

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ

Выполнили студенты 22928/2 гр. – Кондраев Д., Тимушев Ф., Давыдов А., Рустамов Ш.,
Магомедов Х, Безруков А.

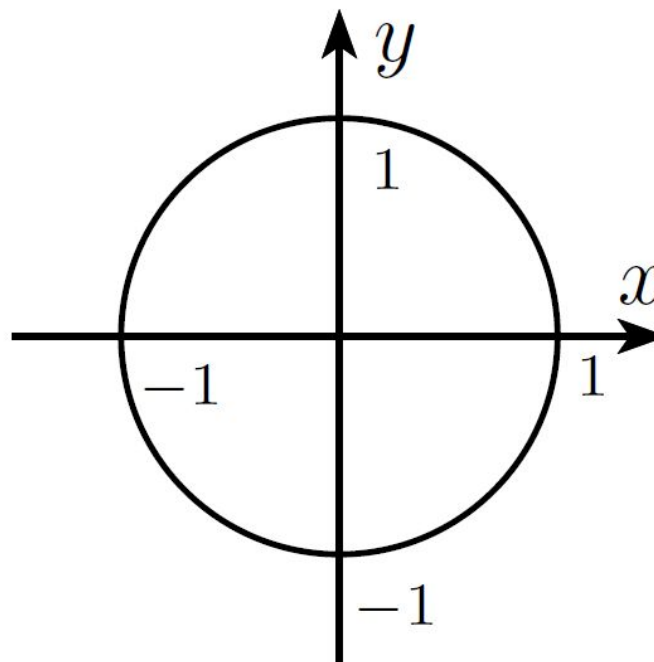
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ

— геометрическое множество точек на плоскости $(O; x, y)$, которое определяется как множество нулей многочлена от двух переменных.

Алгебраические кривые степеней $n = 1, 2, 3, \dots, 8$ кратко называются *прямыми, кониками, кубиками, квартиками, пентиками, секстиками, септиками, октиками* соответственно.

Например, единичная окружность — это алгебраическая кривая степени 2 (коника), так как она задаётся уравнением:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



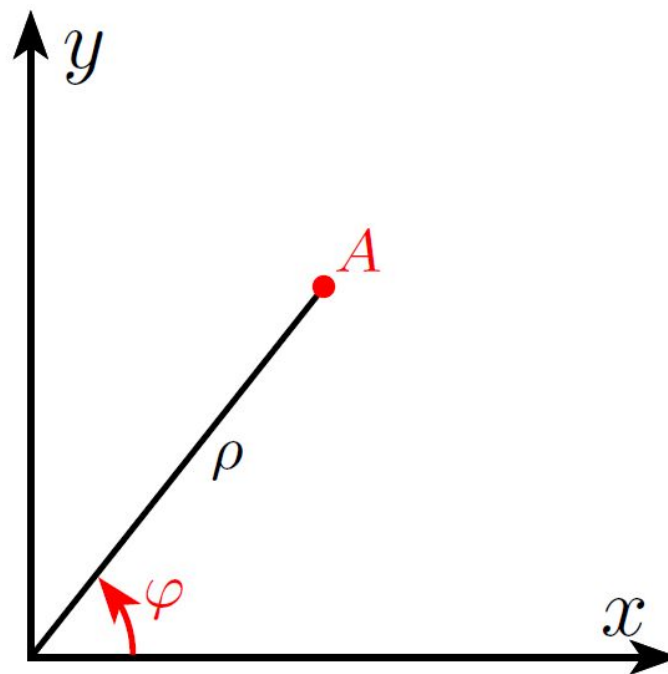
ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho^2 = y^2 + x^2$$

