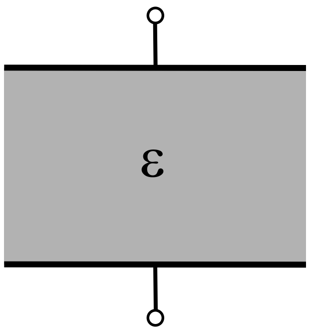
Электрическое поле в диэлектрике

Энергия поля в среде

Рассмотрим зарядку конденсатора, температура и механическое состояние (объем) диэлектрика при этом поддерживаются неизменными.

C



A' – работа источника тока при зарядке конденсатора

W – энергия электрического поля конденсатора

$$dW = dA' = Udq$$

$$U = Ed, \quad q = S\sigma = SD$$

$$dW = (EdD)Sd = (EdD)V$$

(при $D \propto E$)

$$\boxed{W = \frac{ED}{2}V}$$

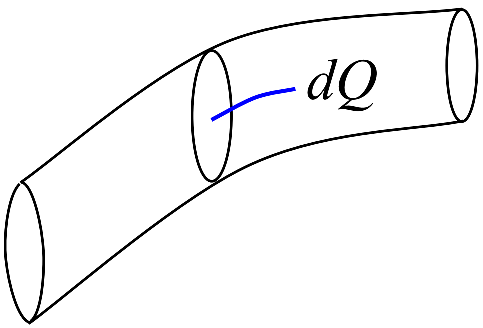
– энергия поля в среде

$$\boxed{w = \frac{ED}{2}}$$

– плотность энергии поля в среде

Сила и плотность тока

Электрический ток – упорядоченное движение электрических зарядов.

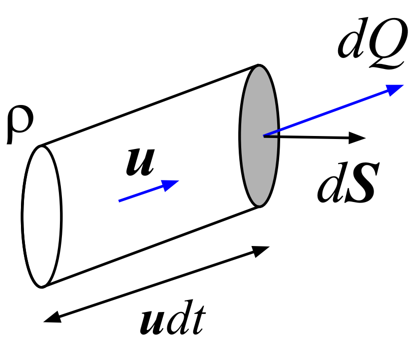


dQ – заряд, прошедший через поверхность S за dt

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$ – сила тока

$$\boxed{\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{u}}$$ – плотность тока

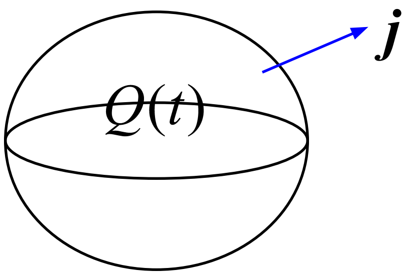
ρ – объемная плотность заряда, $\boldsymbol{u}$ – скорость его носителя



$$dQ = \rho \cdot \boldsymbol{u}dt \cdot d\boldsymbol{S} \Longrightarrow dI = \rho\boldsymbol{u}d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{j}d\boldsymbol{S} \Longrightarrow$$

$$I = \int_S \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S}$$

Уравнение непрерывности



Согласно закону сохранения заряда

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} + \oint \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S} = 0}$$

– уравнение непрерывности (интегральная форма)

По теореме Остроградского-Гаусса

$$\oint \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S} = \int \mathrm{div}\boldsymbol{j}\, dV$$

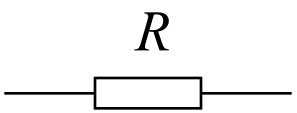
и

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = 0}$$

– уравнение непрерывности (дифференциальная форма)

Закон Ома для однородного участка цепи



Для металлических проводников и др.

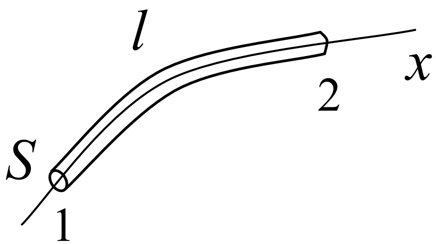
$$\boxed{\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}}$$ – закон Ома для однородного участка цепи (локальная форма)

σ – удельная проводимость,

$\rho = 1/\sigma$ – удельное сопротивление

Закон Ома для однородного участка цепи

Длинный тонкий проводник ($S = \mathrm{const}$)



$$j = \frac{I}{S} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad E(x) = E = \mathrm{const}$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = El$$

$$j = \sigma E \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho}\frac{U}{l}$$

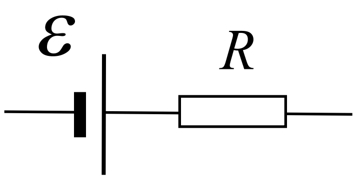
$$\boxed{U = RI}$$

– закон Ома для однородного участка цепи (интегральная форма)

Для длинного тонкого проводника $R = \rho \dfrac{l}{S}$

Закон Ома для неоднородного участка цепи

Причина существования постоянного тока –
наличие *сторонних электродвижущих сил* не электростатической природы.

