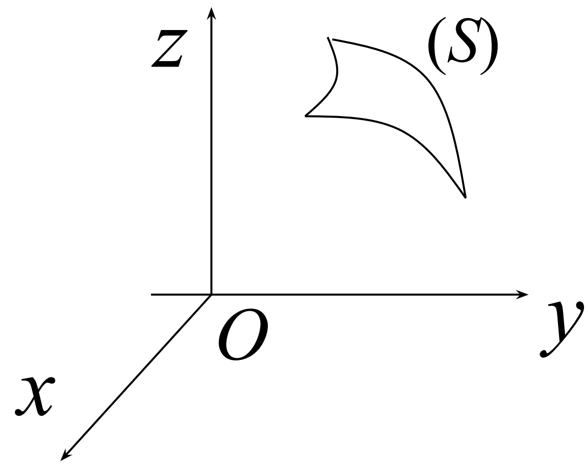
Лекция 2. Плоскость как поверхность первого порядка. Уравнения плоскости и их исследование. Прямая в пространстве, взаимное расположение прямых в пространстве, плоскости и прямой в пространстве. Прямая на плоскости, уравнения прямой на плоскости, расстояние от точки до прямой на плоскости. Кривые второго порядка; вывод канонических уравнений, исследование уравнений и построение кривых. Поверхности II порядка, исследование канонических уравнений поверхностей. Метод сечений.

Элементы аналитической геометрии

<u>§ 1. Плоскость.</u>

Имеем $OXYZ$ и некоторую поверхность S

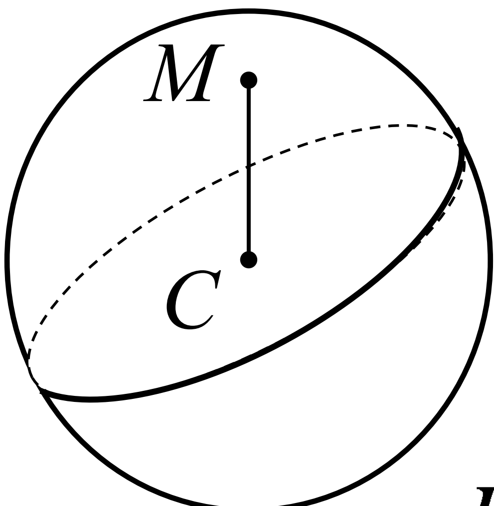
$$F(x,y,z) = 0$$



<u>Определение 1</u>: уравнение с тремя переменными называется **уравнением поверхности *S* в пространстве**, если этому уравнению удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки не лежащей на ней.

Пример.

Уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ $(R > 0)$ определяем сферу с центром в точке $C(a,b,c)$ и радиусом R.

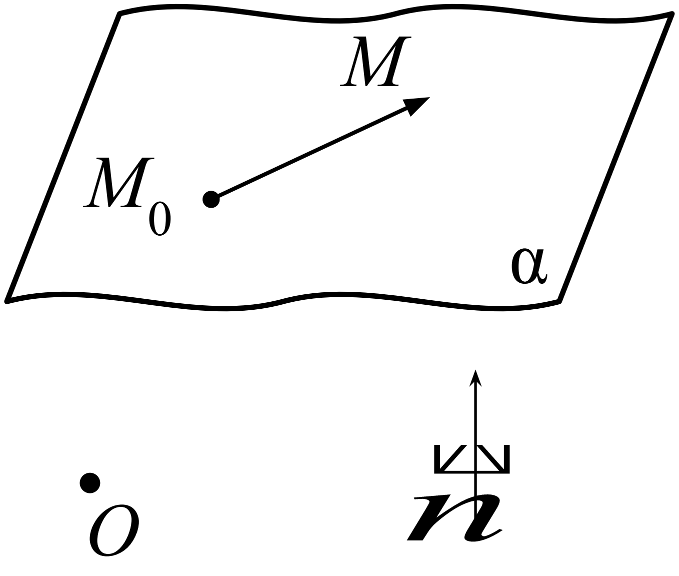


$M(x,y,z)$ – переменная точка $M \in (S) \Leftrightarrow |CM| = R$

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

<u>Определение 2</u>: Поверхность S называется поверхностью n-того порядка, если в некоторой декартовой системе координат она задается алгебраическим уравнением n-той степени
$F(x,y,z) = 0$ (1)
В примере (S) - окружность, поверхность второго порядка.
Если S - поверхность n-того порядка, то $F(x,y,z)$ - многочлен n-той степени относительно (x,y,z)
Рассмотрим единственную поверхность 1-го порядка – **плоскость.**
Составим уравнение плоскости проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, с вектором нормали $\vec{n} = (A,B,C)$



Пусть $M(x,y,z)$ - это произвольная (текущая) точка плоскости.

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}, T.e.$$

$$\left(\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}\right) = 0$$

или в координатной форме:

$$\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right)$$

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) - уравнение плоскости проходящей через точку M с данным вектором нормали $\vec{n}$

$$Ax + By + Cz + \underbrace{\left(-Ax_0 - By_0 - Cz_0\right)}_{D} = 0$$

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \quad (*)$$

$Ax + By + Cz + D = 0$ (3) - полное уравнение плоскости

<u>Неполное уравнение плоскости.</u>

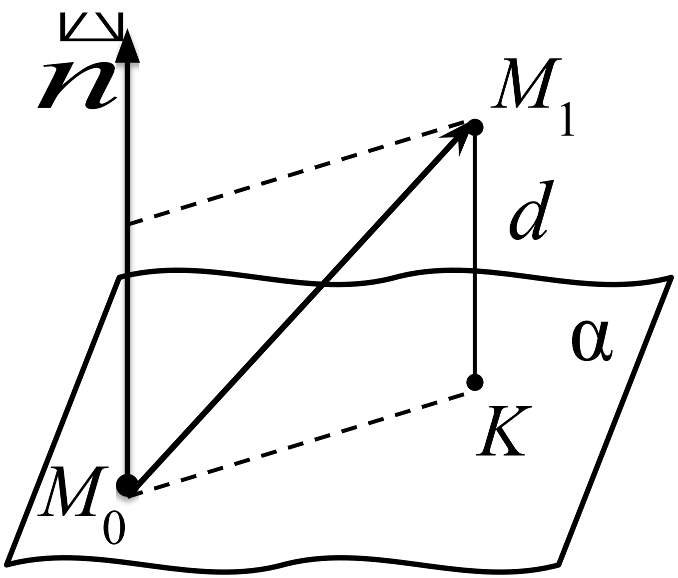
Если в уравнении (3) несколько коэффициентов (но не A,B,C одновременно) = 0, то уравнение называется неполным и плоскость α имеет особенности в расположении.

Например если $D = 0$, то α проходит через начало координат.

Расстояние от точки M_1 до плоскости α

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ α: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{pmatrix} D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \\ M_0(x_0 y_0 z_0) \in \alpha \end{pmatrix}$$



$$\text{from (3)} \Rightarrow \vec{n} = (A, B, C)$$

приложим $\vec{n}$ к точке M_0

$$d = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1} \right|$$

$$np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) =$$

$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ - расстояние от точки M_1 до плоскости α

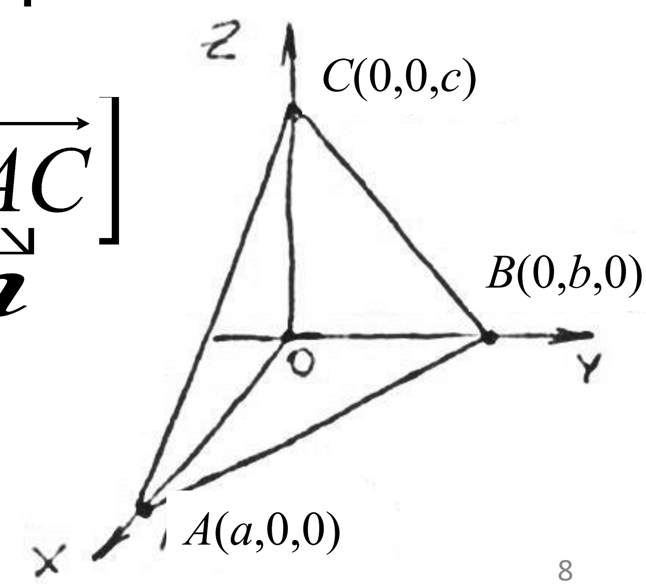
<u>Уравнение плоскости «в отрезках»</u>

Составим уравнение плоскости отсекающей на координатных осях ненулевые отрезки с величинами $a, b, c\ (a \gtrless 0, b \gtrless 0, c \gtrless 0)$

В качестве $\vec{n}$ возьмем $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

Составим уравнение для т. A с $\vec{n}$

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0),\ \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$



$$\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=\vec{i}bc+\vec{j}ac+\vec{k}ab$$

$$\vec{n}=(bc,ac,ab)$$

$$bc(x-a)+ac(y-0)+ab(z-0)=0$$ -уравнение плоскости, проходящей через точку A, перпендикулярно вектору нормали $\vec{n}$

$$bcx+acy+abz=abc$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$ -уравнение плоскости α "в отрезках"

§2. Общее уравнение прямой.

Прямую в пространстве можно задать пересечением 2-х плоскостей.

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = h$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

(1) уравнение прямой

Система вида (1) определяет прямую в пространстве, если коэффициенты A_1, B_1, C_1 одновременно непропорциональны A_2, B_2, C_2.

