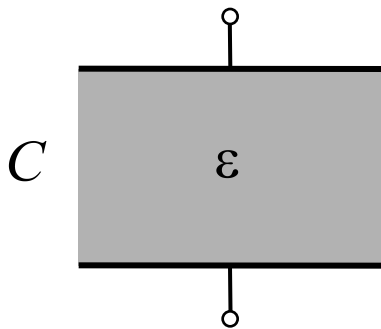


## Энергия поля в среде

Рассмотрим зарядку конденсатора, температура и механическое состояние (объем) диэлектрика при этом поддерживаются неизменными.



$A'$  – работа источника тока при зарядке конденсатора

$W$  – энергия электрического поля конденсатора

$$dW = dA' = Udq$$

$$U = Ed, \quad q = S\sigma = SD$$

$$dW = (EdD)Sd = (EdD)V \quad \longrightarrow \quad (\text{при } D \propto E)$$

$$W = \frac{ED}{2}V$$

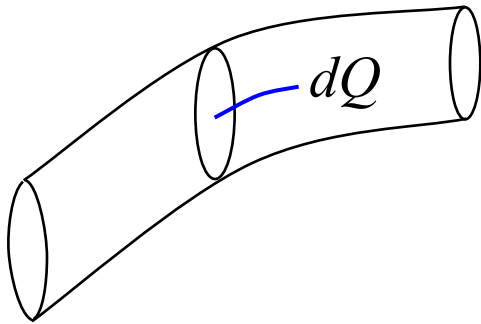
– энергия поля  
в среде

$$w = \frac{ED}{2}$$

– плотность энергии  
поля в среде

## Сила и плотность тока

*Электрический ток* – упорядоченное движение электрических зарядов.

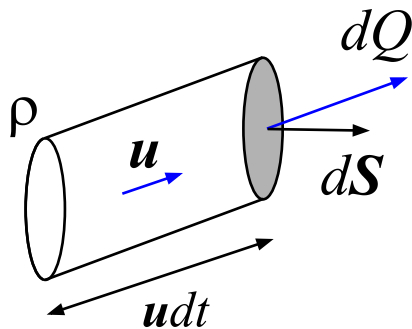


$dQ$  – заряд, прошедший через поверхность  $S$  за  $dt$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{– сила тока}$$

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u} \quad \text{– плотность тока}$$

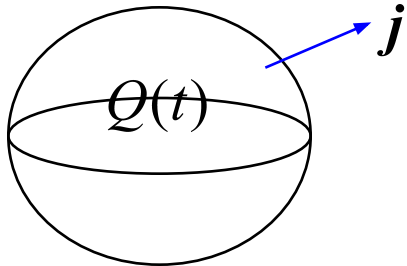
$\rho$  – объемная плотность заряда,  $\mathbf{u}$  – скорость его носителя



$$dQ = \rho \cdot \mathbf{u} dt \cdot dS \quad \Rightarrow \quad dI = \rho \mathbf{u} dS = \mathbf{j} dS \quad \Rightarrow$$

$$I = \int_S \mathbf{j} dS$$

## Уравнение непрерывности



Согласно закону сохранения заряда  $\longrightarrow$

$$\frac{dQ}{dt} + \oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0$$

– уравнение непрерывности  
(интегральная форма)

По теореме Остроградского-Гаусса

$$\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{j} dV$$

и

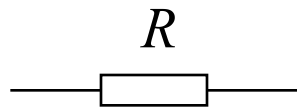
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

– уравнение непрерывности  
(дифференциальная форма)

## Закон Ома для однородного участка цепи



Для металлических проводников и др.

$$\mathbf{j = \sigma E}$$

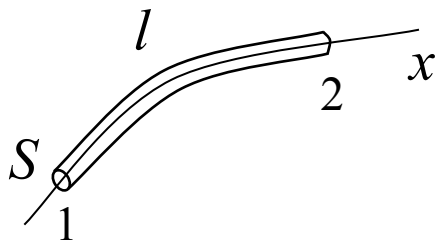
– закон Ома для однородного участка цепи  
(локальная форма)