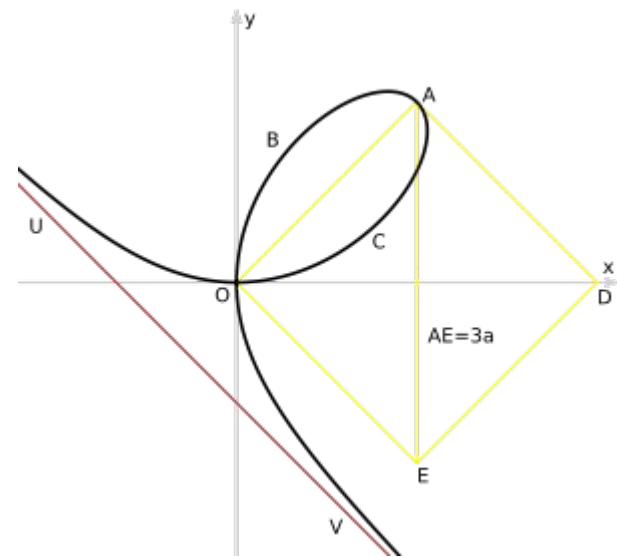


ДЕКАРТОВ ЛИСТ

— плоская
алгебраическая кривая
третьего порядка,
удовлетворяющая
уравнению в
прямоугольной системе

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

Параметр $3a$ определяется
как диагональ квадрата,
сторона которого равна
наибольшей хорде петли.



СВОЙСТВА

- Прямая OA — ось симметрии, её уравнение:
 $y = x$.
- Точка A называется *вершиной*, её координаты $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$.
- Для обеих ветвей существует асимптота UV , её уравнение:

$$x + y + a = 0$$

- Площадь области между дугами ACO и ABO :

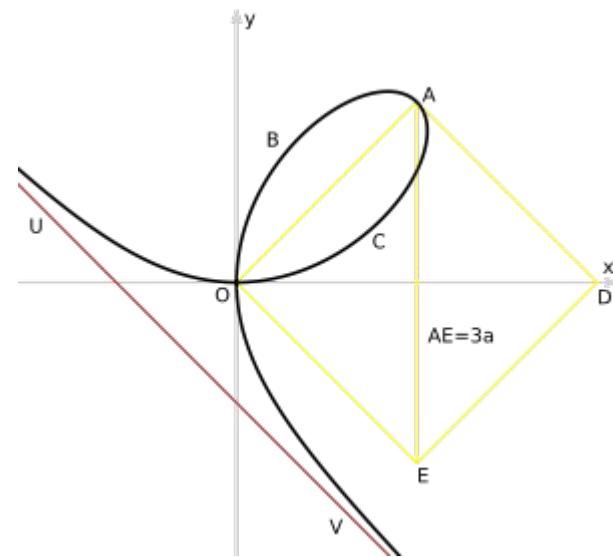
$$S_1 = \frac{l^2}{3} = \frac{3}{2}a^2$$

- Площадь области между асимптотой и кривой равна площади петли

$$S_2 = S_1 = \frac{3}{2}a^2$$

- Объём тела, образованного при вращении дуги ACO вокруг оси абсцисс

$$V_1 = \frac{\pi l^3}{27} (\ln 4 - 1)$$

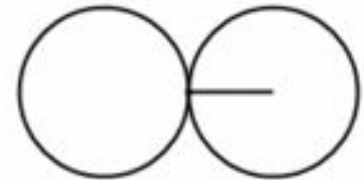


КАРДИОИДА

(греч. *кардіа* [cardia] — сердце)
— плоская линия, которая описывается фиксированной точкой окружности, катящейся по неподвижной окружности с таким же радиусом (частный случай *эпициклоиды*).