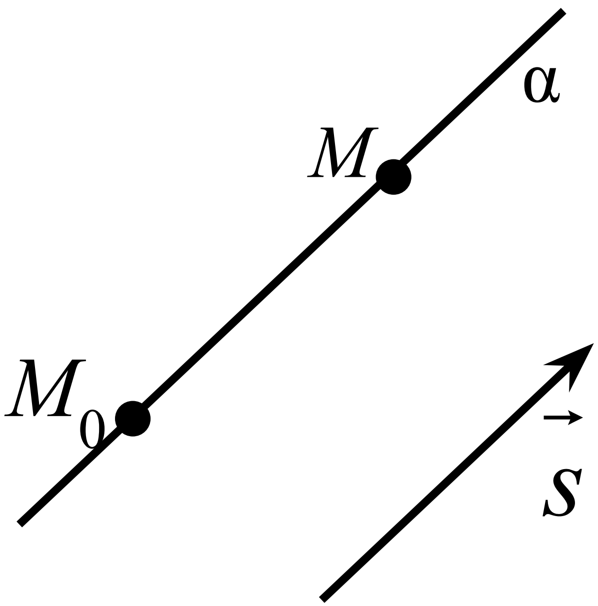
Параметрические и канонические уравнения прямой

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{s} = (m, n, p)$

$M(x, y, z)$ -произвольная точка прямой

точка $M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$



$$\exists t \in R \qquad \overrightarrow{M_0M} = \vec{s}t \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\vec{s}t = (mt, nt, pt)$$

Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \, (3), \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

$t \in]-\infty; +\infty[$ $\qquad$ t - параметр

Исключив t получим:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (4)$$

- каноническое уравнение

Система (3) определяет движение материальной точки, прямолинейное и равномерное из начального положения $M_0(x_0,y_0,z_0)$ со скоростью

$$V=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$$

в направлении вектора $\vec{s}$.

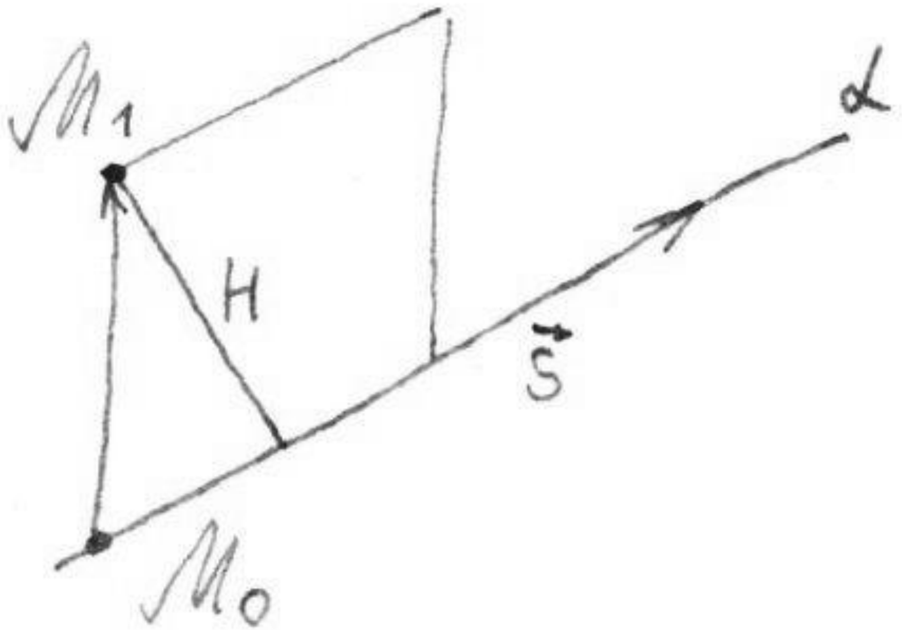
Расстояние от точки до прямой

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

α

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{s} = (m, n, p)$



$$H = \frac{\vec{s}_{\square}}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}\right]\right|}{\left|\vec{s}\right|}$$

-расстояние от точки M_1 до прямой α

<u>Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности.</u>

Пусть в пространстве две прямые L_1, L_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x\text{-}x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$\frac{x\text{-}x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Тогда задача определения угла между этими прямыми сводится к определению угла ф между их направляющими векторами:

$$\overline{q}_1=(l_1;m_1;n_1),\overline{q}_2=(l_2;m_2;n_2)$$

Пользуясь определением скалярного

произведения $\overline{q}_1\overline{q}_2=\left|\overline{q}_1\right|\left|\overline{q}_2\right|\cos\varphi$ и выражением в координатах указанного скалярного произведения и длин векторов q_1 и q_2, получим для нахождения ф

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}=\frac{\overline{q}_1\overline{q}_2}{\left|\overline{q}_1\right|\left|\overline{q}_2\right|}$$

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 соответствует коллинеарности □q_1 и □q_2, заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е. имеет вид:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

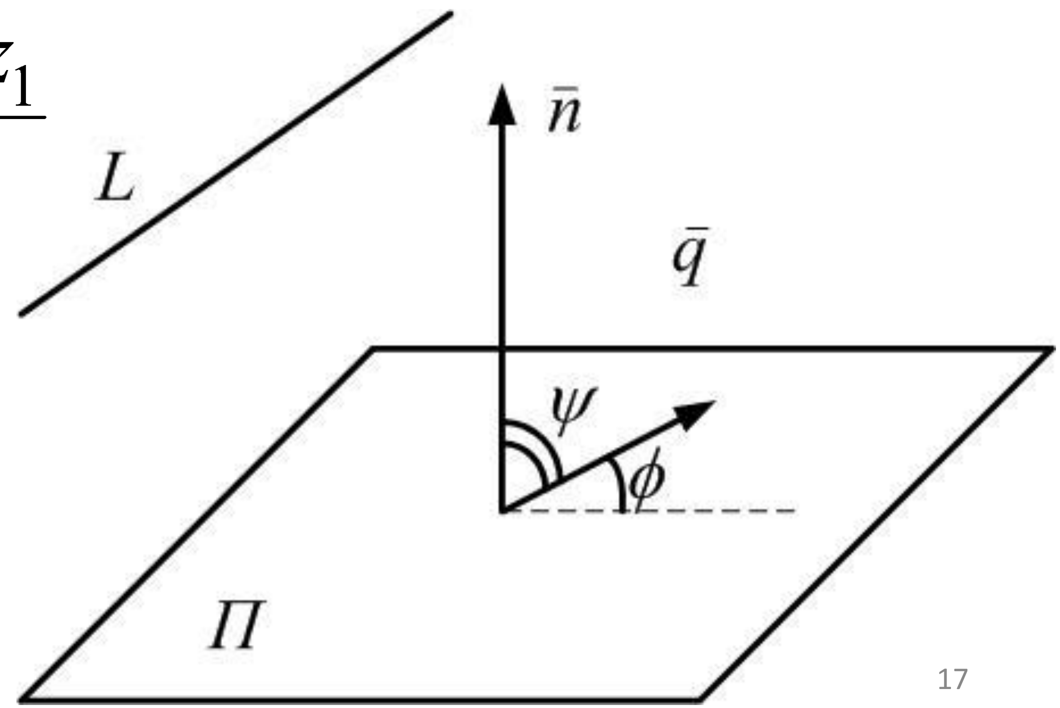
Условие перпендикулярности следует из определения скалярного произведения и его равенства нулю (при $\cos\varphi = 0$) и имеет вид:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Угол между прямой и плоскостью: условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Рассмотрим плоскость *П*, заданную общим уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$, и прямую *L*, заданную каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$



Т.к. угол ϕ между прямой *L* и плоскостью *П* является дополнительным к углу ψ между направляющим вектором прямой $\vec{q} = (l, m, n)$ и нормальным вектором плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$, то из определения скалярного произведения $\vec{q}\vec{n} = |\vec{q}||\vec{n}|\cos\phi$ и равенства $\cos\psi = \sin\phi$ ($\phi = 90 - \psi$), получим:

$$\sin\varphi = \frac{\overline{n}\,\overline{q}}{|\overline{n}||\overline{q}|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Условие параллельности прямой L и плоскости Π (включающее в себя принадлежность L к Π) эквивалентно условию перпендикулярности векторов□q и □n и выражается = 0 скалярного произведения этих векторов: □q□$n = 0$:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой L и плоскости Π эквивалентно условию параллельности векторов □n и □q и выражается пропорциональностью координат этих векторов:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

Условия принадлежности двух прямых к одной плоскости

Две прямые в пространстве L_1 и L_2 могут: 1) пересекаться; 2) быть параллельными; 3) скрещиваться.

В первых двух случаях прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости.

Установим условие принадлежности к одной плоскости двух прямых, заданных каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Очевидно, что для принадлежности двух указанных прямых к одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$;

$q_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $q_2 = (l_2, m_2, n_2)$, были компланарны, для чего в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение указанных трех векторов = 0.

Записывая смешанные произведения указанных векторов в координатах получаем необходимое и достаточное условие принадлежности двух прямых L_1 и L_2 к одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Условие принадлежности прямой к плоскости

Пусть есть прямая

$$\frac{x\text{-}x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

Эти условия имеют вид:

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ и $Al + Bm + Cn = 0$, первое из которых означает, что точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, через которую проходит прямая, принадлежит плоскости, а второе – условие параллельности прямой и плоскости.

Кривые второго порядка.

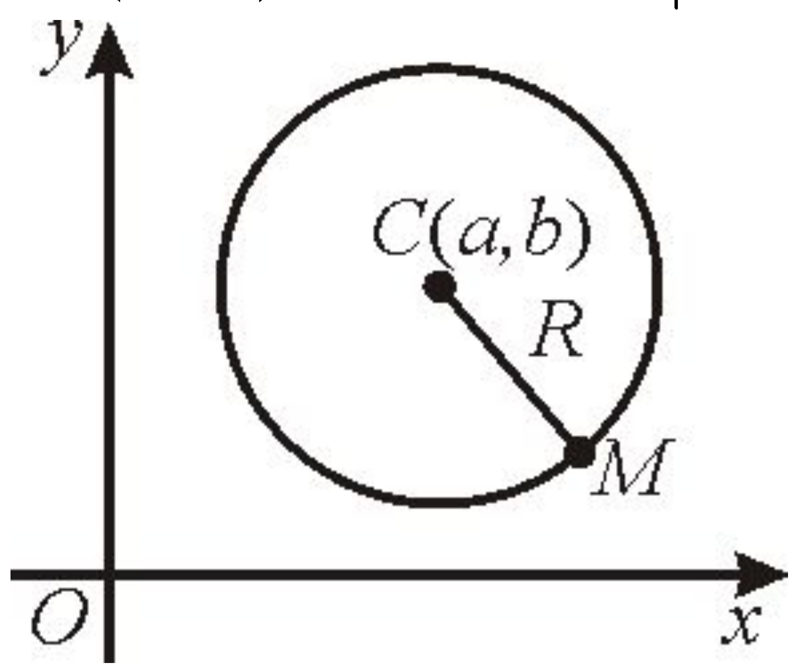
§ 1. Понятие об уравнении линии на плоскости.

