

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ  
З ДИСЦИПЛІНИ «ОСНОВИ ТЕОРІЇ СПОРУД»**

**Задача № 3. Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок**

Для трьох заданих схем завантаження балок потрібно побудувати епюри поперечних сил  $Q$  і згинальних моментів  $M$ .

Числові дані беруться з табл. 3, розрахункові схеми – за рис. 6.

## Числові дані до задачі №3

Номер строки		Сила		Момент		Довжина ділянки <i>a</i> , м	Інтенсивність розподіленого навантаження <i>q</i> , кН/м
		<i>F</i> <sub>1</sub> , кН	<i>F</i> <sub>2</sub> , кН	<i>m</i> <sub>1</sub> , кН·м	<i>m</i> <sub>2</sub> , кН·м		
1	1	40	90	10	10	1	10
2	2	45	80	12	10	1,5	15
3	3	50	85	15	14	2	20
4	4	35	70	12	12	1	10
5	5	50	80	10	15	2	10
6	6	60	70	10	12	1	15
7	7	45	60	12	10	1,5	20
8	8	35	65	10	10	1	10
9	9	40	75	13	10	1	10
0	10	30	90	18	12	2	15

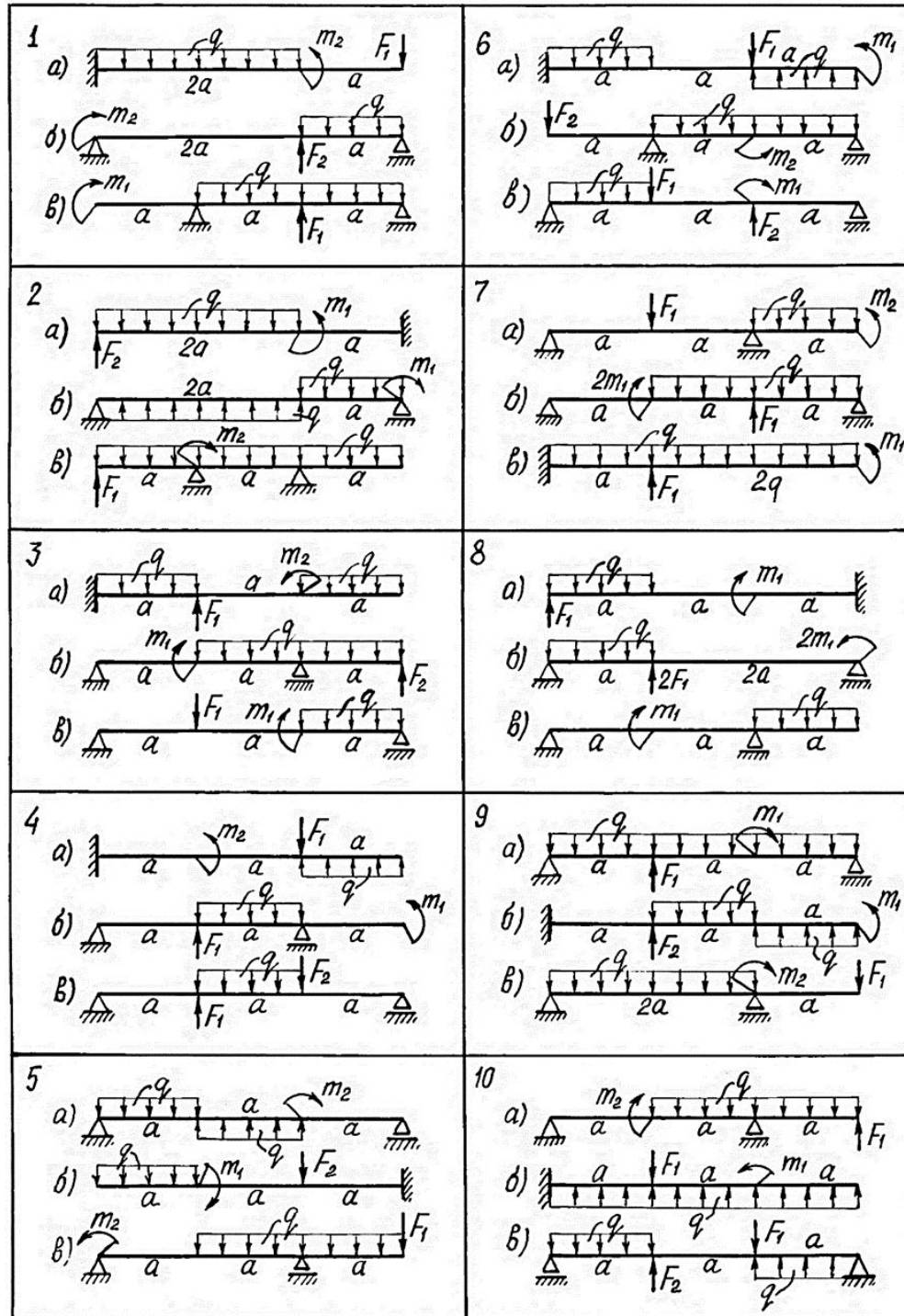


Рис.6  
 Розрахункові  
 схеми балок до  
 задачі № 3.

## Методичні вказівки до рішення задачі № 3

### *Основні теоретичні відомості та розрахункові формули*

При згинанні в поперечному перерізі бруса, який в цьому випадку називається балкою, виникають два внутрішні зусилля: поперечна сила  $Q$  і згинальний момент  $M_z$ .

**Поперечною силою** в перерізі називається внутрішнє зусилля, чисельно рівне алгебраїчній сумі проєкцій всіх сил, що діють на балку з одного боку від перерізу, на нормаль до осі балки. Поперечна сила вважається додатною, якщо вона прагне обертати нескінченно малий елемент балки за ходом годинникової стрілки. Зворотний напрямок обертання відповідає від'ємній поперечній силі (рис. 7).