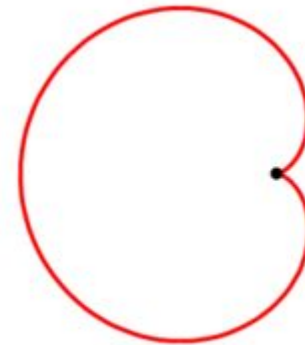
Получила своё название из-за схожести своих очертаний со стилизованным изображением сердца. Задается уравнением:

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$$

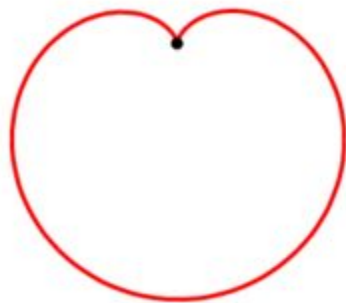


СВОЙСТВА

- Кривая четвёртого порядка.
- Кардиоида имеет один касп.
- Длина дуги одного витка кардиоиды, заданной формулой:
 $r = a(1 - \cos\varphi)$ равна
 $S = 8a$
- Площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, заданной формулой: $r = a(1 - \cos\varphi)$ равна $S = \frac{3}{2}\pi a^2$



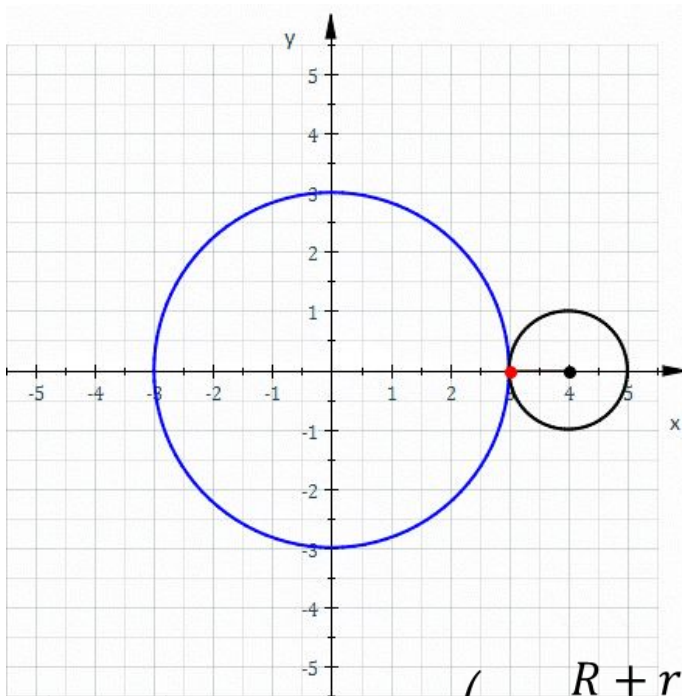
КАСП КАРДИОИДЫ



Касп (*cusp* —
заострение)
или точка возврата —
точка, в которой
кривая линия
разделяется на две
(или более) ветви,
имеющие в этой
точке одинаковый
направляющий
вектор.

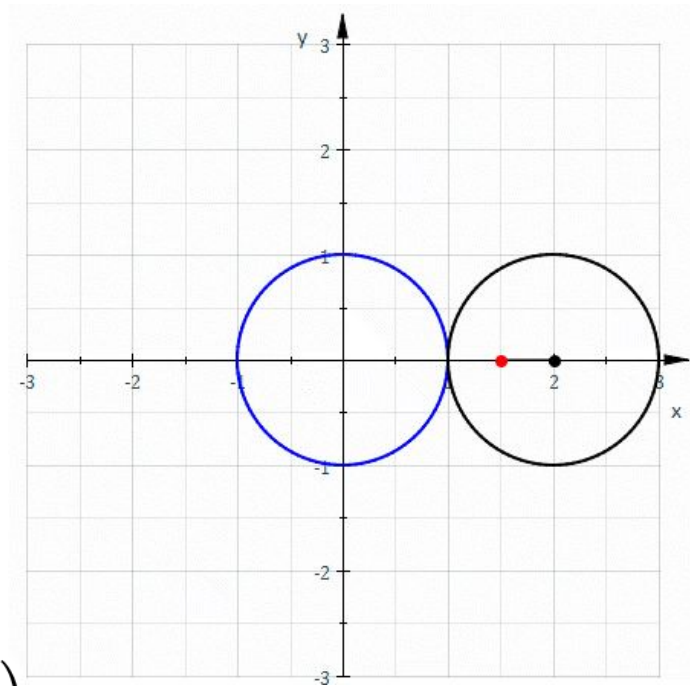
КАРДИОИДА — ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