$\sigma$  – удельная проводимость,

$\rho = 1/\sigma$  – удельное сопротивление

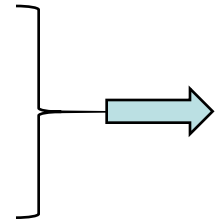
## Закон Ома для однородного участка цепи

Длинный тонкий проводник ( $S = \text{const}$ )



$$j = \frac{I}{S} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad E(x) = E = \text{const}$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = El$$



$$j = \sigma E \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$$

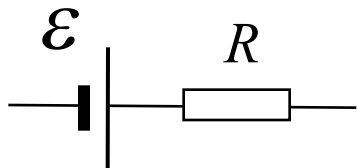
$$U = RI$$

– закон Ома для однородного участка цепи  
(интегральная форма)

Для длинного тонкого проводника  $R = \rho \frac{l}{S}$

## Закон Ома для неоднородного участка цепи

Причина существования постоянного тока – наличие *сторонних электродвижущих сил* не электростатической природы.



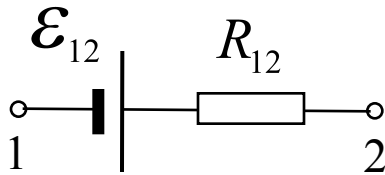
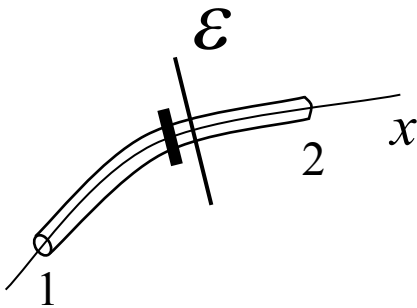
$$E^* = \frac{F^*}{q} \quad \text{– напряженность поля сторонних сил}$$

$$j = \sigma(E + E^*)$$

– закон Ома для  
неоднородного участка цепи  
(локальная форма)

## Закон Ома для неоднородного участка цепи

Длинный тонкий проводник

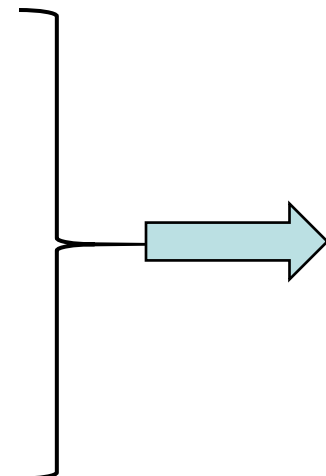


$$\rho \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 \rho \mathbf{j} dr = \int_1^2 \mathbf{E} dr + \int_1^2 \mathbf{E}^* dr$$

$$\int_1^2 \rho \mathbf{j} dr = \int_1^2 \rho \frac{I}{S} dr = I \int_1^2 \frac{\rho}{S} dr = IR_{12}$$

$$\int_1^2 \mathbf{E} dr = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\int_1^2 \mathbf{E}^* dr = \mathcal{E}_{12}$$



$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

– закон Ома для неоднородного участка цепи (интегральная форма)

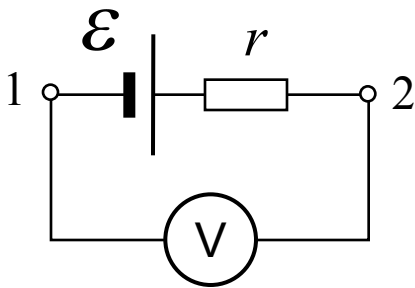
## Закон Ома для неоднородного участка цепи

ЭДС (электродвижущая сила)

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ЭДС} - \text{величина, численно равная работе по перемещению единичного положительного заряда по данному пути}$$