**Згинальним моментом** в перерізі балки називається внутрішнє зусилля, чисельно рівне алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на балку з одного боку від перерізу, відносно її центра ваги. Згинальний момент додатний, якщо під його впливом балка згинається опуклістю вниз; при вигині опуклістю вгору згинальний момент вважається від'ємним (рис. 8). Епюра згинальних моментів будується з боку розтягнутого волокна балки, яке знаходиться з випуклої частини балки. Додатні значення згинального моменту відкладаються вниз від осі епюри, від'ємні – вгору.

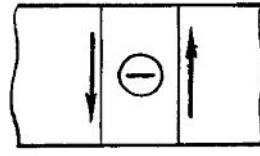
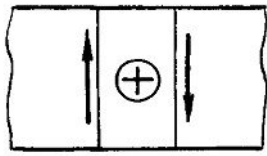


Рис. 7. Правило знаків для поперечної сили

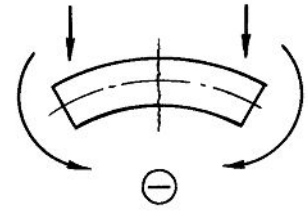
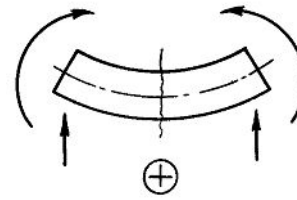


Рис. 8. Правило знаків для згинального моменту

Розв'язок задач, пов'язаних з розрахунками балок на міцність і жорсткість, вимагає побудови графіків зміни внутрішніх зусиль за довжиною бруса – епюр поперечних сил і згинальних моментів. Метою побудови епюр при розрахунках на міцність є наочне уявлення зміни внутрішніх зусиль в перерізі в залежності від його положення і визначення найбільш навантажених (напружених) ділянок балки.

Для того щоб встановити закон зміни внутрішніх зусиль за довжиною балки, вибирається прямокутна система координат, вісь абсцис  $x$  спрямовується уздовж осі балки, а осі  $y, z$  об'єднуються з головними центральними осями інерції поперечного перерізу. Потім записуються аналітичні вирази для поперечної сили і згинального моменту у вигляді функцій від абсциси  $x$ , що визначає положення перерізу, що розглядається. Склавши рівняння  $Q(x)$  і  $M_z(x)$ , абсцисі надають послідовно конкретних значень і обчислюють величини  $Q$  і  $M_z$ , відкладаючи їх у прийнятому масштабі від осі епюри вгору або вниз, будуючи таким чином графіки функцій  $Q(x)$  і  $M_z(x)$  – епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Розглянемо *другий метод побудови епюр* внутрішніх зусиль, що діють в перерізах балки. Він полягає в тому, що поперечні сили і згинальні моменти обчислюються на границях ділянок без запису рівнянь  $Q(z), M(z)$ , а відповідні епюри будуються на підставі диференціальних залежностей між  $Q, M, q$ :

$$\begin{matrix} \square\square \\ \square\square \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} \square\square\square\square \\ \square\square\square\square \end{matrix}}{\begin{matrix} \square\square\square\square \\ \square\square\square\square \end{matrix}}; \quad \begin{matrix} \square\square \\ \square\square \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} \square\square\square\square \\ \square\square\square\square \end{matrix}}{\begin{matrix} \square\square\square\square \\ \square\square\square\square \end{matrix}} = \frac{\begin{matrix} \square\square^2\square\square \\ \square\square\square\square^2 \end{matrix}}{\begin{matrix} \square\square\square\square \\ \square\square\square\square \end{matrix}} \quad (3.1)$$

Залежності (3.1) дозволяють встановити такі характерні особливості епюр поперечних сил і згинальних моментів:

На ділянках, де немає розподіленого навантаження, еюра  $Q$  обмежена прямими, паралельними осі балки, а еюра  $M$  – похилими прямими (рис. 9,  $a$  –  $Q > 0$  і рис. 9,  $b$  –  $Q < 0$ ).

На ділянках, де прикладено рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q$ , еюра  $Q$  обмежена похилими прямими, а еюра  $M$  – квадратними параболою, опуклість яких спрямована за вектором рівномірно розподіленого навантаження (рис. 10,  $a$  і  $b$ ).

На ділянках, де  $Q > 0$ , згинальний момент зростає (рис. 10,  $a$ ); якщо  $Q < 0$  – згинальний момент спадає (рис. 10,  $b$ ).