ЭПИЦИКЛОИДЫ



$$x = (R + r) \cos \varphi - r \sin \left(\alpha + \frac{R + r}{r} \varphi \right)$$
$$y = (R + r) \sin \varphi - r \sin \left(\alpha + \frac{R + r}{r} \varphi \right)$$

УЛИТКИ ПАСКАЛЯ



$$(x^2 + y^2 + ay)^2 = \ell^2(x^2 + y^2)$$

$$\rho = \ell - a \sin \varphi$$

ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ

— плоская алгебраическая кривая, определяется как геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами.

Если расстояние между фокусами равняется $2c$ расположены они на оси OX , и начало координат делит отрезок между ними пополам, то следующие уравнения задают лемнискату:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$$



СВОЙСТВА

- Кривая является геометрическим местом точек, симметричных центру равносторонней гиперболы относительно её касательных.
- Отрезок биссектрисы угла между фокальными радиусами - векторами точки лемнискаты равен отрезку от центра лемнискаты до пересечения её оси с этой биссектрисой.
- Материальная точка, движущаяся по лемнискате под действием однородного гравитационного поля, пробегает дугу за то же время, что и соответствующую хорду (см. рисунок). Предполагается, что ось лемнискаты составляет угол 45° вектором напряжённости поля, а центр лемнискаты совпадает с исходным положением движущейся точки.
- Перпендикуляр, опущенный из фокуса лемнискаты на радиус-вектор какой-либо её точки, делит площадь соответствующего сектора пополам.



ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ — ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ОВАЛА КАССИНИ

Овал Кассини — кривая, являющаяся геометрическим местом точек, произведение расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату некоторого числа a .

Частным случаем овала Кассини при фокусном расстоянии равном $2a$ является лемниската Бернулли. С другой стороны, сам овал является частным случаем лемнискаты.

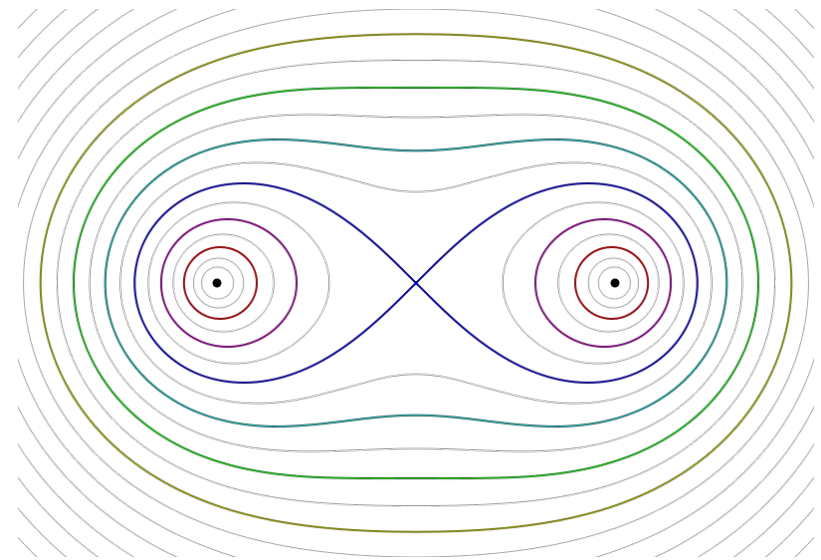
Расстояние между фокусами $2c$.

