

Лекция №3

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА.

Летучка

(ПИШЕМ **ТОЛЬКО ОТВЕТЫ** НА ВОПРОСЫ!)

1) Матрица –
это...

2) Определитель матрицы –
это...

3) Определитель второго порядка $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \dots$

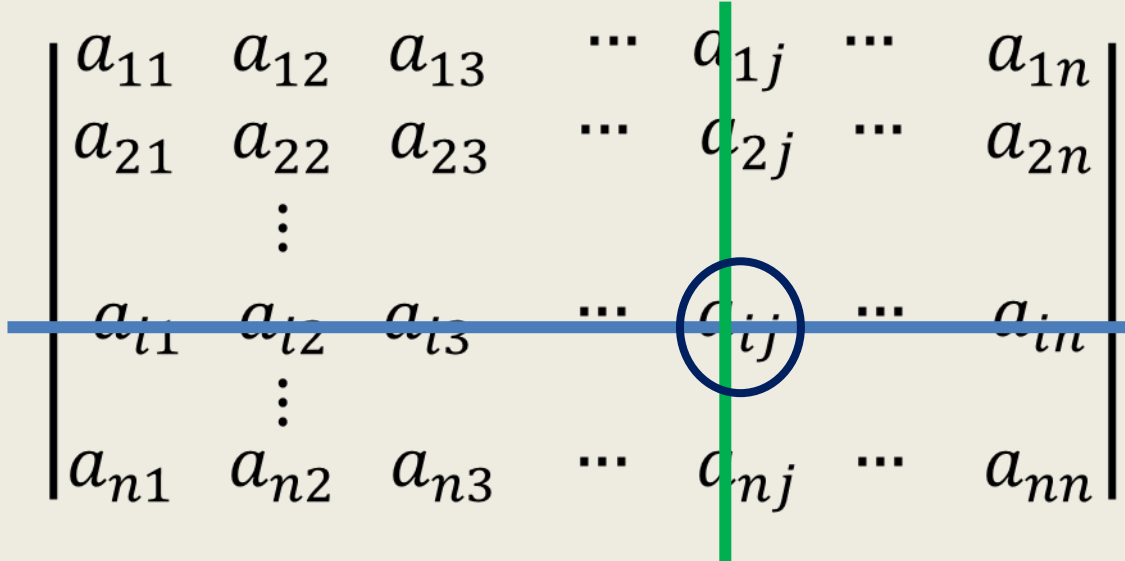
4) Для вычисления Δ_3 есть два правила: ...

5) Формулы Крамера для системы из двух уравнений
с двумя неизвестными $x = \dots, y = \dots$

Летучка(ОТВЕТЫ)

- 1) Матрица – это прямоугольная таблица чисел.
- 2) Определитель матрицы – это число, которое соответствует каждой квадратной матрице.
- 3) Определитель второго порядка $\Delta_2 =$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21};$$
- 4) Для вычисления Δ_3 есть два правила:
правило треугольника и правило Саррюса.
- 5) Формулы Крамера для системы из двух уравнений с двумя неизвестными $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$;

Минор

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$


Минором M_{ij} к элементу a_{ij} матрицы A называется **определитель**,
полученный из $|A|$ **вычёркиванием** строки и столбца,
на пересечении которых расположен элемент a_{ij}
(строки с номером i и столбца с номером j).

ВОПРОС: Какой порядок имеет минор к элементу?

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix};$

$a_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{-3} & \cancel{7} \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8;$

$a_{12} = M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & \cancel{7} \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2;$

$a_{21} = M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ \cancel{2} & \cancel{8} \end{vmatrix} = 7;$

$a_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & \cancel{8} \end{vmatrix} = -3;$

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} называется минор со знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Если сумма индексов элемента (номера строки и номера столбца) $i + j$ число **четное**,
то алгебраическое дополнение **равно минору**.

Если сумма индексов элемента (номера строки и номера столбца) $i + j$ число **нечетное**,
то алгебраическое дополнение **равно минору с противоположным знаком**.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix};$

$$a_{11} = -3; M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{7} \\ \cancel{2} & 8 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 8;$$

$$a_{12} = 7; M_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{7} \\ 2 & \cancel{8} \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -2;$$

$$a_{21} = 2; M_{21} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & 7 \\ 2 & \cancel{8} \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -7;$$

$$a_{22} = 8; M_{22} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ \cancel{2} & \cancel{8} \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -3;$$

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$

$$a_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -6;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} =$$

Разложение определителя

Определитель $|A_{n \times n}|$ равен сумме произведений элементов строки с номером i на алгебраические дополнения к элементам этой строки:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} ;$$

Эта формула называется разложением определителя по i -ой строке.

С помощью знака суммы \sum формула записывается так:

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Удобно раскладывать определитель по строке, содержащей много нулей. (почему?)