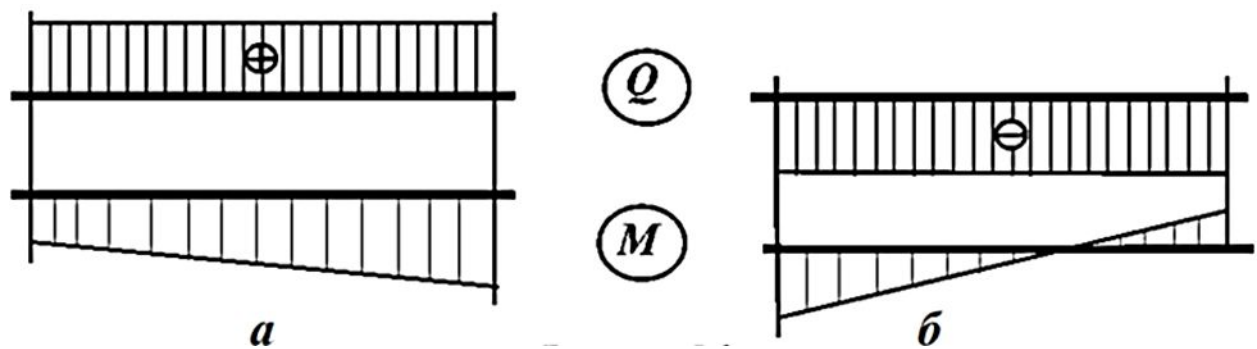


Рис. 9

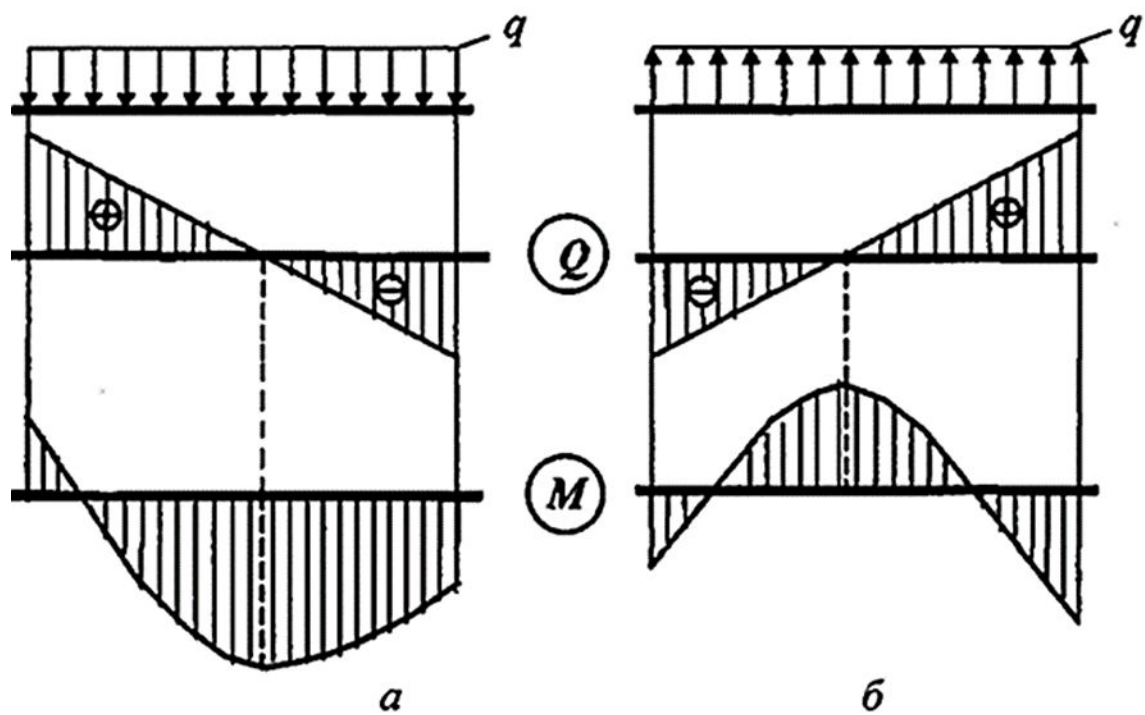


Рис. 10

У перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили, на епюрі  $Q$  будуть скачки на величину прикладених сил, а на епюрі  $M$  – переломи, вістря яких спрямоване за напрямком цих сил (рис. 11).

У перерізах, де до балки прикладені пари сил (зосереджені моменти), на епюрі  $M$  будуть скачки на величину цих моментів (рис. 12). При цьому лінії епюр  $M$  до стрибка і після нього паралельні, а на епюрі  $Q$  змін не буде. Відзначимо, що якщо в одному перерізі прикладені і сила, і момент то сила викликає перелом і порушує паралельність.

Якщо на ділянці балки є рівномірно розподілене навантаження і епюра  $Q$  в межах ділянки змінює знак, то в перерізі, де  $Q = 0$ , на епюрі  $M_z$  буде екстремум (рис. 10, а і б).

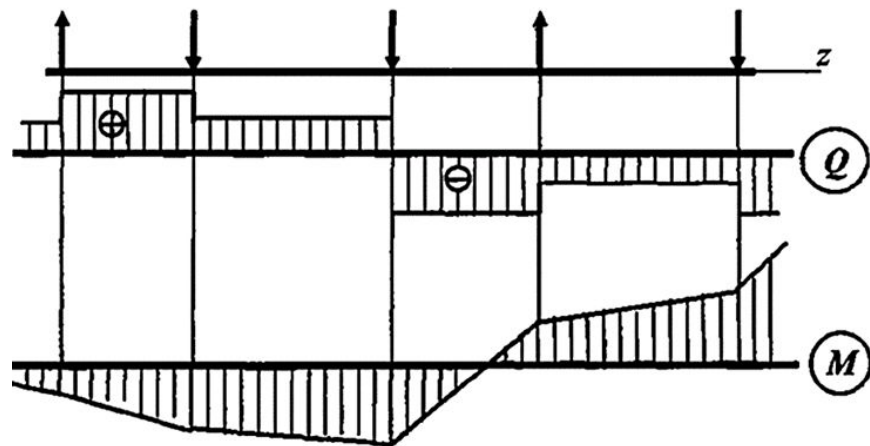


Рис. 11

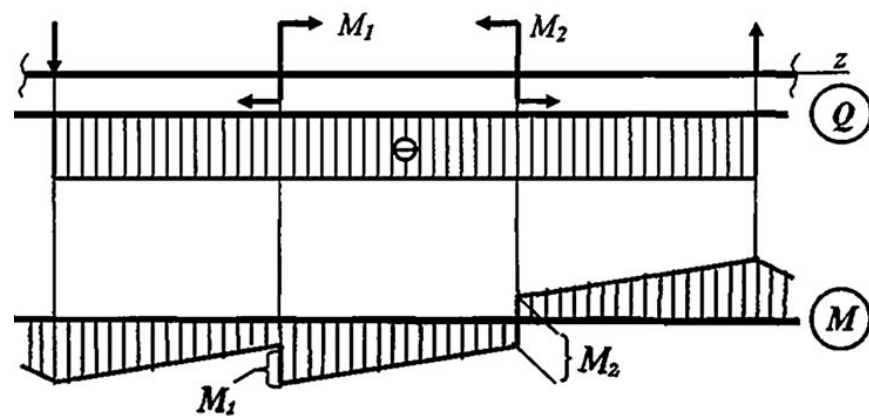


Рис. 12



Якщо на кінці консолі або в кінцевій опорі до балки прикладений зосереджений момент, то в цьому перерізі згинальний момент рівний зовнішньому моменту (рис. 13, переріз С).

Якщо ж у шарнірній опорі зовнішній момент відсутній, то в ній згинальний момент  $M = 0$  (рис. 13, переріз В), що має місце в більшості випадків.