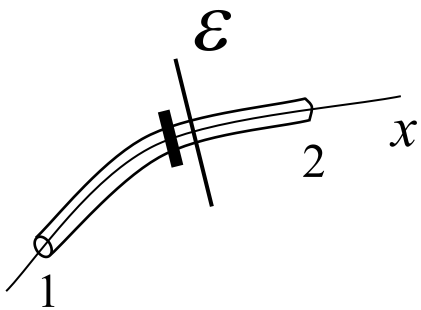


$$\boldsymbol{E}^* = \frac{\boldsymbol{F}^*}{q}$$ – напряженность поля сторонних сил

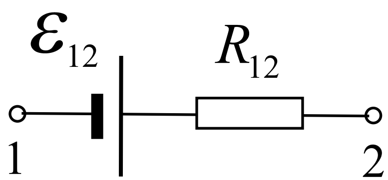
$$\boxed{\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)}$$ – закон Ома для неоднородного участка цепи (локальная форма)

Закон Ома для неоднородного участка цепи

Длинный тонкий проводник



$$\rho \boldsymbol{j} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^* \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 \rho \boldsymbol{j} d\boldsymbol{r} = \int_1^2 \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} + \int_1^2 \boldsymbol{E}^* d\boldsymbol{r}$$



$$\left.\begin{aligned} &\int_1^2 \rho \boldsymbol{j} d\boldsymbol{r} = \int_1^2 \rho \frac{I}{S} dr = I \int_1^2 \frac{\rho}{S} dr = IR_{12} \\ &\int_1^2 \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \\ &\int_1^2 \boldsymbol{E}^* d\boldsymbol{r} = \mathcal{E}_{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}$$

– закон Ома для неоднородного участка цепи (интегральная форма)

Закон Ома для неоднородного участка цепи

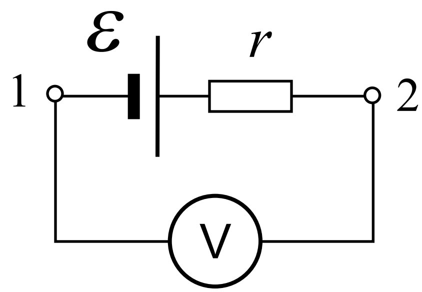
ЭДС (электродвижущая сила)

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{E}^* d\boldsymbol{r}$$

ЭДС – величина, численно равная работе по перемещению единичного положительного заряда по данному пути

Измерение ЭДС

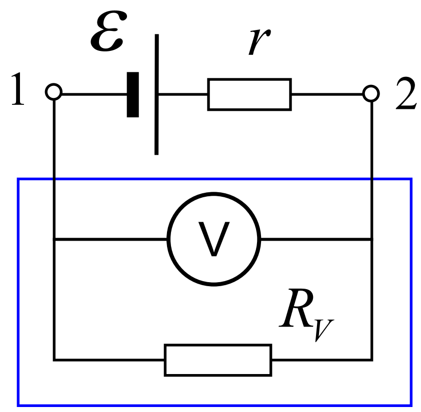
Идеальный вольтметр



$$0 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$$

$$V = \mathcal{E}$$

Реальный вольтметр

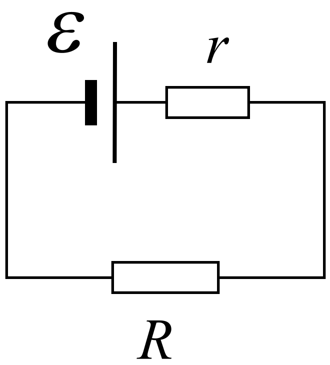


$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_V + r}$$

$$V = R_V I$$

$$V = \frac{R_V}{R_V + r}\mathcal{E}$$

Закон Ома для замкнутой цепи



$$\left.\begin{aligned} IR_{12} &= \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \\ \varphi_1 &= \varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad IR_{12} = \mathcal{E}_{12}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = I(R + r)}$$ – закон Ома для замкнутой цепи

Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

1 правило Кирхгофа

I_k

•

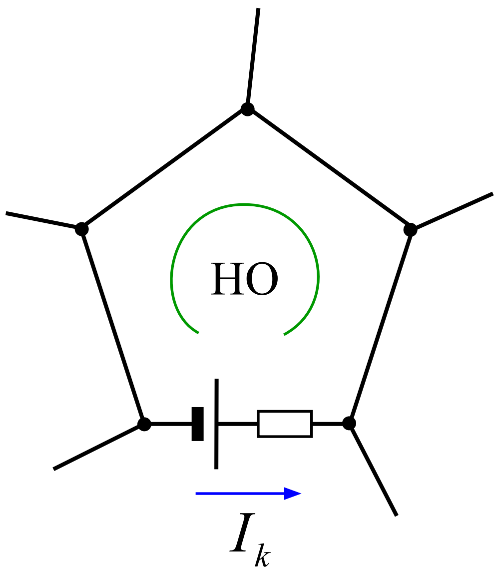
В соответствии с законом сохранения заряда в случае постоянных токов:
алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\boxed{\sum I_k = 0}$$

Правило знаков:
(+) – токи, идущие к узлу
(–) – токи, исходящие из узла
(или наоборот)

Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

2 правило Кирхгофа



НО – направление обхода

В соответствии с законом Ома для замкнутого контура: *алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре*

$$\boxed{\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_k}$$

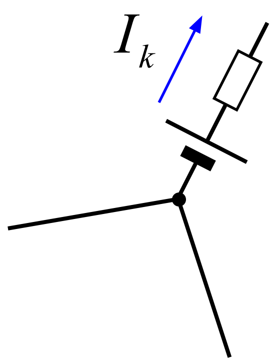
Правило знаков:

(+) – направление тока (ЭДС) совпадает с НО

(–) – направление тока (ЭДС) противоположно НО

Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

Метод узловых потенциалов



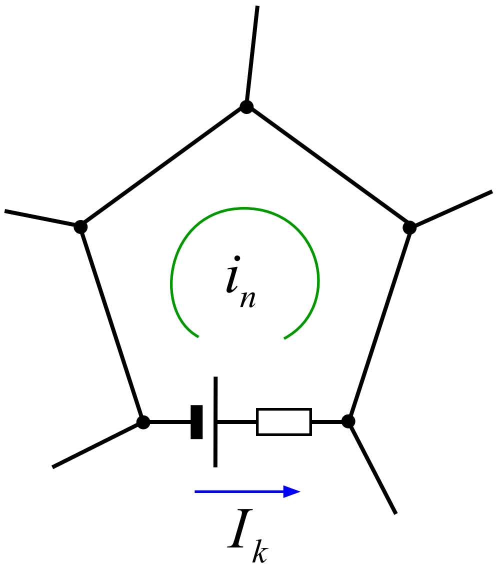
В основе метода лежат уравнения 1 правила Кирхгофа. Неизвестными являются значения узловых потенциалов ϕ_i . Значение одного узлового потенциала условно принимается равным нулю ϕ_0=0.

$$\sum \underbrace{\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R} \right)_k}_{I_k} = 0 \quad i = 0, \dots \, , N-2 \, ,$$

где N – число узлов.

Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

<u>Метод контурных токов</u>

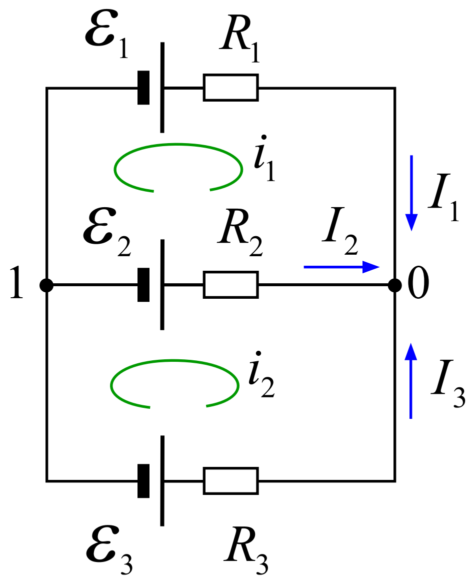


В основе метода лежат уравнения 2 правила Кирхгофа.
Неизвестными являются фиктивные контурные токи i_n.
Значение тока в ветви находится алгебраическим сложением всех проходящих через нее контурных токов.
Проще рассматривать простые контуры.

$$\sum \underbrace{\left(\sum i_n\right)_k}_{I_k} R_k = \sum \mathcal{E}_k \qquad i = 1, \dots\ , N\ ,$$

где N – число контуров.

Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа



Метод правил Кирхгофа

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_1R_1 - I_2R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ I_2R_2 - I_3R_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \end{cases}$$

Метод узловых потенциалов

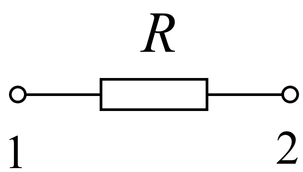
$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0 + \mathcal{E}_1}{R_1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_0 + \mathcal{E}_2}{R_2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_0 + \mathcal{E}_3}{R_3} = 0$$

Метод контурных токов

$$\begin{cases} i_1R_1 + (i_1 - i_2)R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ (i_2 - i_1)R_2 + i_2R_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \end{cases}$$

Закон Джоуля-Ленца

<u>Однородный участок цепи</u>



Работа сил электрического поля по перемещению заряда dQ

$$dA = \int_1^2 dQ\mathbf{E}d\mathbf{r} = dQ\int_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{r} = dQU$$

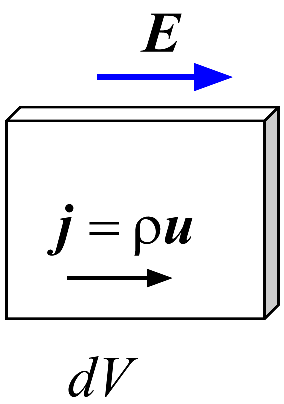
$$dQ = Idt$$

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$$ – тепловая мощность тока

$$\boxed{P = RI^2}$$ – закон Джоуля-Ленца (интегральная форма)

Закон Джоуля-Ленца

<u>Однородный участок цепи</u>



$$d\boldsymbol{F} = (\rho dV)\boldsymbol{E}$$

Мощность, развиваемая силами электрического поля:

$$dP = d\boldsymbol{F}\boldsymbol{u} = (\rho dV)\boldsymbol{E}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{j}\boldsymbol{E})dV \Longrightarrow$$

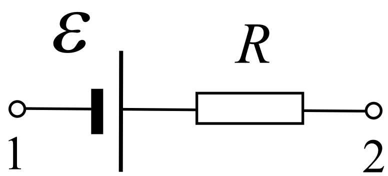
Объемная плотность мощности:

$$\boxed{dP/dV = \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}}$$

– закон Джоуля-Ленца (локальная форма)

Закон Джоуля-Ленца

Неоднородный участок цепи



Работа сторонних сил и сил электрического поля по перемещению заряда dQ

$$dA = \int_1^2 dQ(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)d\boldsymbol{r} = dQ(U + \mathcal{E})$$

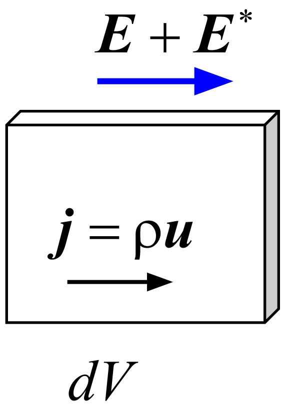
$$dQ = Idt$$

$$\boxed{P = \frac{dA}{dt} = UI + \mathcal{E}I}$$

Для замкнутой цепи: $\boxed{P = \mathcal{E}I}$

Закон Джоуля-Ленца

Неоднородный участок цепи



$$d\boldsymbol{F} = (\rho dV)(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)$$

Мощность, развиваемая силами электрического поля:

$$dP = d\boldsymbol{F}\boldsymbol{u} = (\rho dV)(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)dV \quad \Longrightarrow$$

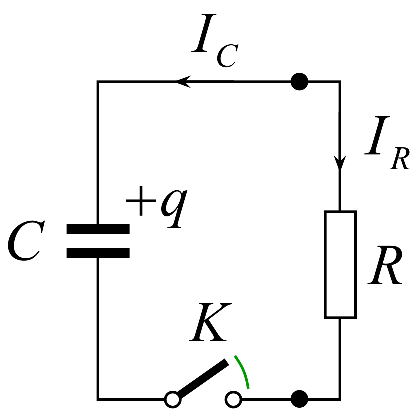
Объемная плотность мощности:

$$\boxed{dP/dV = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)}$$

– закон Джоуля-Ленца (локальная форма)