Уравнение $f(x,y) = 0$ называется уравнением линии L в выбранной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

Пример: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (R > 0)$ – уравнение окружности радиуса R и центром в точке $C(a,b)$.

Если 1.) $\forall M(x, y) \in O \Rightarrow \quad |CM| = R$

2.) $\forall M(x, y) \notin O \Rightarrow \quad |CM| \neq R$



Линия *L* называется линией n-того порядка, если в некоторой декартовой системе координат она задается алгебраическим уравнением n-той степени относительно x и y.

Мы знаем единственную линию 1-го порядка – **прямую:** $Ax + By + D = 0$

Мы будем рассматривать кривые 2-го порядка: эллипс, гиперболу, параболу.

Общее уравнение линий 2-ого порядка имеет вид:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0}$$

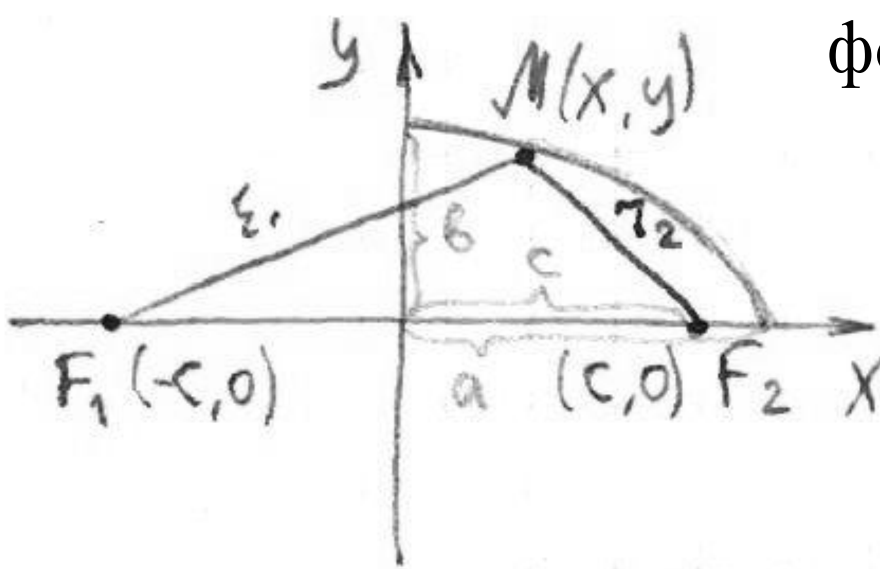
Эллипс (Э)

Определение. Эллипс – множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная и бóльшая расстояния между фокусами.

Обозначим постоянную $2a$, расстояние между фокусами $2c$

($a > c$, $a > 0$, $c > 0$).

Проведем ось X через фокусы, ось Y через середину фокусного расстояния.



Пусть M – произвольная точка эллипса,

т. $M \in Э \Leftrightarrow r_1 + r_2 = 2a$ (1),

где r_1, r_2 – фокальные радиусы Э.

Запишем (1) в координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (2)$$

Это уравнение эллипса в выбранной системе координат.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (3)$$

Упрощая (2) получим :

$b^2 = a^2$ - c^2

(3) – <u>каноническое уравнение эллипса.</u>

Можно показать, что (2) и (3) эквивалентны:

$$\sqrt{y^2-b^2}+\sqrt{b^2+y^2}=\sqrt{y+b}\left(\sqrt{y-b}+\sqrt{y+b}\right)=2a$$

<u>Исследование формы эллипса по каноническому уравнению</u>

<u>1) Эллипс – кривая 2-го порядка</u>

<u>2) Симметрия эллипса.</u>

т.к. x и y входят в (3) лишь в четных степенях, то эллипс имеет 2 оси и 1 центр симметрии, которые в выбранной системе координат совпадают с выбранными осями координат и точкой O.

$$y + b(y - b + 2(y - b) + y + b) = 4a^2$$

$$y + b(4y + 2b)$$

$$y + 4by + 2b^2 = 2b(2y + b) + y$$

3) Расположение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}; \qquad x^2 \le a^2; \qquad |x| \le a; \qquad |y| \le b,$$

Т.е. весь Э расположен внутри прямоугольника, стороны которого $x = \pm\, a$ и $y = \pm\, b$.

4) Пересечение с осями.

С OX: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; & x^2 = a^2 \\ y = 0; & x = \pm a \end{cases}$

$A_1(-a;0); \qquad A_2(a;0);$

вершины эллипса

$B_1(0;b); \qquad B_2(0;-b);$

С OY: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; & y^2 = b^2 \\ x = 0; & y = \pm b \end{cases}$

В силу симметрии эллипса рассмотрим его поведение (↑↓) лишь в I четверти.

Разрешив (3) относительно y получим:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} < 0, \qquad т.е.$$

в I четверти $x > 0$ и эллипс убывает.

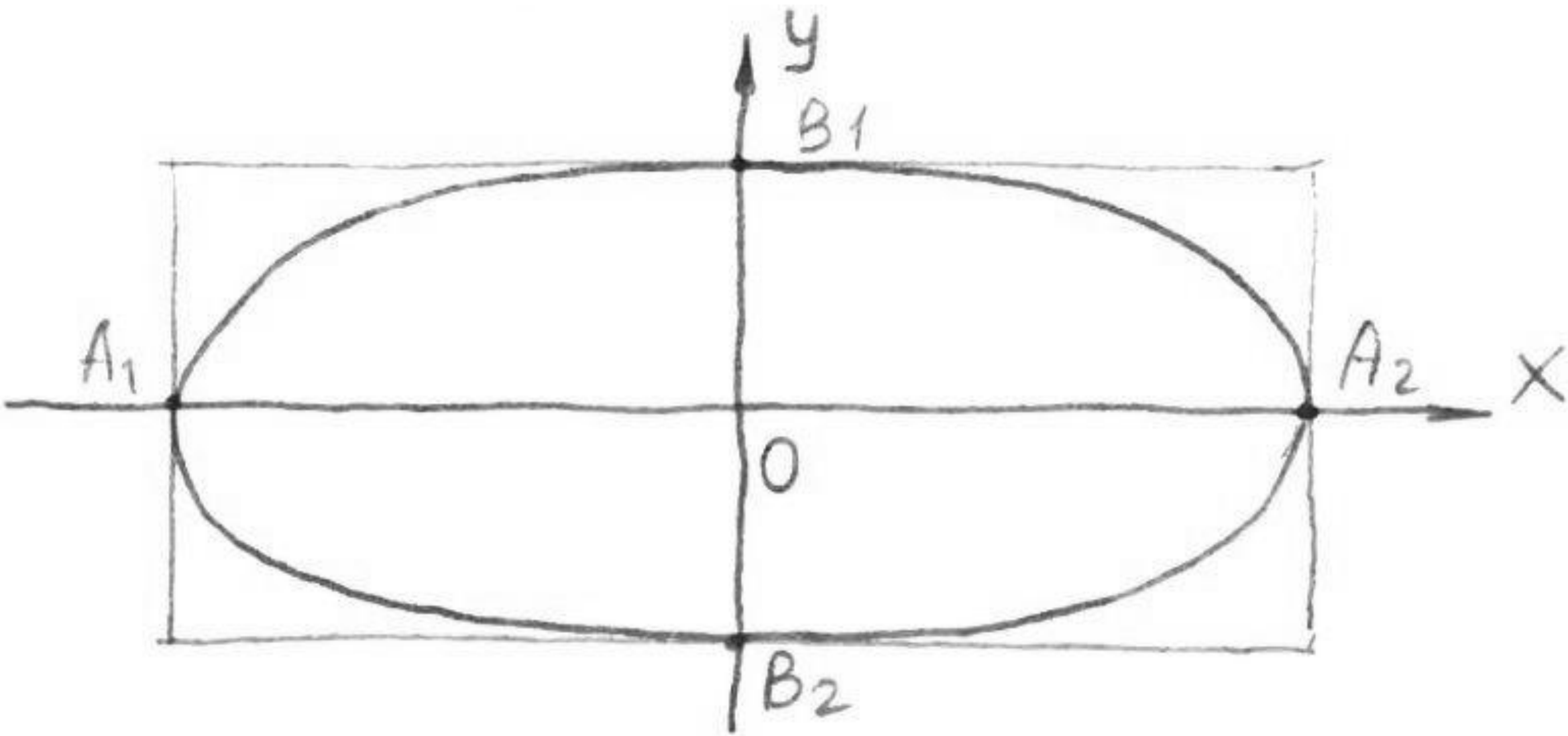
<u>Вывод:</u> Э – <u>замкнутая кривая, овальная, имеющая четыре вершины.</u>

<u>План построения Э.</u>

1) Строим прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$
2) Вписываем выпуклую овальную линию

$$y^2 = b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2} = \left(\frac{b - xb}{a}\right) \cdot \left(\frac{b + xb}{a}\right) = \left(\frac{b(a-x)}{a}\right)\left(\frac{b(a+x)}{a}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(a^2 - x^2\right)$$

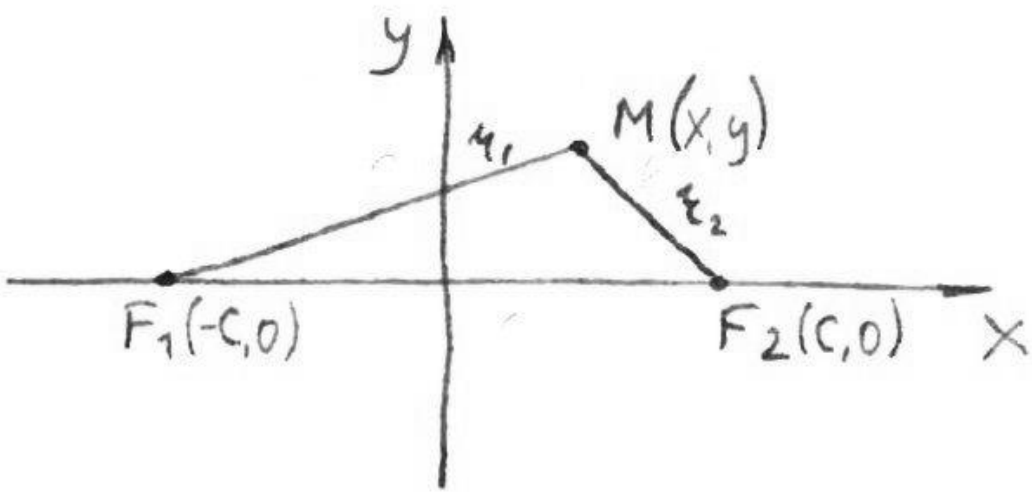
Построение эллипса



Гипербола (Г)

Определение : Г – множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний которых до 2-х фиксированных точек плоскости F_1 , F_2 есть величина постоянная и < этого расстояния.