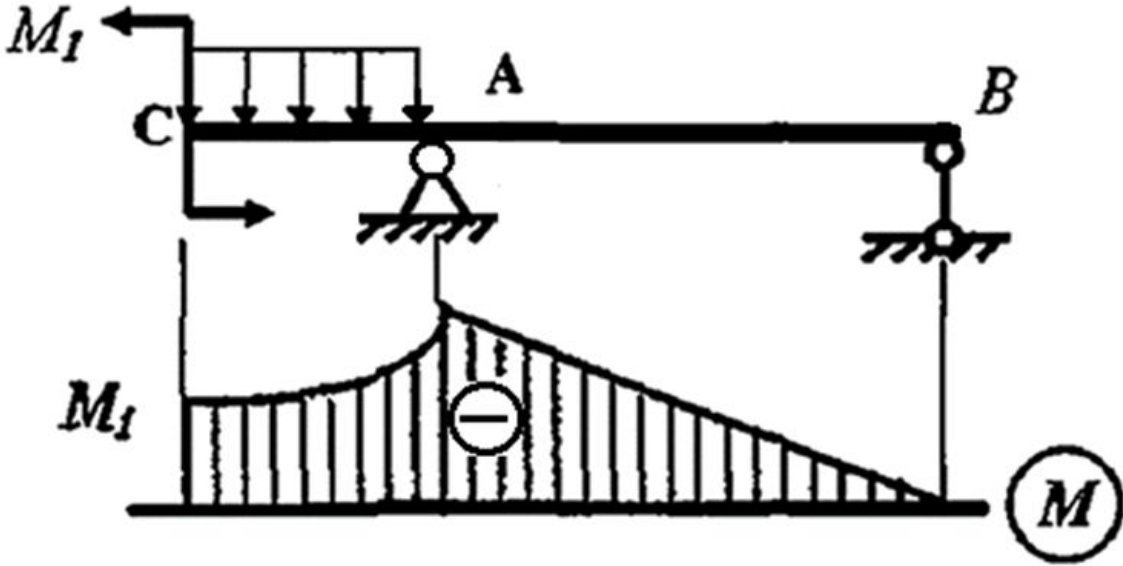


Рис. 13

### Приклад рішення задачі №3

Потрібно побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки зображеної на рис. 14 ( $a = 1$  м;  $q = 10$  кН/м).

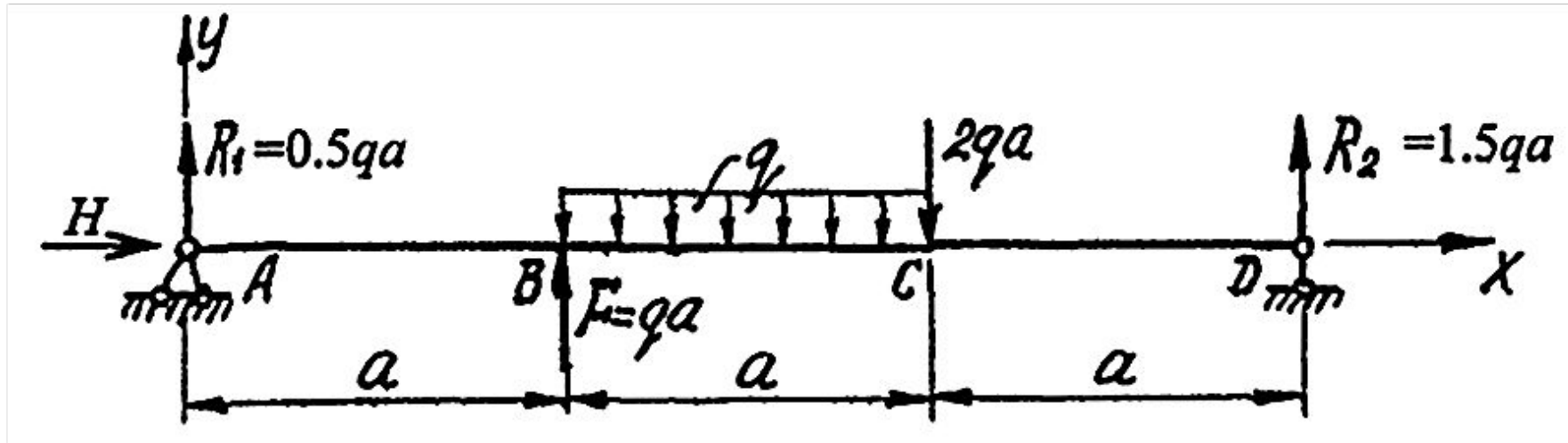


Рис. 14. Розрахункова схема балки

### 1. Визначення опорних реакцій.

На схемі показуємо опорні реакції  $R_1$ ,  $H$ ,  $R_2$ . Вертикальні реакції спрямовуємо вгору і записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; \quad H = 0;$$

$$\sum M_D = 0; \quad R_1 \cdot 3a + qa \cdot 2a - qa \cdot 1,5a - 2qa \cdot a = 0;$$

Звідки  $R_1 = 0,5qa$ .

$$\sum M_A = 0; \quad R_2 \cdot 3a - 2qa \cdot 2a - qa \cdot 1,5a + qa \cdot a = 0;$$

Звідки  $R_2 = 1,5qa$ .

Перевіримо правильність обчислень, склавши ще одне рівняння рівноваги

$$\sum Y = 0; \quad 0,5qa + qa - qa - 2qa + 1,5qa = 0.$$

Умова рівноваги задовольняється, опорні реакції визначені правильно.

## 2. Побудова епюри $Q$ .

Подумки розбиваємо балку на ділянки. Границями ділянок є перерізи, в яких до балки прикладені зосереджені сили або пари сил, починаються або закінчуються розподілені навантаження, є проміжні шарніри. У розглянутій балці граничними перерізами будуть перерізи  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$ . Для кожної з трьох ділянок напишемо аналітичний вираз  $Q(x)$ .