Переходные процессы в цепи с конденсатором

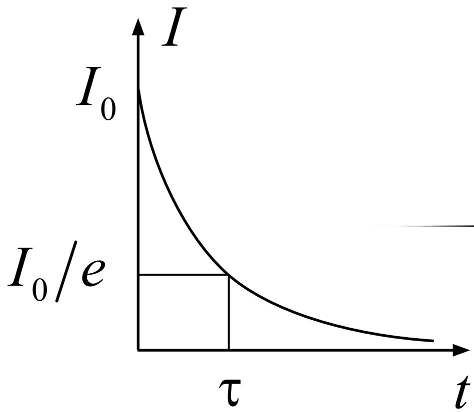
Разрядка конденсатора



$$U_R = RI, \quad U_C = q/C, \quad U_R = U_C$$

$$I_R = -I_C = -\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$$



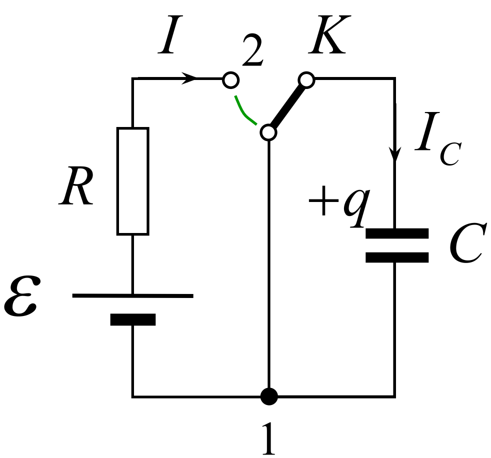
$$\begin{cases} q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

$\tau = RC$ – время релаксации

$$I_0 = \frac{q_0}{RC}$$

Переходные процессы в цепи с конденсатором

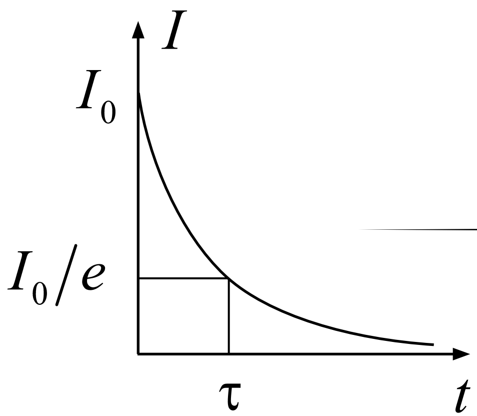
Зарядка конденсатора



$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}\ , \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}$$

$$I = I_C = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}C - q}{RC}$$

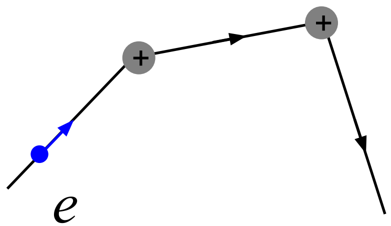


$$\begin{cases} q = q_m\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

$\tau = RC$ – время релаксации

$q_m = \mathcal{E}C, \ I_0 = \mathcal{E}/R$

Классическая электронная теория металлов



l – длина свободного пробега

τ – время свободного пробега

v – средняя тепловая скорость электронов

$$\tau = \frac{l}{v}$$

Основные положения теории:

1. Электроны проводимости взаимодействуют только с ионами решетки посредством столкновений.
2. Движение электронов подчиняется законам Ньютона.
3. При неупругом соударении с ионом электрон передает всю избыточную кинетическую энергию решетке.

Классическая электронная теория металлов

<u>Закон Ома</u>

Среднее смещение электронов за время τ равно

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{eE}{2m_e}\tau^2$$

Отсюда скорость дрейфа электронов

$$u = \frac{s}{\tau} = \frac{eEl}{2m_e v}$$

Если n – концентрация электронов проводимости

$$j = neu = \frac{e^2 nl}{2m_e v}E \quad \Rightarrow$$

$$j = \sigma E\,, \qquad \sigma = \frac{e^2 nl}{2m_e v}$$

Классическая электронная теория металлов

Закон Джоуля-Ленца

При столкновении электрон теряет в среднем энергию

$$\varepsilon = \frac{m_e u^2}{2}\ , \quad \text{где} \quad u = a\tau = \frac{eEl}{m_e v}$$

С учетом частоты столкновений электрона $\nu = \dfrac{v}{l}$ $\Rightarrow$

$$\frac{dP}{dV} = n\nu\varepsilon = \frac{e^2 nl}{2m_e v}E^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dP}{dV} = \sigma E^2\ , \quad \sigma = \frac{e^2 nl}{2m_e v}}$$

Закон Видемана-Франца

Высокая электро- и теплопроводность металлов обусловлена электронами проводимости. Роль ионов решетки незначительна.

$$\boxed{\kappa/\sigma = aT}$$

- закон Видемана-Франца

κ – коэффициент теплопроводности,
σ – удельная электропроводность,
a – постоянная.

Молекулярно-кинетическая теория: $\kappa = \frac{1}{3} n v c_V l$, где

c_V – изохорная теплоемкость, приходящаяся на один электрон проводимости

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{2}{3}\frac{mv^2 c_V}{e^2}$$

$$c_V = \frac{3}{2} k$$

$$mv^2 \sim 3kT$$

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T$$