Лекция №3

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА.

Летучка

(ПИШЕМ ТОЛЬКО ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ!)

1) Матрица – это…
2) Определитель матрицы – это…
3) Определитель второго порядка $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \ldots$
4) Для вычисления Δ_3 есть два правила: …
5) Формулы Крамера для системы из двух уравнений с двумя неизвестными $x = \cdots$, $y = \cdots$

Летучка(ответы)

1) Матрица – это прямоугольная таблица чисел.

2) Определитель матрицы –это число, которое соответствует каждой квадратной матрице.

3) Определитель второго порядка $\Delta_2 =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21};$$

4) Для вычисления Δ_3 есть два правила: правило треугольника и правило Саррюса.

5) Формулы Крамера для системы из двух уравнений с двумя неизвестными $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta};$

Минор

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} матрицы A называется определитель, полученный из $|A|$ вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij} (строки с номером i и столбца с номером j).

ВОПРОС: Какой порядок имеет минор к элементу?

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$;

$a_{11} =$ $M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8$; $a_{12} =$ $M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$;

$a_{21} =$ $M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 7$; $a_{22} =$ $M_{22} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -3$;

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} называется минор со знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Если сумма индексов элемента (номера строки и номера столбца) $i + j$ число **четное**,

то алгебраическое дополнение **равно минору**.

Если сумма индексов элемента (номера строки и номера столбца) $i + j$ число ***нечетное***,

то алгебраическое дополнение ***равно минору с противоположным знаком***.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$;

$a_{11} = -3; M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8$;

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 8$;

$a_{12} = 7; M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -2$;

$a_{21} = 2; M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 7$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -7$;

$a_{22} = 8; M_{22} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -3$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -3$;

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$

$a_{11} =$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \qquad = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = \mathbf{-6};$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} =$$

Разложение определителя

Определитель $|A_{n\times n}|$ равен сумме произведений элементов строки с номером i

на алгебраические дополнения к элементам этой строки:

$$|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + a_{i3}\cdot A_{i3} + \cdots + a_{in}\cdot A_{in}\ ;$$

Эта формула называется разложением определителя по i -ой строке.

С помощью знака суммы $\sum$ формула записывается так:

$$a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + a_{i3}\cdot A_{i3} + \cdots + a_{in}\cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}$$

Удобно раскладывать определитель по строке, содержащей много нулей. (почему?)

Таким же способом можно разложить определитель и по элементам любого столбца (с номером j):

$$|A| = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + a_{3j}\cdot A_{3j} + \cdots + a_{nj}\cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}$$

Пример разложения определителя по строке:

$$|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + a_{i3}\cdot A_{i3} + \dots + a_{in}\cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}\ ;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = a_{31}\cdot A_{31} + a_{32}\cdot A_{32} + a_{33}\cdot A_{33} = 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{32} + (-8)\cdot A_{33} =$$

$i = 3$

$$= 0 + 0 + (-8)\cdot(-1)^{3+3}M_{33} = -8\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -8\cdot(2\cdot 0 - 1\cdot 5) = -8\cdot(-5) = 40;$$

Пример разложения определителя по столбцу:

$$|A| = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + a_{3j}\cdot A_{3j} + \dots + a_{nj}\cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}\ ;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32} = 1\cdot A_{12} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{32} =$$

$j = 2$

$$= (-1)^{1+2}M_{12} + 0 + 0 = (-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -(5\cdot(-8) - 4\cdot 0) =$$

$$= -(-40) = 40\ ;$$

Обратная матрица

Матрица B называется ОБРАТНОЙ к матрице A, если при умножении матрицы A на B

слева и справа получается единичная матрица:

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

Обратная матрица обозначается: A^{-1} ; по определению верно:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Только у квадратной матрицы существует обратная. (почему?)

Необходимым и достаточным условием существования для матрицы A обратной матрицы A^{-1} является:

$$|A| \neq 0$$

Если $|A| \neq 0$, то матрица А называется невырожденной.