$2a$, $|F_1F_2| = 2c$



Выберем систему координат .

точка $M \in \Gamma \Leftrightarrow |r_1 - r_2| = 2a$

$r_1 - r_2 = \pm 2a$

В координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \qquad (1)$$

(1) – уравнение Г в выбранной системе координат

Упрощая (1): $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ $\quad (2) \qquad b^2=c^2-a^2$

(2) – <u>каноническое уравнение Г.</u>

(1) и (2) – эквивалентны.

<u>**Исследование гиперболы по каноническому уравнению**</u>

1) Г- линия 2-го порядка
2) Г имеет две оси и один центр симметрии, которые в нашем случае совпадают с координатными осями и началом координат.
3) Расположение гиперболы.

$$\frac{x^2}{a^2}=\underbrace{1+\frac{y^2}{b^2}}_{\geq 1} \qquad x^2 \geq a^2 \qquad |x| \geq a$$

Гипербола расположена вне полосы между прямыми $x = a$, $x = -a$.

4) Точки пересечения с осями.

OX: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ y = 0; \end{cases}$ $\qquad x = \pm a$

OY: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ x = 0; \end{cases}$ не имеет решений

$A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$ – действительные вершины Г

$B_1(0;b)$; $B_2(0;-b)$ – мнимые вершины Г

$2a$ – действительная ось Г

$2b$ – мнимая ось Г

5) Асимптоты гиперболы.

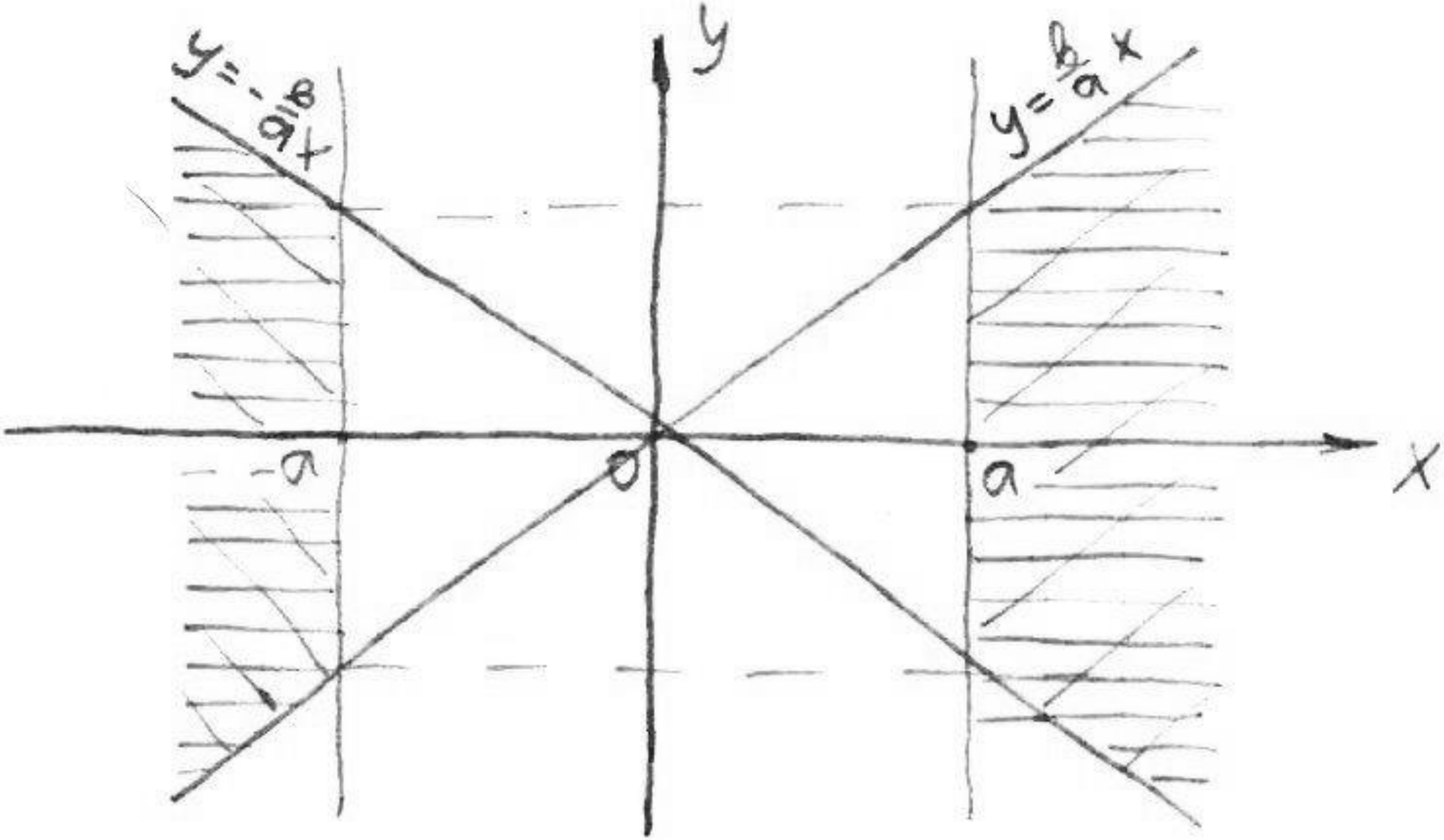
В силу симметрии Г рассмотрим ее часть в I четверти .
Разрешив (2) относительно *y*, получим:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$ уравнение Г в I четверти $x \geq 0$

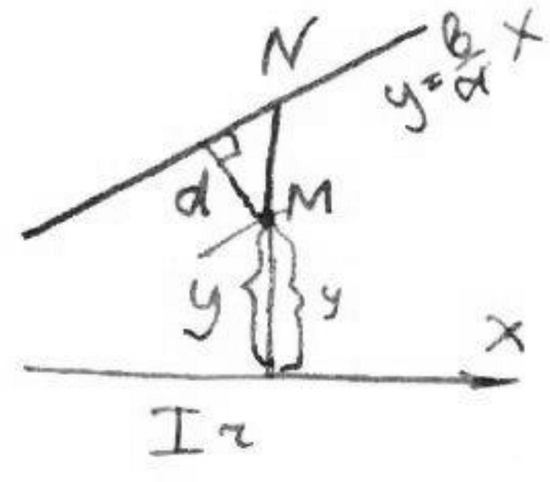
Рассмотрим прямую: $y=\frac{b}{a}\cdot x$

т.к. в I четверти $x>0$, то $\frac{b}{a}\cdot x > \frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2-a^2}$ т.е. в I четверти при одной и той же абсциссе, ордината прямой > ординаты соответствующей точки Г, т.е. в I четверти Г лежит ниже этой прямой.
Вся Г лежит внутри вертикального угла со сторонами

$$y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$$



Покажем, что при неограниченном удалении от начала координат Г приближается к прямым $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x$.



$$d < |MN| \qquad (*)$$

$$MN = \underset{\infty}{Y} - \underset{-\infty}{y} = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} =$$

$$= \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right),$$

$$\lim_{x \to +\infty}(Y - y) = \frac{b}{a}\lim_{x \to +\infty}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty}|MN| = 0 \qquad из(*) \to при \quad x \to \infty \quad \alpha \to 0$$

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x - ассимптоты \quad Г$$

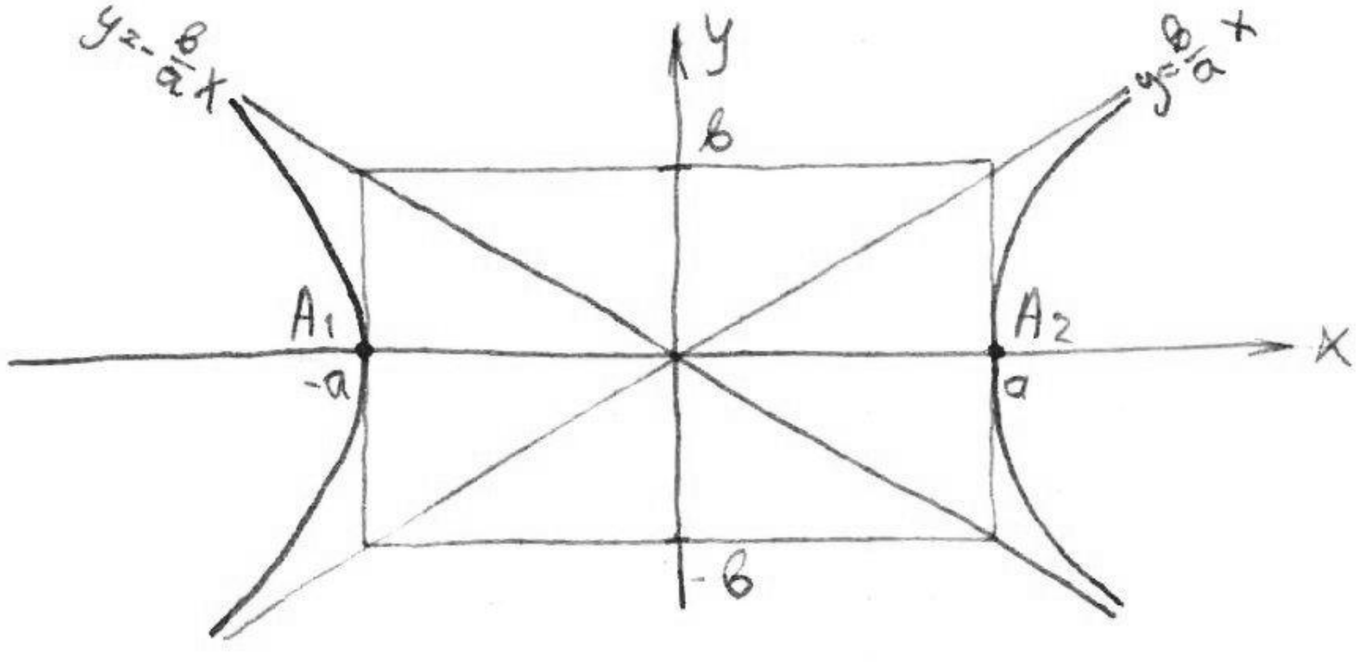
6) Можно показать, что в I ч. Г возрастает