Измерение ЭДС

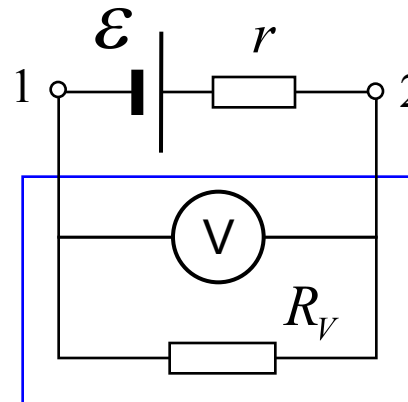
Идеальный вольтметр



$$0 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$$

$$V = \mathcal{E}$$

Реальный вольтметр



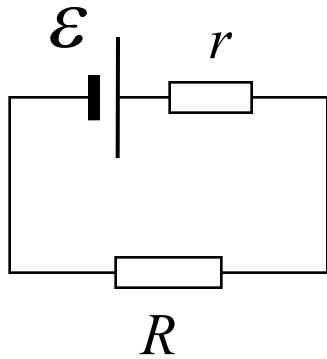
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_V + r}$$

$$V = R_V I$$

$$V = \frac{R_V}{R_V + r} \mathcal{E}$$



## Закон Ома для замкнутой цепи



$$\left. \begin{aligned} IR_{12} &= \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \\ \varphi_1 &= \varphi_2 \end{aligned} \right\} \longrightarrow IR_{12} = \mathcal{E}_{12}$$

$$\mathcal{E} = I(R + r)$$

– закон Ома для замкнутой цепи

## Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

### 1 правило Кирхгофа

В соответствии с законом сохранения заряда  
в случае постоянных токов:

*алгебраическая сумма токов, сходящихся в  
узле, равна нулю*

$I_k$

•

$$\sum I_k = 0$$

Правило знаков:

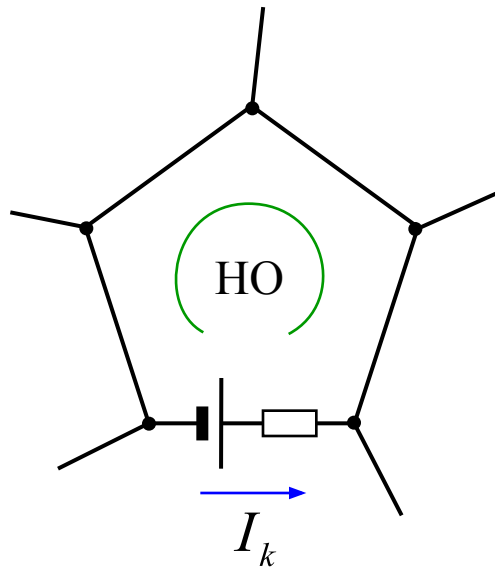
(+) – токи, идущие к узлу

(-) – токи, исходящие из узла

(или наоборот)

## Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

### 2 правило Кирхгофа



НО – направление обхода

В соответствии с законом Ома для замкнутого контура:  
*алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре*

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k$$

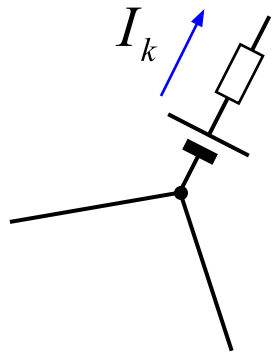
Правило знаков:

(+) – направление тока (ЭДС) совпадает с НО

(-) – направление тока (ЭДС) противоположно НО

## Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

### Метод узловых потенциалов



В основе метода лежат уравнения 1 правила Кирхгофа.