**Ділянка  $AB$ ,  $0 < x < a$ .** Розглянемо довільно вибраний переріз з абсцисою  $x$ . Розсікаючи балку в цьому перерізі на дві частини і відкинувши праву частину, обчислюємо алгебраїчну суму проєкцій на вісь  $y$  всіх сил, що діють зліва від перерізу:

$$Q(x) = R_1 = 0,5qa.$$

Поперечна сила не залежить від змінної  $x$  на протязі всієї ділянки, отже, епюра  $Q$  обмежена прямою, паралельною осі абсцис. Відклавши від осі епюри вгору в обраному масштабі  $0,5qa$  (рис.15), будуємо епюру на цій ділянці.

**Ділянка BC**,  $a < x < 2a$ . Алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на вісь  $y$  зліва від перерізу з абсцисою  $x$

$$Q(x) = 0,5qa + qa - q(x - a) = 1,5qa - q(x - a).$$

Отриманий вираз є рівнянням похилої прямої, яку можна побудувати за двома точками. Для її побудови знайдемо значення поперечної сили на границях ділянок балки

$$x = a, Q(a) = 1,5qa; \quad x = 2a, Q(2a) = 0,5qa.$$

**Ділянка CD**,  $2a < x < 3a$ . Поперечна сила на відстані  $x$  від початку координат

$$Q(x) = 0,5qa + qa - qa - 2qa = -1,5qa.$$

Так як поперечна сила не залежить від змінної, на останній ділянці епюра  $Q$  обмежена прямою, паралельною осі балки (див. рис. 15).

### 3. Побудова епюри $M_z$

Аналітичний вираз для обчислення згинального моменту в перерізі  $x$  необхідно записати для кожної ділянки балки.

**Ділянка AB:**

$$M_z(x) = 0,5qax.$$

На цій ділянці балки згинальний момент зростає за лінійним законом і епюра  $M_z$  обмежена похилою прямою. Обчислюючи його значення в перерізах на границях ділянки, будемо в масштабі (рис. 1 5) епюру  $M_z$  на розтягнутому волокні

$$x = 0, M_z(0) = 0; \quad x = a, M_z(a) = 0,5qa^2.$$

**Ділянка BC:**

$$M_z(x) = 0,5qax + qa(x - a) - 0,5q(x - a)^2.$$

Отримане рівняння є рівнянням квадратної параболи і, оскільки поперечна сила  $Q$  на ділянці  $BC$  не змінює знак, екстремуму на епюрі  $M_z$  не буде.

Визначимо згинальний момент на межі ділянки:

$$x = a, \quad M_z(a) = 0,5qa^2;$$

$$x = 2a, \quad M_z(2a) = 0,5qa \cdot 2a + qa(2a - a) - 0,5q(2a - a)^2 = 1,5qa^2.$$

Відклавши вниз від осі балки знайдені значення, проводимо квадратну параболу опуклістю вниз.

**Ділянка CD:**

$$M_z(x) = 0,5qax + qa(x - a) - qa(x - 1,5a) - 2qa(x - 2a).$$

В межах останньої ділянки балки ( $2a < x < 3a$ ) згинальний момент лінійно залежить від абсциси  $x$ , і епюра обмежена прямою лінією.

При  $x = 2a$ ,  $M_z(2a) = 1,5qa^2$ , а при  $x = 3a$ ,  $M_z(3a) = 0$ .

Епюри  $Q$  і  $M_z$  показані на рис. 15.