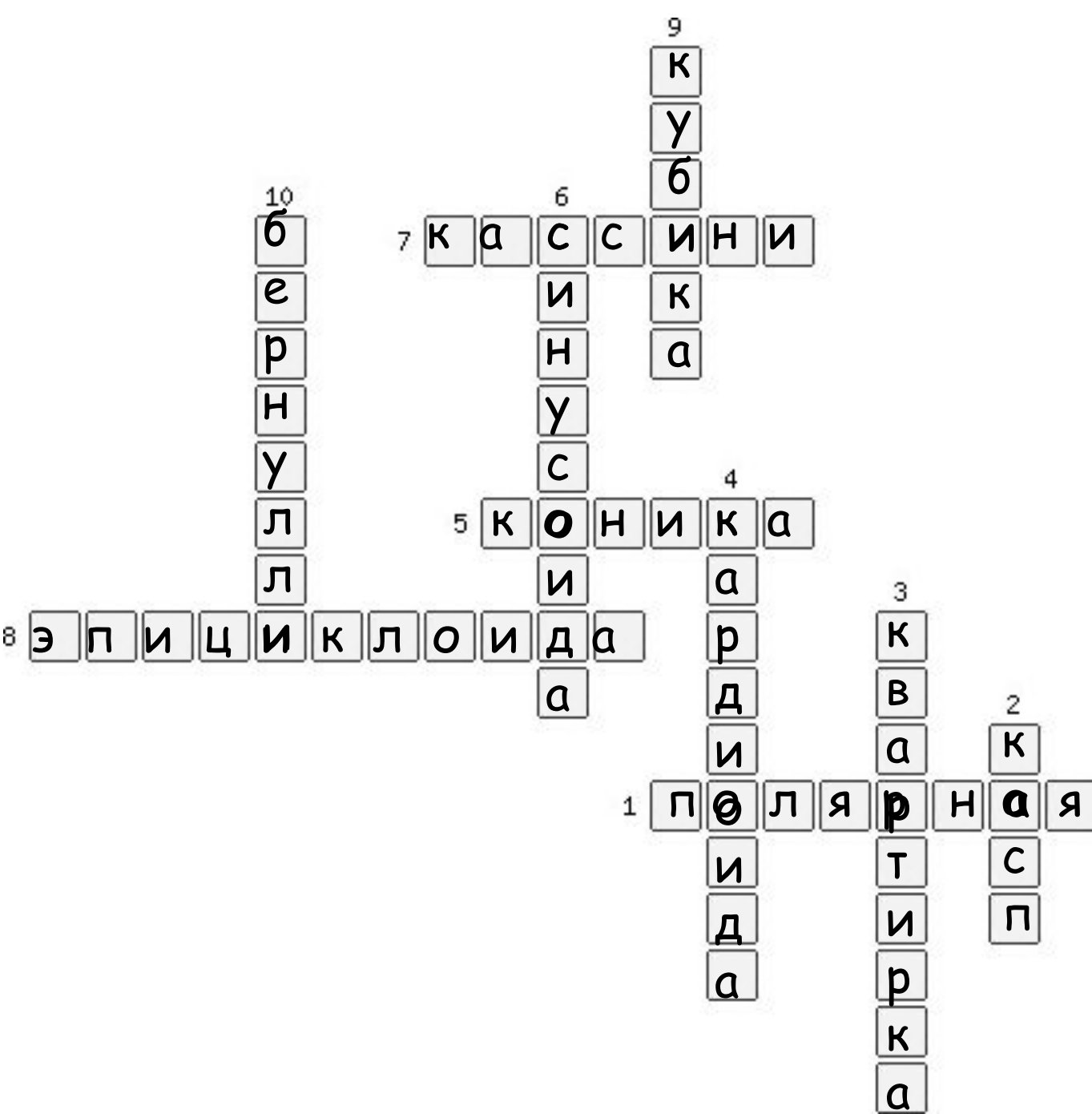
В прямоугольных координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$$