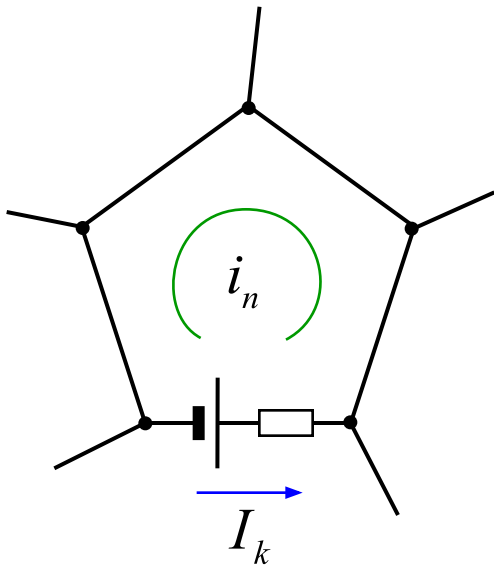
Неизвестными являются значения узловых потенциалов  $\phi_i$ .  
Значение одного узлового потенциала условно принимается равным нулю  $\phi_0=0$ .

$$\underbrace{\sum \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R} \right)}_{I_k} = 0 \quad i = 0, \dots, N - 2,$$

где  $N$  – число узлов.

## Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

### Метод контурных токов

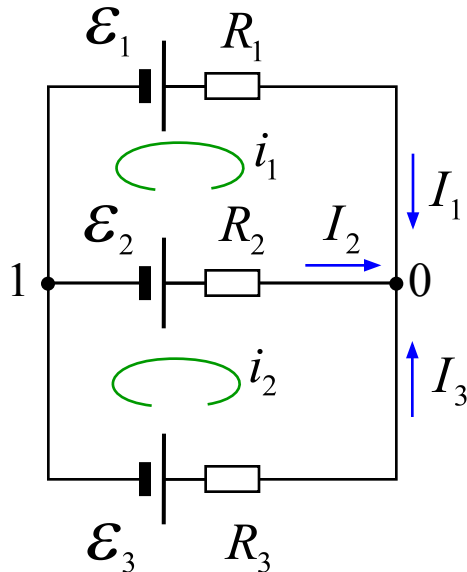


В основе метода лежат уравнения 2 правила Кирхгофа. Неизвестными являются фиктивные контурные токи  $i_n$ . Значение тока в ветви находится алгебраическим сложением всех проходящих через нее контурных токов. Проще рассматривать простые контуры.

$$\sum \underbrace{\left( \sum i_n \right)_k}_{I_k} R_k = \sum \mathcal{E}_k \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $N$  – число контуров.

## Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа



### Метод правил Кирхгофа

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \end{cases}$$

### Метод узловых потенциалов

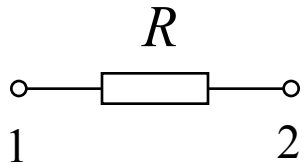
$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0 + \mathcal{E}_1}{R_1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_0 + \mathcal{E}_2}{R_2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_0 + \mathcal{E}_3}{R_3} = 0$$

### Метод контурных токов

$$\begin{cases} i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ (i_2 - i_1) R_2 + i_2 R_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \end{cases}$$

## Закон Джоуля-Ленца

### Однородный участок цепи



Работа сил электрического поля по перемещению заряда  $dQ$

$$dA = \int_1^2 dQ E dr = dQ \int_1^2 E dr = dQU$$

$$dQ = Idt$$

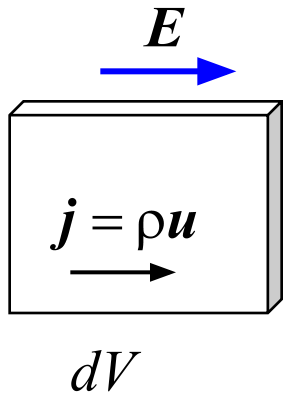
$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad \text{– тепловая мощность тока}$$

$$P = RI^2$$

– закон Джоуля-Ленца  
(интегральная форма)

## Закон Джоуля-Ленца

Однородный участок цепи



$$dF = (\rho dV) E$$

Мощность, развиваемая силами электрического поля:

$$dP = dF u = (\rho dV) E u = (j E) dV \quad \Rightarrow$$

Объемная плотность мощности:

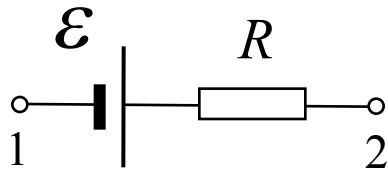
$$dP/dV = j E$$

– закон Джоуля-Ленца  
(локальная форма)