7) План построения Г

а) строим прямоугольник $2a$, $2b$

б) проводим его диагонали

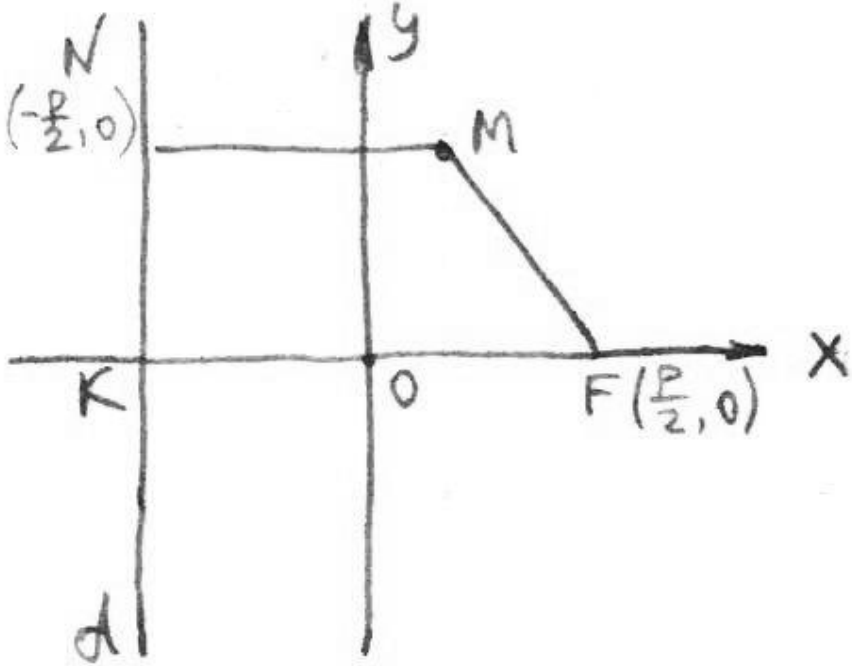
в) отметим A_1, A_2 – действительные вершины Г и впишем эти ветви



Парабола (П)

Рассмотрим d (директрису) и F (фокус) на плоскости.

<u>Определение. П</u> – множество всех точек плоскости, равноудаленных от прямой d и точки F (фокус)



d-директриса

F-фокус

XOY

$|KF| = p \qquad (p > 0)$

$Z\left(\frac{p}{2}, 0\right) \qquad M(x, y)$

точка $M \in$ П тогда, $|MF| = |MN|$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \qquad (1)$$

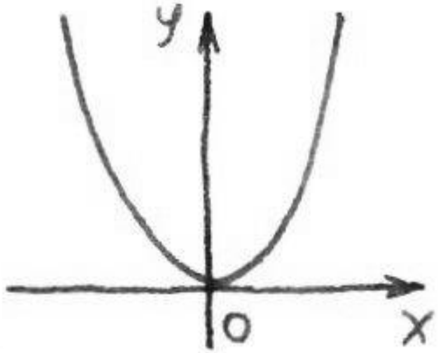
уравнение П, выбранной в системе координат

Упрощая (1) получим

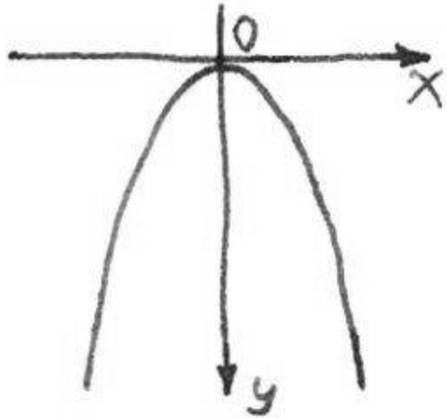
$\boxed{y^2 = 2px}$ (2) – каноническое уравнение П.

(1) и (2) эквивалентны

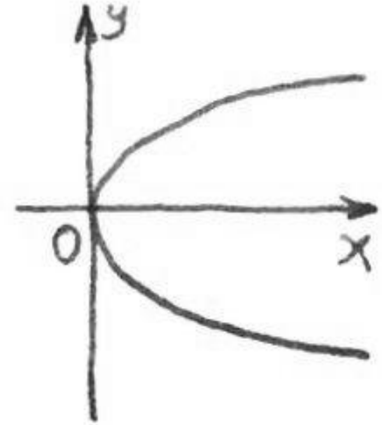
Исследование П по каноническому уравнению



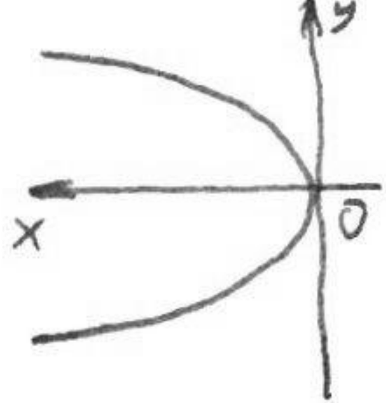
$x^2=2py$



$x^2=-2py$



$y^2=2px$



$y^2=-2px$

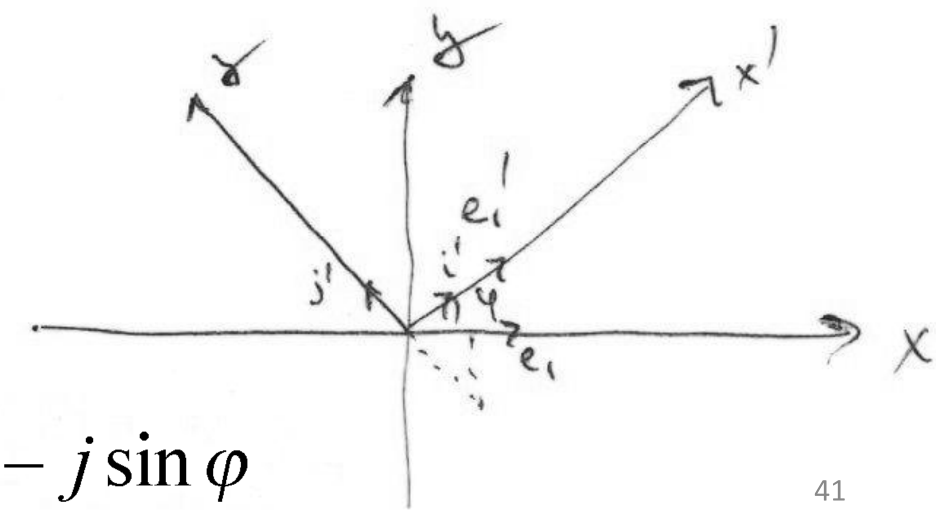
$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$$

$$y = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$$

$$e_1' = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$$

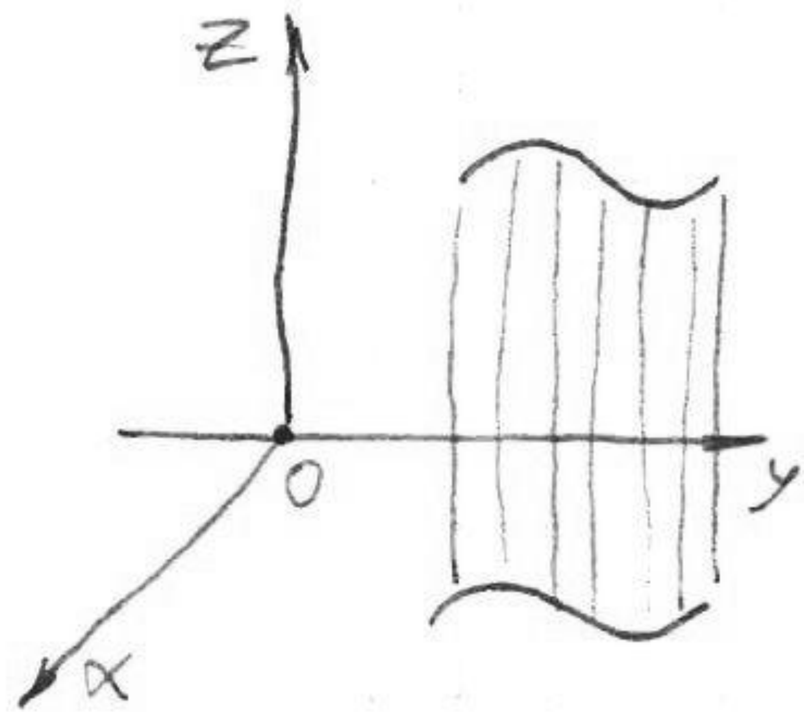
$$xi + yj = \left(x'i' + y'j'\right) \cdot i$$

$$x = x'(i' \cdot i) + y'(j \cdot i) = x' \cos\varphi - j \sin\varphi$$



§4. <u>Цилиндры.</u>

<u>Цилиндрические поверхности с образующими, параллельными координатным осями</u>



Через точку *x* линии *L* проведем прямую параллельную оси *OZ*. Поверхность, образованная этими прямыми называется <u>цилиндрической поверхностью или цилиндром (Ц).</u>

Любая прямая параллельная оси *OZ* называется <u>образующей</u>.

l - <u>направляющая цилиндрической поверхности</u> плоскости *XOY*.

$$Z(x,y) = 0 \quad (1)$$

Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка цилиндрической поверхности. Спроецируем ее на L.