ОВАЛЫ КАССИНИ

($a = 0.6c, 0.8c, c, 1.2c, 1.4c, 1.6c$)





• [Вопрос 1](#) Отв. 1

• [Вопрос 2](#) Отв. 2

• [Вопрос 3](#) Отв. 3

• [Вопрос 4](#) Отв. 4

• [Вопрос 5](#) Отв. 5

• [Вопрос 6](#) Отв. 6

• [Вопрос 7](#) Отв. 7

• [Вопрос 8](#) Отв. 8

• [Вопрос 9](#) Отв. 9

• [Вопрос 10](#) Отв. 10

ДЕКАРТОВ ЛИСТ

Чтобы построить декартов лист с диаметром петли l , проведем окружность A радиуса $AO = l$ ($\odot (AO = l)$)

и какую-либо прямую GH , параллельную AO . ($GH \parallel AO$)

Далее проведем прямые AA' и OE , перпендикулярные AO , ($AA' \perp AO, OE \perp AO$)

и отметим точки A', E их пересечения с GH . ($A', E \in GH$)

Наконец, отложим на луче OA отрезок $OF = 3OA$ ($OF = 3OA$) и проведем прямую FE . (FE)

Через O проводим любую прямую ON и через точку N , где эта прямая пересекает (вторично) окружность, проводим $NQ \parallel AA'$. Точку Q , где NQ пересекает прямую OF , соединяем с A' и отмечаем точку K , где QA' пересекает FE .

Проводим прямую AK до пересечения с прямой GH в точке Q' . Наконец, откладываем на прямой OA отрезок OP , равный и равнонаправленный с отрезком $A'Q'$. Прямая M_1M_2 , проведенная через P параллельно AA' , пересечет прямую ON в точке M_1 . Эта точка (а также точка M_2 , симметричная ей относительно AO)