## Закон Джоуля-Ленца

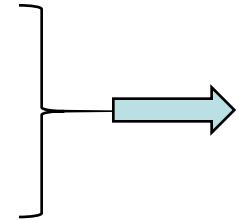
### Неоднородный участок цепи



Работа сторонних сил и сил электрического поля по перемещению заряда  $dQ$

$$dA = \int_1^2 dQ(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)dr = dQ(U + \mathcal{E})$$

$$dQ = Idt$$



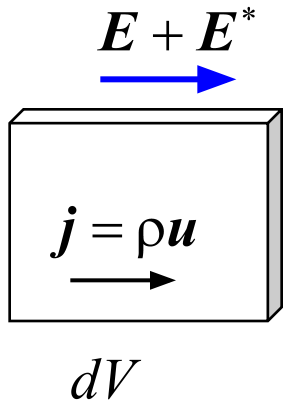
$$P = \frac{dA}{dt} = UI + \mathcal{E}I$$

Для замкнутой цепи:

$$P = \mathcal{E}I$$

## Закон Джоуля-Ленца

Неоднородный участок цепи



$$dF = (\rho dV)(E + E^*)$$

Мощность, развиваемая силами электрического поля:

$$dP = dF u = (\rho dV)(E + E^*) u = \mathbf{j}(E + E^*) dV \quad \Rightarrow$$

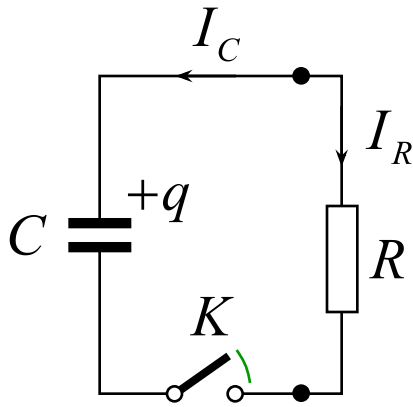
Объемная плотность мощности:

$$dP/dV = \mathbf{j}(E + E^*)$$

– закон Джоуля-Ленца  
(локальная форма)

## Переходные процессы в цепи с конденсатором

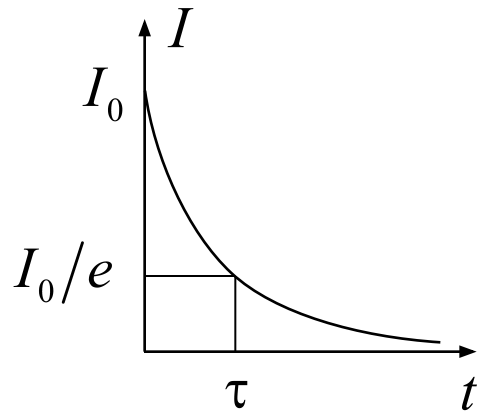
### Разрядка конденсатора



$$U_R = RI, \quad U_C = q/C, \quad U_R = U_C$$

$$I_R = -I_C = -\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$$



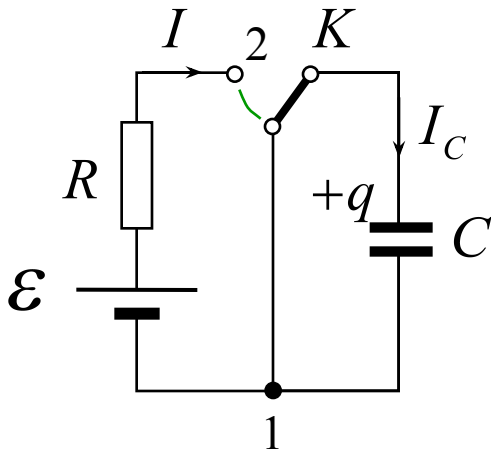
$$\begin{cases} q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