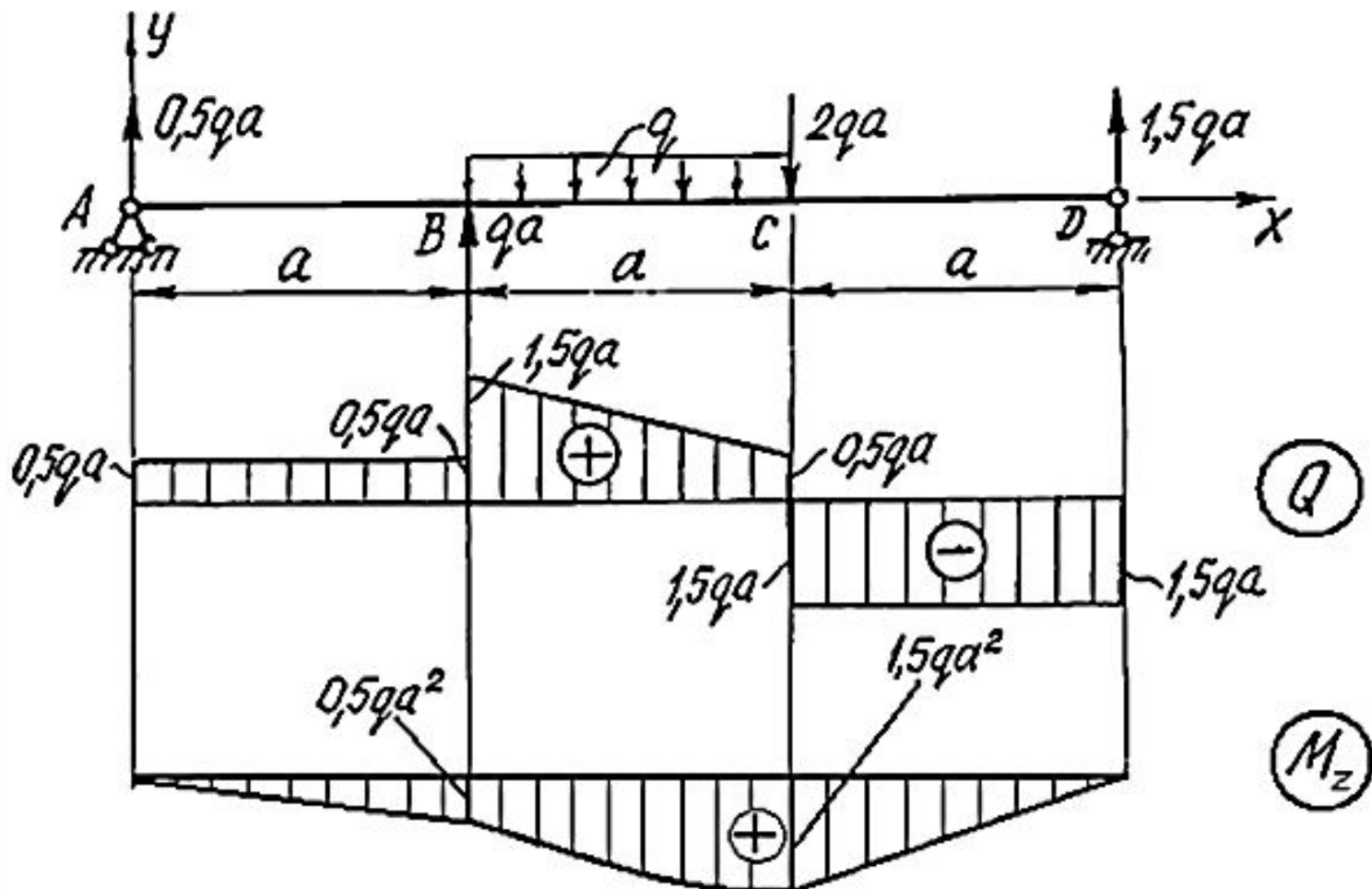


Рис.15. Розрахункова схема балки. Епюри поперечних сил і згинальних моментів

Розглянемо приклад побудови епюр внутрішніх зусиль для консольної балки, зображеної на рис. 16.

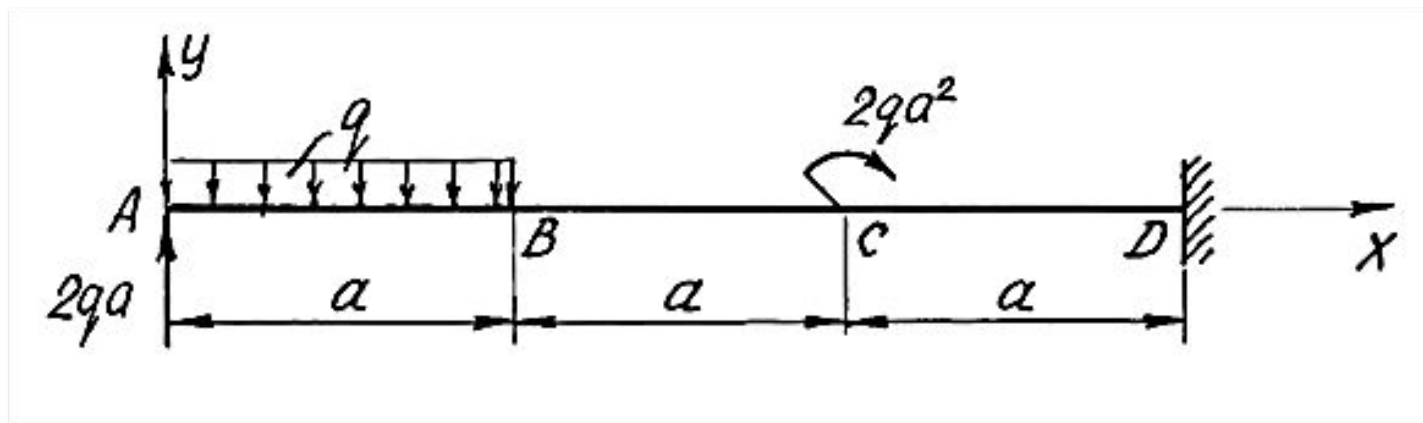


Рис. 16. Розрахункова схема консольної балки

Для побудови епюр  $M$  і  $Q$  розглядаємо три ділянки балки:

$$AB \ (0 \leq x \leq a), \ BC \ (a \leq x \leq 2a), \ CD \ (2a \leq x \leq 3a).$$

Для того щоб не обчислювати опорні реакції, розглянемо балку, починаючи з ділянки  $AB$ . Знайдемо поперечну силу і згинальний момент на початку цієї ділянки. Подумки розсічемо балку в перерізі  $A$  на дві частини і відкинемо праву її частину. Зліва на решту діє тільки зосереджена сила, рівна  $2qa$ . Проектуючи цю силу на нормаль до осі балки, отримуємо

$$Q(0) = 2qa.$$

Розсікаючи балку в перерізі  $B$  аналогічно, знаходимо величину поперечної сили в цьому перерізі – вона дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій сил, що діють на ліву частину балки, на нормаль до її осі:

$$Q(a) = 2qa - qa = qa,$$

де  $2qa$  – проєкція зосередженої сили на нормаль до осі балки;

$qa$  – проєкція рівнодіючої розподіленого навантаження.



Згинальний момент на початку першої ділянки  $M(0)=0$ ; в кінці ділянки він дорівнює алгебраїчній сумі моментів щодо точки  $B$  від зосередженої сили  $2qa$  і розподіленого навантаження:

$$M_z(a) = 2qa \cdot a - 0,5a = 1,5 qa^2.$$

Будуємо епюри  $Q$  і  $M_z$  для першої ділянки балки.

Вибравши масштаб, відкладаємо від осі епюр додатні значення  $Q$  і  $M_z$ . Знайдені значення поперечних сил і згинальних моментів. На епюрі  $Q$  з'єднуємо прямою лінією точки з координатами  $(0, 2qa)$  і  $(a, qa)$ , а на епюрі  $M_z$  проводимо квадратну параболу опуклістю вниз через точки  $(0, 0)$  і  $(a, 1,5qa^2)$  (див. рис. 17).

Поступаючи аналогічно, обчислюємо поперечні сили і згинальні моменти на початку і кінці ділянок  $BC$  і  $CD$ .

**Ділянка  $BC$ :**  $a \leq x \leq 2a$ ;

$$\begin{aligned} Q(a) &= qa, & Q(2a) &= qa; \\ M(a) &= 1,5qa^2, & M(2a) &= 2,5qa^2. \end{aligned}$$

Відклавши обчислені значення  $Q$  і  $M$ , будуємо епюри внутрішніх зусиль на другій ділянці балки. Як випливає з диференціальних залежностей, ці епюри обмежені прямими лініями.