Если $|A| = 0$, то матрица А называется вырожденной.

Построение обратной матрицы

1) Проверить невырожденность матрицы A, вычислив $|A|$.

2) Для каждого элемента a_{ij} матрицы A найти алгебраическое дополнение A_{ij}.

3) Построить новую матрицу $\overline{A}$, состоящую из алгебраических дополнений:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix};$$

4) Транспонировать $\overline{A}$; полученную матрицу назовем присоединенной и обозначим A^*

$$A^* = (\overline{A})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$

5) Каждый элемент присоединенной матрицы A^* разделить на $|A|$; полученная матрица является A^{-1} (обратной для А).

(Как в этом убедиться?)

Пример построения обратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 5 \cdot 2 =$

$$= 12 + 8 + 5 - 8 - 2 - 30 = -15 \neq 0$$

Матрица А невырожденная $\Rightarrow$ обратная матрица A^{-1} существует !

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 10) = -6;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 - 4) = 3;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 - 8) = -3;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 - 5) = 3;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 - 2) = 1;$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (15 - 4) = -11;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 4) = 0;$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6 - 1) = -5;$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (12 - 2) = 10;$

3) $\overline{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -11 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix};$

4) $\overline{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -11 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$; $A^* = \left(\overline{A}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ -3 & -11 & 10 \end{pmatrix}$;

5) $|A| = -15$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{-6}/_{(-15)} & {}^{3}/_{(-15)} & {}^{0}/_{(-15)} \\ {}^{3}/_{(-15)} & {}^{1}/_{(-15)} & {}^{-5}/_{(-15)} \\ {}^{-3}/_{(-15)} & {}^{-11}/_{(-15)} & {}^{10}/_{(-15)} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} {}^{6}/_{15} & {}^{-3}/_{15} & 0 \\ {}^{-3}/_{15} & {}^{-1}/_{15} & {}^{5}/_{15} \\ {}^{3}/_{15} & {}^{11}/_{15} & {}^{-10}/_{15} \end{pmatrix};$$

Дома сделать проверку.

Решение систем уравнений с помощью обратной матрицы

Запишем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

с помощью матриц:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ - матрица системы ;

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ - столбец неизвестных ;

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$- столбец правых частей.

Тогда система уравнений в матричной форме будет выглядеть:

$$A \cdot X = B$$

$$A \cdot X = B$$

Если матрица системы A невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}.

Умножим слева обе части матричного уравнения на матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

По определению обратной матрицы

$$A^{-1} \cdot A = E ,$$

поэтому

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B ;$$

так как при умножении на единичную матрица не изменяется, то

$$E \cdot X = X ,$$

и уравнение принимает вид:

$$X = A^{-1} \cdot B ;$$

Это значит, что вычислив для матрицы системы A обратную A^{-1} и умножив её

слева на столбец B правых частей, получим ответ в виде матрицы-столбца X.

Пример решения системы с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + z = -1 \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

столбец неизвестных $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

столбец правых частей $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

Обратная матрица A^{-1} найдена раньше: $A^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{6}/_{15} & {}^{-3}/_{15} & 0 \\ {}^{-3}/_{15} & {}^{-1}/_{15} & {}^{5}/_{15} \\ {}^{3}/_{15} & {}^{11}/_{15} & {}^{-10}/_{15} \end{pmatrix}$;

Вычислим X по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$;

$$X = \begin{pmatrix} 6/15 & -3/15 & 0 \\ -3/15 & -1/15 & 5/15 \\ 3/15 & 11/15 & -10/15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (6/15)\cdot 3 + (-3/15)\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ (-3/15)\cdot 3 + (-1/15)\cdot 1 + (5/15)\cdot(-1) \\ (3/15)\cdot 3 + (11/15)\cdot 1 + (-10/15)\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18/15 - 3/15 + 0 \\ -9/15 - 1/15 - 5/15 \\ 9/15 + 11/15 + 10/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/15 \\ -15/15 \\ 30/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$; ОТВЕТ

Выполнить дома проверку решения системы.