$\tau = RC$  – время релаксации

$$I_0 = \frac{q_0}{RC}$$

## Переходные процессы в цепи с конденсатором

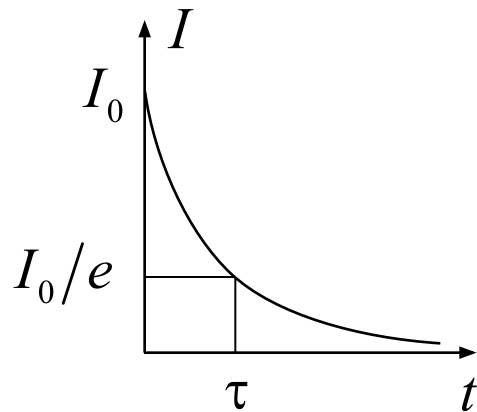
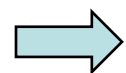
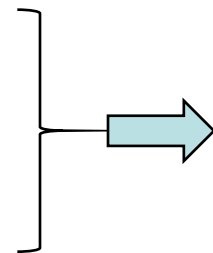
### Зарядка конденсатора



$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}$$

$$I = I_C = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}C - q}{RC}$$

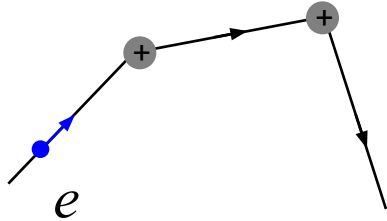


$$\begin{cases} q = q_m (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

$\tau = RC$  – время релаксации

$$q_m = \mathcal{E}C, \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

## Классическая электронная теория металлов



$l$  – длина свободного пробега

$\tau$  – время свободного пробега

$v$  – средняя тепловая скорость электронов

$$\tau = \frac{l}{v}$$

### Основные положения теории:

1. Электроны проводимости взаимодействуют только с ионами решетки посредством столкновений.
2. Движение электронов подчиняется законам Ньютона.
3. При неупругом соударении с ионом электрон передает всю избыточную кинетическую энергию решетке.

## Классическая электронная теория металлов

### Закон Ома

Среднее смещение электронов за время  $\tau$  равно

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{eE}{2m_e} \tau^2$$

Отсюда скорость дрейфа электронов

$$u = \frac{s}{\tau} = \frac{eEl}{2m_e \nu}$$

Если  $n$  – концентрация электронов проводимости

$$j = neu = \frac{e^2 nl}{2m_e \nu} E \quad \longrightarrow$$

$$j = \sigma E, \quad \sigma = \frac{e^2 nl}{2m_e \nu}$$

## Классическая электронная теория металлов

### Закон Джоуля-Ленца

При столкновении электрон теряет в среднем энергию

$$\varepsilon = \frac{m_e u^2}{2}, \quad \text{где} \quad u = a\tau = \frac{eEl}{m_e v}$$

С учетом частоты столкновений электрона  $\nu = \frac{v}{l}$  

$$\frac{dP}{dV} = n\nu\varepsilon = \frac{e^2 nl}{2m_e v} E^2 \quad \img alt="arrow" data-bbox="452 632 538 666"/>$$

$$\frac{dP}{dV} = \sigma E^2, \quad \sigma = \frac{e^2 nl}{2m_e v}$$

## Закон Видемана-Франца

Высокая электро- и теплопроводность металлов обусловлена электронами проводимости. Роль ионов решетки незначительна.

$$\kappa/\sigma = aT$$

- закон Видемана-Франца

$\kappa$  – коэффициент теплопроводности,  
 $\sigma$  – удельная электропроводность,  
 $a$  – постоянная.

Молекулярно-кинетическая теория:  $\kappa = \frac{1}{3} n v c_V l$ , где

$c_V$  – изохорная теплоемкость, приходящаяся на один электрон проводимости

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{2 m v^2 c_V}{3 e^2}$$
$$c_V = \frac{3}{2} k$$
$$m v^2 \sim 3 k T$$
$$\frac{\kappa}{\sigma} = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2 T$$