Таким же способом можно разложить определитель и по элементам любого столбца (с номером j):

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Пример разложения определителя по строке:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} ;$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{array} \right| \\ i = 3 \end{array} = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} = 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + (-8) \cdot A_{33} =$$

$$= 0 + 0 + (-8) \cdot (-1)^{3+3} M_{33} = -8 \cdot (-1)^6 \cdot \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= -8 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 5) = -8 \cdot (-5) = 40;$$

Пример разложения определителя по столбцу:

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} ;$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{array} \right| \\ j = 2 \end{array} = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} = 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} =$$

$$= (-1)^{1+2} M_{12} + 0 + 0 = (-1)^3 \cdot \left| \begin{array}{cc} 5 & 4 \\ 0 & -8 \end{array} \right| = -(5 \cdot (-8) - 4 \cdot 0) =$$

$$= -(-40) = 40 ;$$

Обратная матрица

Матрица B называется **ОБРАТНОЙ** к матрице A , если при умножении матрицы A на B слева и справа получается единичная матрица:

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

Обратная матрица обозначается: A^{-1} ; по определению верно:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Только у квадратной матрицы существует обратная. (почему?)

Необходимым и достаточным условием существования для матрицы A обратной матрицы A^{-1} является:

$$|A| \neq 0$$

Если $|A| \neq 0$, то матрица A называется невырожденной.

Если $|A| = 0$, то матрица A называется вырожденной.

Построение обратной

матрицы

- 1) Проверить невырожденность матрицы A , вычислив $|A|$.
- 2) Для каждого элемента a_{ij} матрицы A найти алгебраическое дополнение A_{ij} .
- 3) Построить новую матрицу \bar{A} , состоящую из алгебраических дополнений:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix};$$

- 4) Транспонировать \bar{A} ; полученную матрицу назовем **присоединенной** и обозначим A^*

$$A^* = (\bar{A})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$

- 5) Каждый элемент присоединенной матрицы A^* разделить на $|A|$; полученная матрица является A^{-1} (обратной для A).

(Как в этом
убедиться?)

Пример построения обратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1) |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 5 \cdot 2 = \\ &= 12 + 8 + 5 - 8 - 2 - 30 = -15 \neq 0 \end{aligned}$$

Матрица A невырожденная \Rightarrow обратная матрица A^{-1} существует!

$$2) A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 10) = -6;$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 - 4) = 3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 - 8) = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 - 5) = 3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 - 2) = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (15 - 4) = -11;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 4) = 0;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6 - 1) = -5;$$

$$3) \bar{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -11 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix};$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (12 - 2) = 10;$$

$$4) \bar{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -11 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}; \quad A^* = (\bar{A})^T = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ -3 & -11 & 10 \end{pmatrix};$$

$$5) |A| = -15; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -6/(-15) & 3/(-15) & 0/(-15) \\ 3/(-15) & 1/(-15) & -5/(-15) \\ -3/(-15) & -11/(-15) & 10/(-15) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6/15 & -3/15 & 0 \\ -3/15 & -1/15 & 5/15 \\ 3/15 & 11/15 & -10/15 \end{pmatrix};$$

Дома сделать
проверку.

Решение систем уравнений с помощью обратной матрицы

Запишем систему линейных уравнений:
с помощью матриц:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{матрица системы};$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \text{столбец правых частей.}$$

Тогда система уравнений в матричной форме будет выглядеть:

$$A \cdot X = B$$

$$A \cdot X = B$$

Если матрица системы A невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1} .

Умножим **слева** обе части матричного уравнения на матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

По определению обратной матрицы

$$A^{-1} \cdot A = E ,$$

поэтому

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B ;$$

так как при умножении на единичную матрица не изменяется, то

$$E \cdot X = X ,$$

и уравнение принимает вид:

$$X = A^{-1} \cdot B ;$$

Это значит, что вычислив для матрицы системы A обратную A^{-1} и умножив её слева на столбец B правых частей, получим ответ в виде матрицы-столбца X .

Пример решения системы с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + z = -1 \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

столбец правых частей $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

Обратная матрица A^{-1} найдена раньше: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6/15 & -3/15 & 0 \\ -3/15 & -1/15 & 5/15 \\ 3/15 & 11/15 & -10/15 \end{pmatrix}$;

Вычислим X по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$;

$$X = \begin{pmatrix} 6/15 & -3/15 & 0 \\ -3/15 & -1/15 & 5/15 \\ 3/15 & 11/15 & -10/15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (6/15) \cdot 3 + (-3/15) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ (-3/15) \cdot 3 + (-1/15) \cdot 1 + (5/15) \cdot (-1) \\ (3/15) \cdot 3 + (11/15) \cdot 1 + (-10/15) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18/15 - 3/15 + 0 \\ -9/15 - 1/15 - 5/15 \\ 9/15 + 11/15 + 10/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/15 \\ -15/15 \\ 30/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \text{ ОТВЕ} \\ \text{Т}$$

Выполнить дома проверку решения системы.