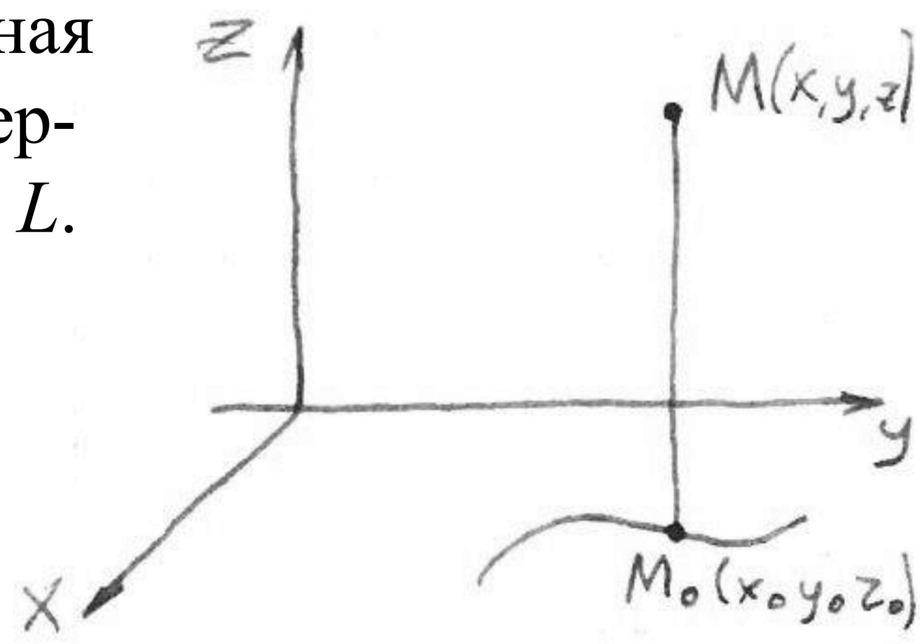
$M_0 \in L \Rightarrow Z(x_0,y_0) = 0 \quad (2)$

$x = x_0$

$\Rightarrow Z(x,y) = 0 \quad M \in$ Ц

$y = y_0$

$M_0 \in L$



то есть координаты M удовлетворяют (1) очевидно, что если $M \notin$ Ц, то она не проектируется в точку $M_0 \in L$ и следовательно, координаты M не будут удовлетворять уравнению (1), которое определяет Ц с образующей параллельной оси OZ в пространстве.

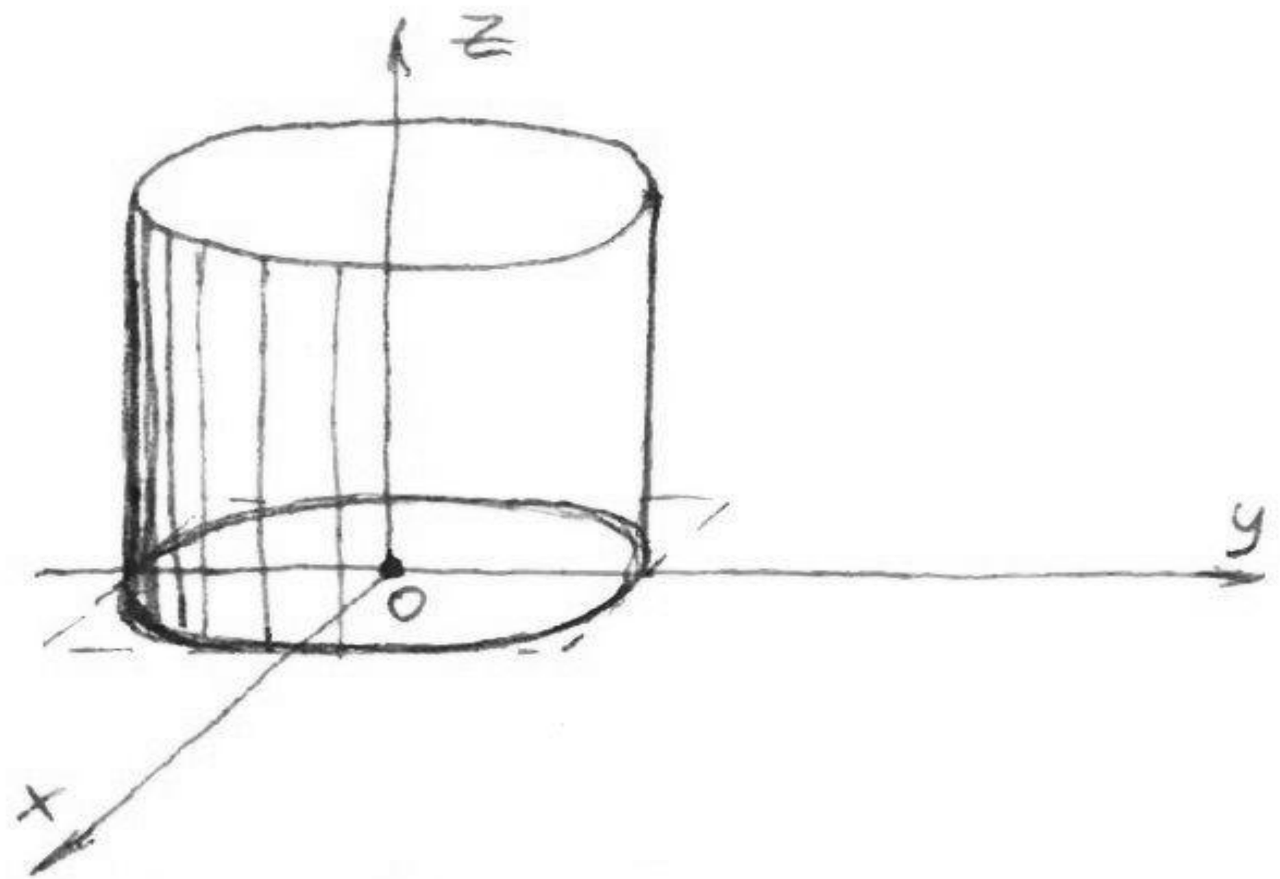
Аналогично можно показать, что :

$\Phi(x,z) = 0$ в пространстве Ц $\parallel OY$

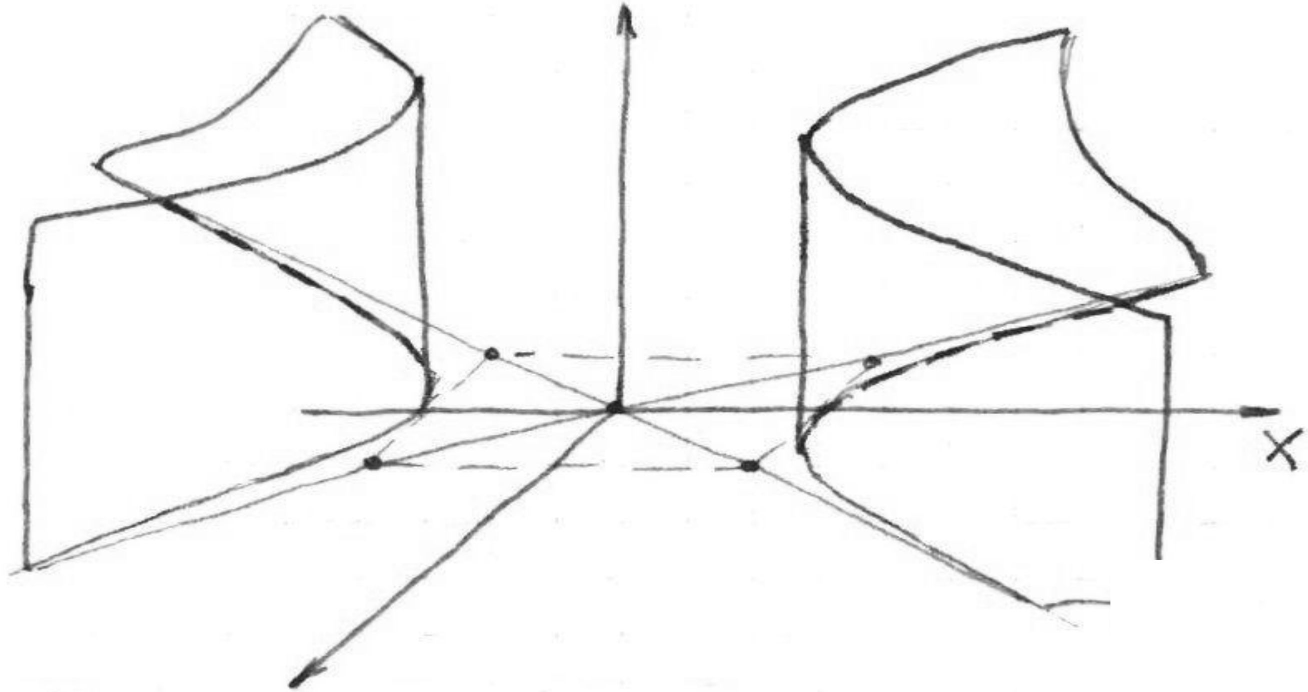
$\phi(y,z) = 0$ определяет в пространстве Ц $\parallel OX$

Примеры цилиндров второго порядка

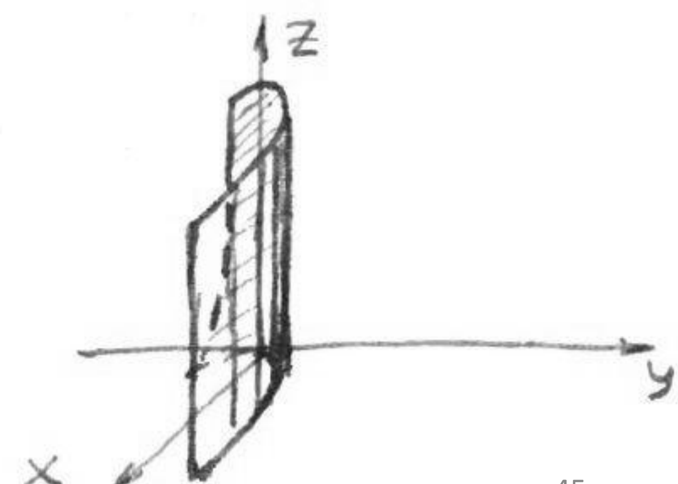
1) Эллиптический $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



2) Гиперболический $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



3) Параболический $y^2 = 2px$



<u>Проекция пространственной линии на координатной плоскости</u>

Линию в пространстве можно задать параметрически и пересечением поверхностей. Одну и ту же линию можно задать ∩ различных поверхностей.

