$ с осью абсцисс: $2x — x^2 = 0$, $x = 0$, $x = 2$, т. е. (0; 0) и (2; 0).

Значит, $a = 0$, $b = 2$.

Искомую площадь находим по формуле:

$S = F(b)-F(a)=$

$=F\ (2)-F(0) = 4 – 8/3 – 0 + 0=4/3$