**Ділянка  $CD$ :**  $2a \leq x \leq 3a$ ;

$$\begin{aligned} Q(2a) &= qa, & Q(3a) &= qa; \\ M_z(2a) &= 4,5 qa^2, & M_z(3a) &= 5,5 qa^2 \end{aligned}$$

На початку останньої ділянки до балки прикладена пара сил, що викликає появу стрибка на епюрі згинальних моментів. На ділянці  $CD$  розподіленого навантаження немає, тому епюри  $Q$ ,  $M_z$  обмежені прямими лініями (рис. 17).

Остаточний вигляд епюр  $Q$ ,  $M_z$  показаний на рис. 17.

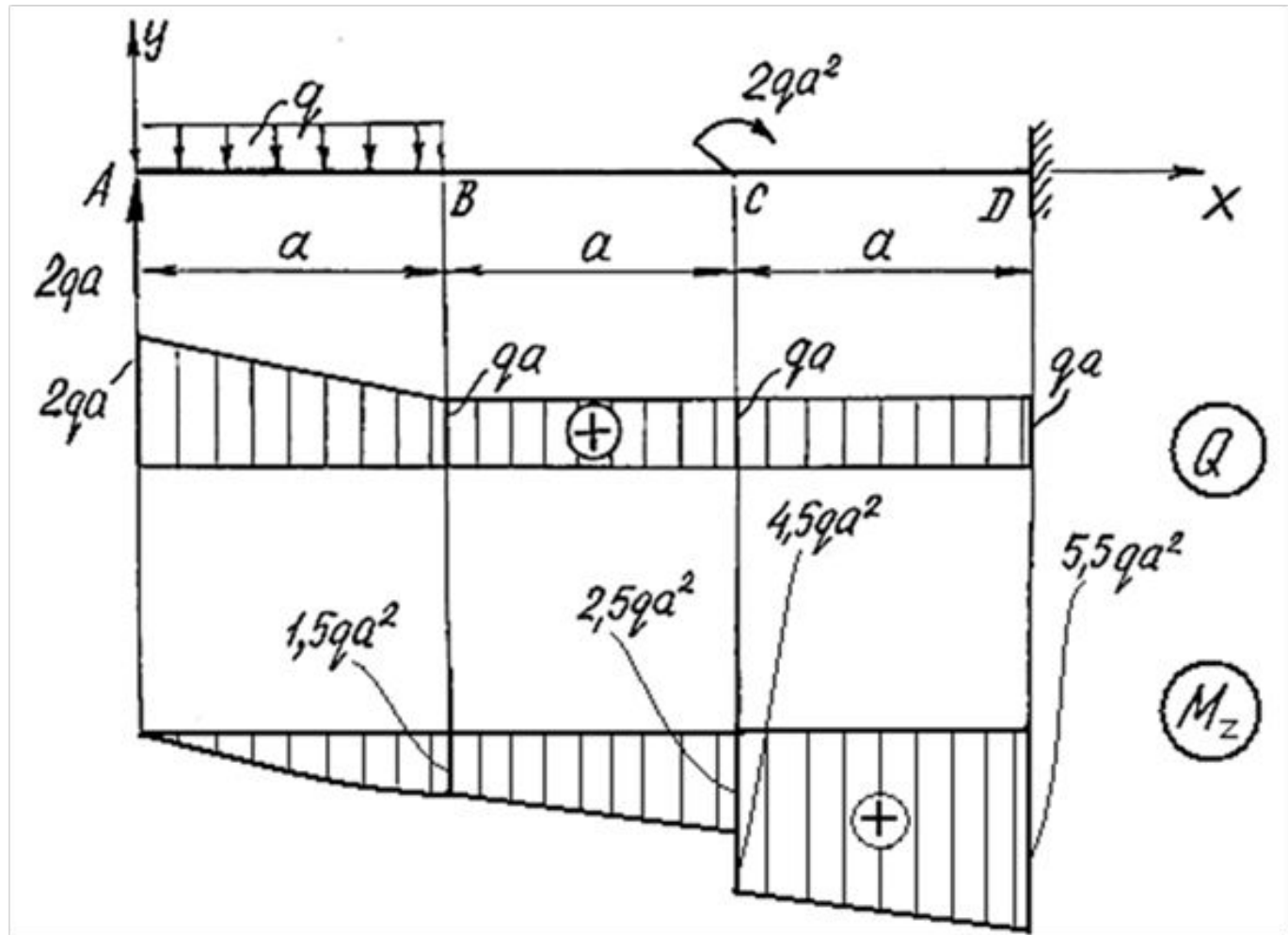


Рис. 17. Розрахункова схема консольної балки. Епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Розглянемо приклад побудови епюр внутрішніх зусиль для однопрогонової консольної балки, зображеної на рис. 18.

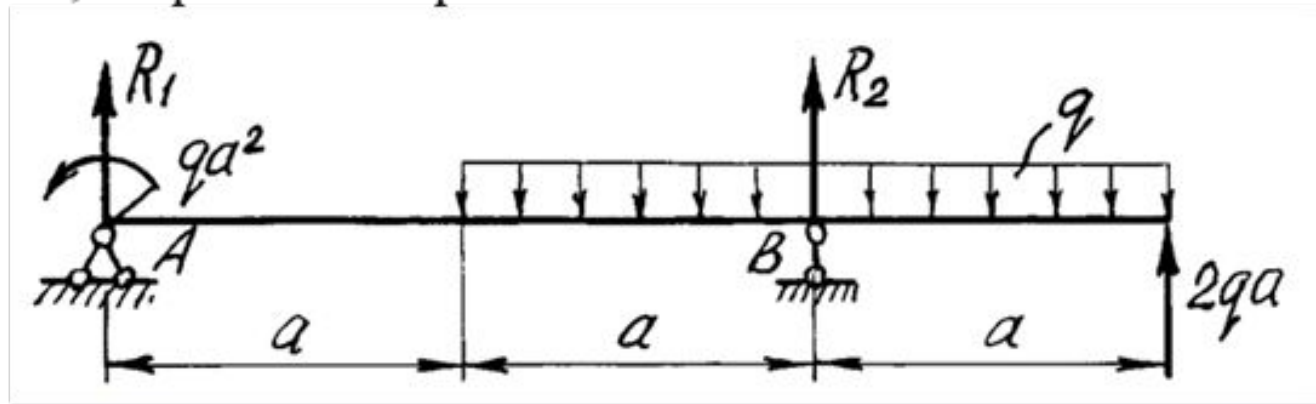


Рис. 18. Розрахункова схема однопрогонової консольної балки

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_B = 0; R_1 \cdot 2a - qa^2 - 2qa \cdot a = 0; R_1 = \frac{3}{2} qa.$$