Пусть пространственная линия L задается ∩ двух поверхностей α:

$$S_1\colon\ \Phi_1(x,y,z) = 0$$

$$S_2\colon\ \Phi_2(x,y,z) = 0$$

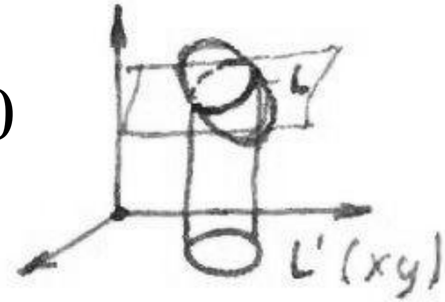
уравнение L

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y,z) = 0 \\ \Phi_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Найдем проекцию L на плоскость XOY из уравнения (1) исключаем Z. Получим уравнение: $Z(x,y) = 0$ – в пространстве это уравнение Ц с образующей || OZ и направляющей L.

Проекция:

$L'xy \quad \begin{cases} Z(x, y) = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$



<u>**Поверхности второго порядка**</u>

<u>**Эллипсоид**</u> – каноническое уравнение поверхности имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{pmatrix}$$

1) Эллипсоид – поверхность второго порядка.
2) X, Y, Z входят в уравнение лишь в четных степенях => поверхность имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии, которые в выбранной системе координат совпадают с координатными плоскостями и началом координат.

3) Расположение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \qquad \begin{gathered} x^2 \le a^2 \\ |x| \le a \end{gathered}$$

Поверхность заключена между || плоскостями с уравнениями $x = a$, $x = -a$.

Аналогично $|y| \le b,\quad |z| \le c,$

т.е. вся поверхность заключена внутри прямоугольного параллелепипеда.

$x = \pm a,\ y = \pm b,\ z = \pm c.$

<u>Будем исследовать поверхность методом сечений </u>– пересекая поверхность координатными плоскостями и плоскостями || координатным. В сечении будем получать линии, по форме которых будем судить о форме поверхности.

Пересечем поверхность плоскостью *XOY*. В сечении получим линию.

$$L:\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow L:\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

- эллипс a и b – полуоси

Аналогично с плоскостью *YOZ*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

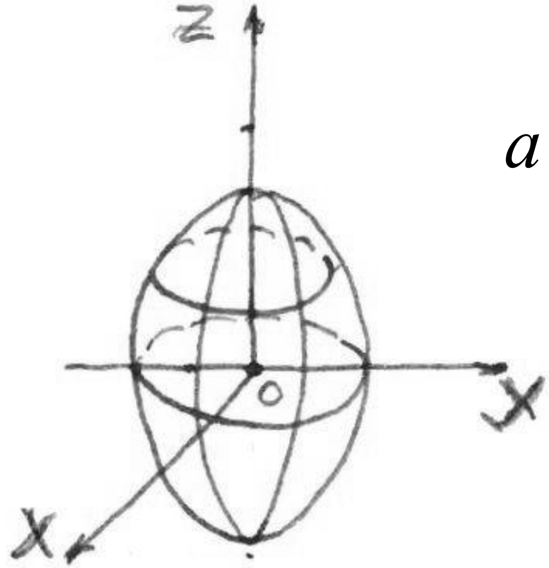
-эллипс с полуосями b и c

Плоскость || *XOY*

$$\begin{cases} z=h \qquad |z|\le c \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z^2}{c^2} \\ z=h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=h \end{cases} \qquad a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

Если $h(0,c)$, то оси эллипса убывают от a и b до 0.



$a = b = c$ - сфера

Параболоиды

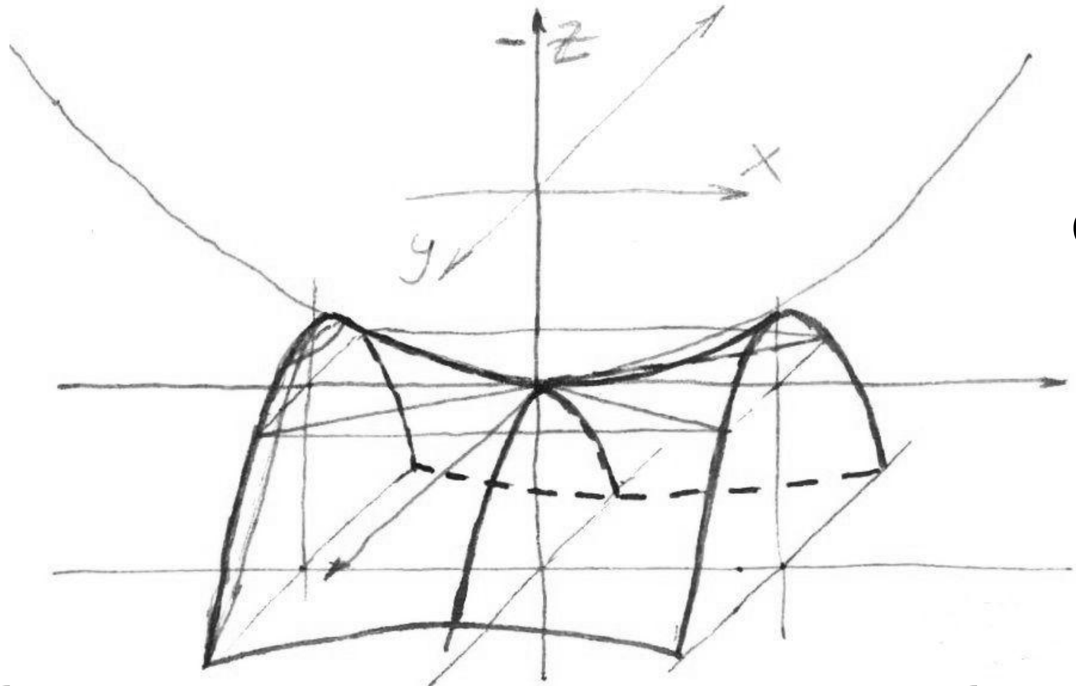
а) <u>Гиперболический параболоид</u> – поверхность с каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \begin{matrix} pq > 0 \\ p > 0, q > 0 \end{matrix}$$

1) Поверхность второго порядка

2) Так как x,y входят в уравнение лишь в четных степенях, то поверхность имеет плоскости симметрии, которые при данном выборе координат совпадают с плоскостями XOZ, YOZ.

3) исследуем поверхность методом сечения

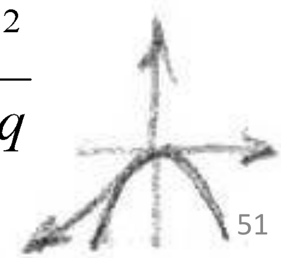


седло

пл.XOZ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} \\ y = 0 \end{cases}$

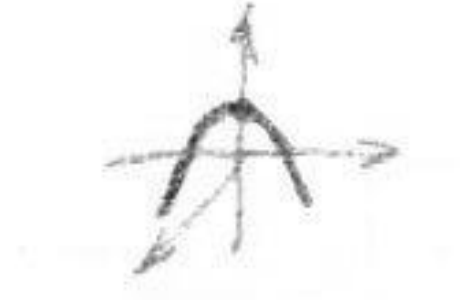
В сечении парабола симметричная оси OZ, восходящая.

пл.YOZ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\dfrac{y^2}{2q} \\ x = 0 \end{cases}$



пл.$\|YOZ$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = -\dfrac{y^2}{2q} + \dfrac{h^2}{2p} \\ x = h \end{cases}$$



пл.$\|XOZ$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ y = h \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{h^2}{2q} \\ y = h \end{cases}$$

пл.XOY

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

В сечении пара прямых, проходящих через начало координат пл.$\|XOY$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

при $h > 0$ гиперболы, с действительной полуосью вдоль OX, при $h < 0$ гиперболы, с действительной полуосью вдоль оси Y.

Эллиптический параболоид $\boxed{\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z}$

$pq > 0$

1) поверхность второго порядка $p > 0, q > 0$

2) имеет 2 плоскости симметрии, которые совпадают с XOZ и YOZ

3) левая часть уравнения неотрицательна => $z \geq 0$, то есть, вся поверхность расположена над XOY.

4) исследуем поверхность методом сечения

пл.XOY

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad 0(0,0,0)$$

пл. $\| XOY$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z \\ z=h(h\geq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph}+\dfrac{y^2}{2qh}=1 \\ z=h \end{cases}$$

эллипс

$$a^*=\sqrt{2ph};b^*=\sqrt{2qh}$$

пл.YOZ

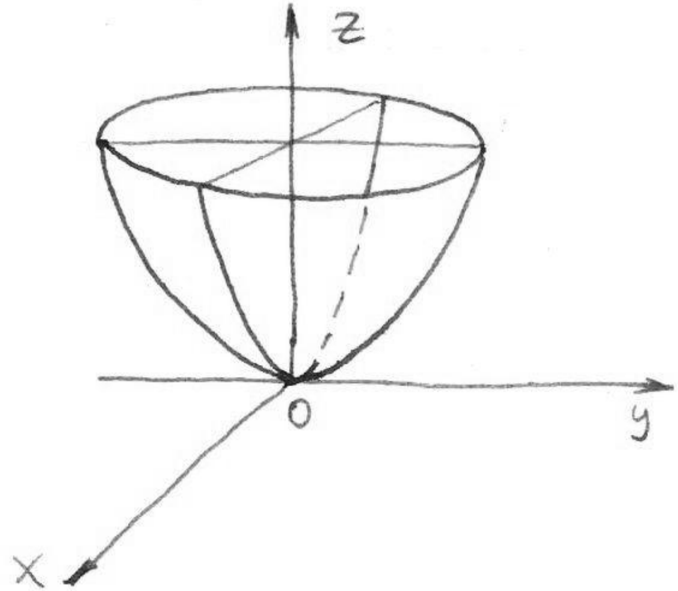
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2=2qz \\ x=0 \end{cases}$$

парабола восходящая
с вершиной в начале
координат

пл.XOZ

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z \\ y=0 \end{cases}$$

парабола восходящая с
вершиной в начале
координат



<u>Гиперболоиды</u>

а) <u>Однополосный гиперболоид</u> $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ $\begin{pmatrix} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{pmatrix}$