$$N \in \odot: ON$$

$$Q \in OF: NQ \parallel AA'$$

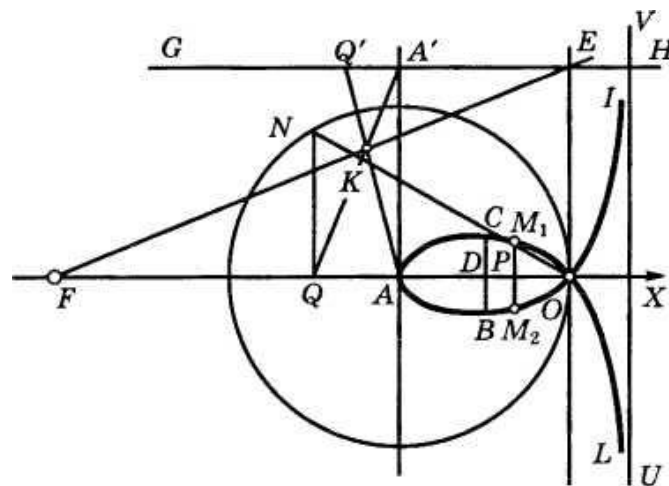
$$K = QA' \cap FE$$

$$Q' = AK \cap GH$$

$$P: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{A'Q'}$$

$$M_1 \in ON: M_1P \parallel AA'$$

$$M_2 \in M_1P: M_1P = M_2P$$



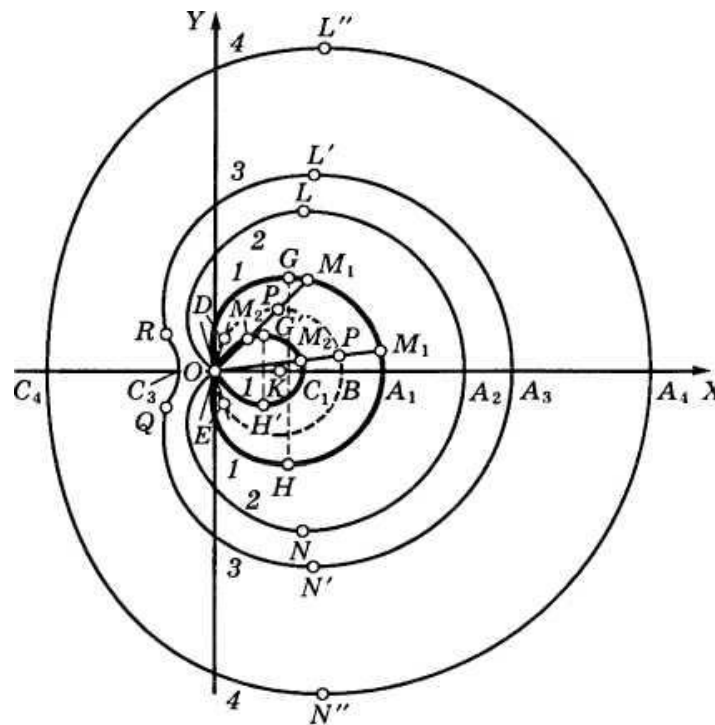
КАРДИОИДА

Даны: точка O (полюс), окружность K диаметра $OB = a$, проходящая через полюс (основная окружность; она показана на чертеже пунктиром).

Из полюса O проводим произвольную прямую OP .

От точки P , где прямая OP вторично пересекает окружность, откладываем в обе стороны от P отрезки $PM_1 = PM_2 = a$.

Геометрическое место точек M_1, M_2 (L на рис) называется кардиоидой.



ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ

Способ (К. Маклорена).
Строим (см. рис.)
окружность радиуса $\frac{c}{\sqrt{2}}$ с
центром в точке F_1 (или
 F_2). Проводим
произвольную секущую
 ORQ и откладываем на
этой прямой в обе стороны
от точки O отрезки OM и
 OM_1 , равные хорде PQ .
Точка M опишет одну из
петель лемнискаты, точка
 M_1 — другую.

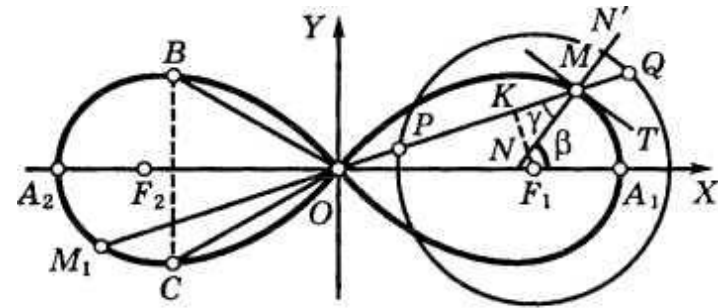


Рис. 493

ВОПРОС 1

Двухмерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — ... углом и ... радиусом.

< [к кроссворду](#)

ВОПРОС 2

Точка, в которой кривая линия разделяется на две (или более) ветви, имеющие в этой точке одинаковый направляющий вектор.

< [к кроссворду](#)

ВОПРОС 3

Алгебраическая кривая степени $n=4$.

< к кроссворду

ВОПРОС 4

Плоская линия, которая описывается фиксированной точкой окружности, катящейся по неподвижной окружности с таким же радиусом.

< [к кроссворду](#)

ВОПРОС 5

Алгебраическая кривая степени $n=2$.

< к кроссворду

ВОПРОС 6

Плоская кривая задаваемая графиком функции $y = \sin x$.

[<к кроссворду](#)

ВОПРОС 7

Лемниската Бернулли — частный случай овала .?.

[<к кроссворду](#)

ВОПРОС 8

Плоская кривая, образуемая фиксированной точкой окружности, катящейся по внешней стороне другой окружности без скольжения.

< [к кроссворду](#)

ВОПРОС 9

Алгебраическая кривая степени $n=3$.

<к кроссворду

ВОПРОС 10

Ученый первый исследовавший
лемнискату.

< к кроссворду