$$\sum M_A = 0; R_2 \cdot 2a + 2qa \cdot 3a - 2qa \cdot 2a + qa^2 = 0; R_2 = -\frac{3}{2} qa.$$

Відзначимо, що момент від розподіленого навантаження щодо опори B дорівнює нулю, а реакція другої опори R2 спрямована не вгору, як показано на рис. 18, а вниз, оскільки отримали в розрахунку значення R2 зі знаком мінус.

Перевірка правильності обчислення опорних реакцій:

$$\sum Y = 0; \frac{3}{2} qa - 2qa - \frac{3}{2} qa + 2qa = 0$$

Реакції визначені правильно.

Епюри  $Q$ ,  $M_z$  будуються аналогічно епюрам попередніх прикладів. Вигляд епюр показаний на рис. 19.

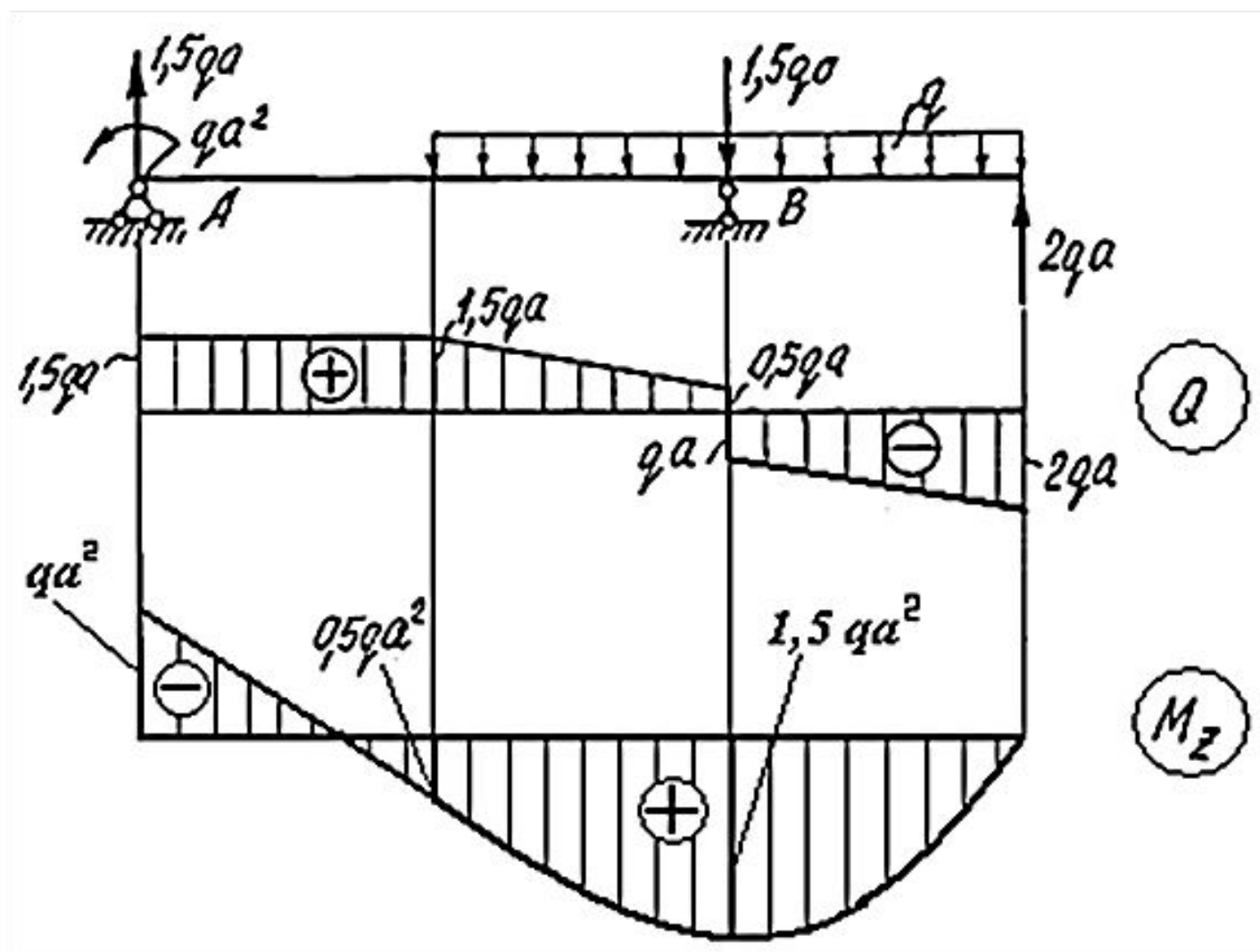


Рис. 19. Розрахункова схема балки. Епюри поперечних сил і згинальних моментів

## *Контрольні питання*

1. Як визначається знак поперечної сили та моменту в поперечному перерізі?
2. Які диференціальні залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження, поперечною силою та згинальним моментом?
3. Як використовуються диференціальні залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження, поперечною силою та згинальним моментом?
4. Чому дорівнює поперечна сила та згинальний момент в перерізі?
5. Який вигляд мають епюри  $M$  і  $Q$  на ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження? Де воно відсутнє?
6. Які особливості епюр  $M$  і  $Q$  в точках прикладання зосереджених сил і статичних моментів?