1) поверхность второго порядка
2) имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии
3) метод сечений

пл.XOY

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

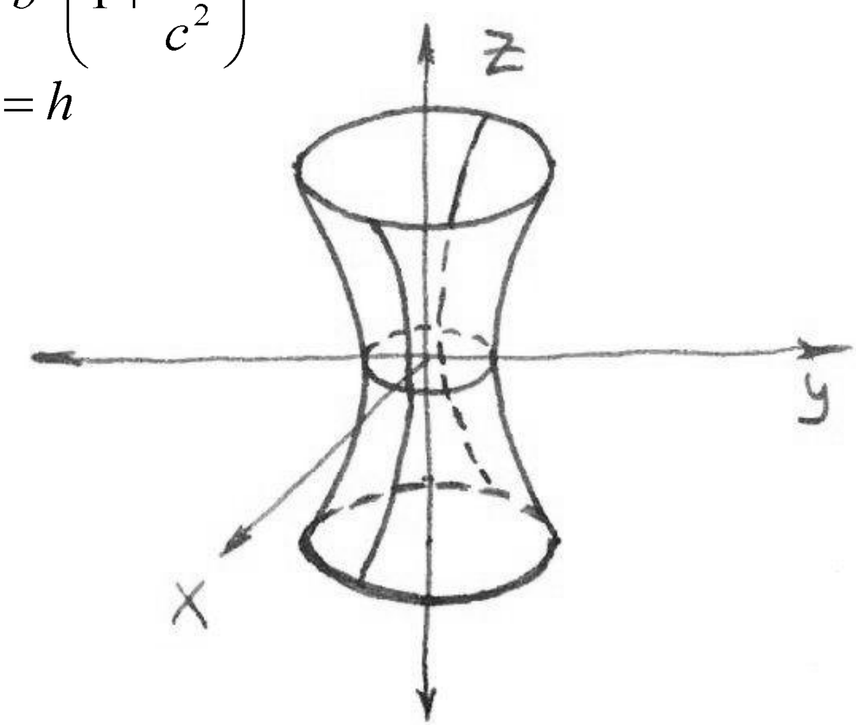
в сечении эллипс с полуосями a и b - горловой

пл. $\| XOY$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=h \\ z=h \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=h \end{cases}$$

$$a^*=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

$$b^*=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$



при $|h|$ –>∞ от a и b до ∞.

б) Двуполостный гиперболоид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

1) поверхность второго порядка

2) имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии

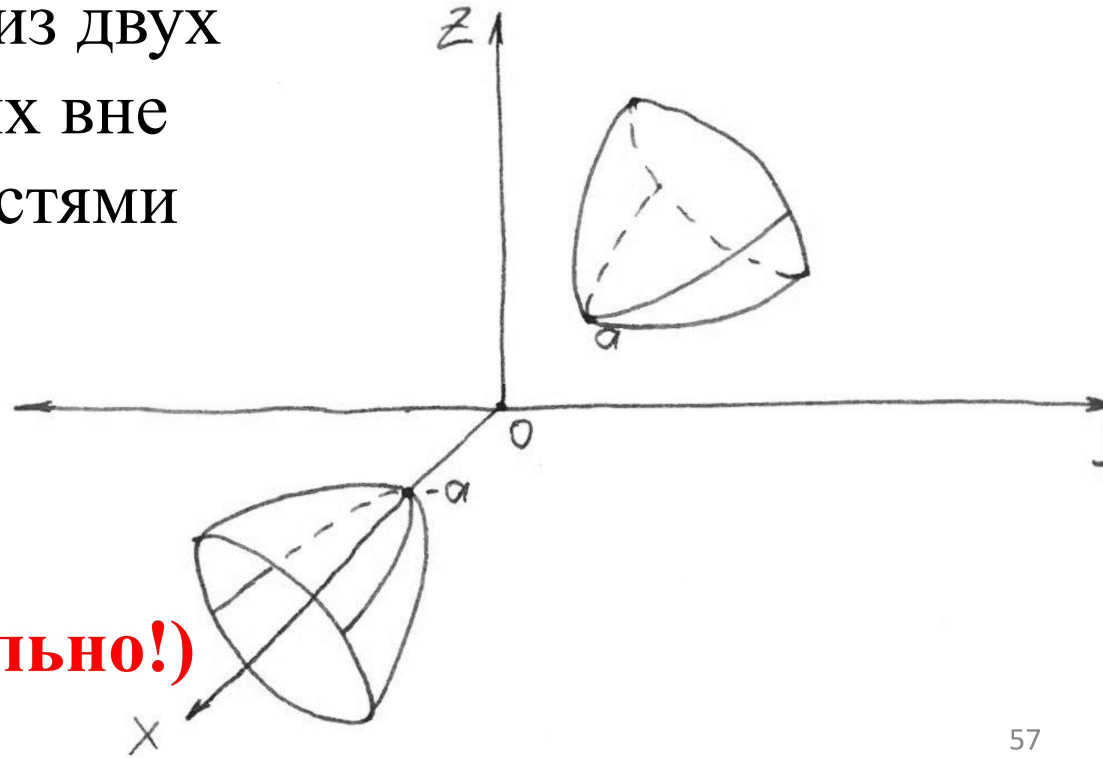
3) расположение поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} = \underbrace{1 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}_{\geq 1}$$

$x^2 \geq a^2$; $|x| \geq a$; $(a, b, c > 0)$

Поверхность состоит из двух частей, расположенных вне полосы между плоскостями с уравнениями

$x = a, \; x = -a$



4) исследуем методом сечений **(Самостоятельно!)**

<u>Конус второго порядка</u>

<u>Конусом второго порядка</u> называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$(a, b, c > 0) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

1) поверхность второго порядка
2) имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии
3) исследуем методом сечений

пл.XOY

$$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \end{cases} \qquad O(0,0,0)$$

пл.$\|XOY$

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2 \cdot \dfrac{h^2}{c^2}} + \dfrac{y^2}{b^2 \cdot \dfrac{h^2}{c^2}} = 1 \end{cases}$$

$a^* = a\dfrac{|h|}{c}$ $\qquad b^* = b\dfrac{|h|}{c}$ $\quad |h|$ –>∞ от 0 до ∞

пл.YOZ

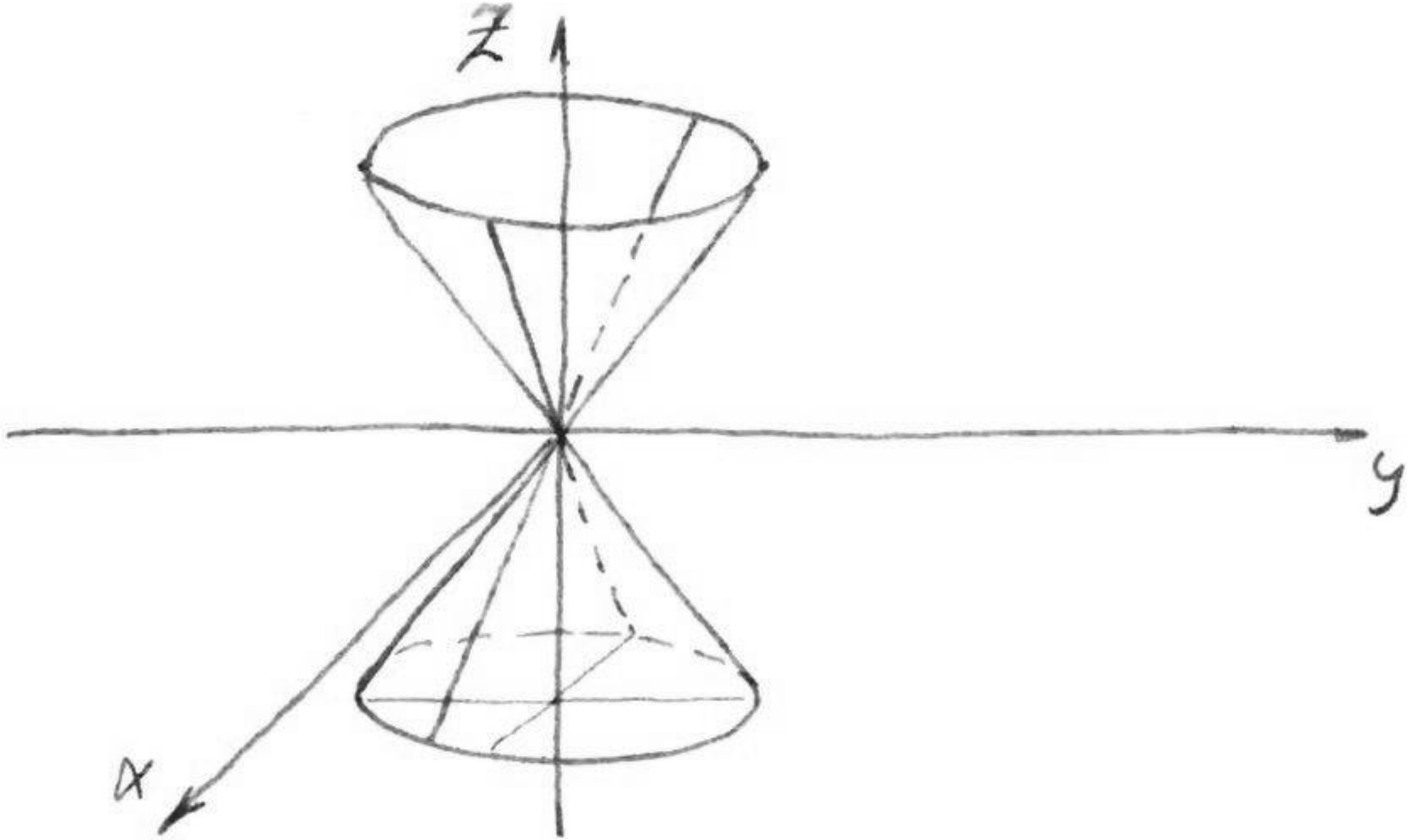
$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \left(\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

пара прямых, проходящих через начало координат

пл.XOZ

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

пара прямых, проходящих через начало координат


z
y
x