Физический и геометрический смысл производной. Понятие дифференциала функции.

Рассмотрим физический смысл производной.

Длина пути, пройденного материальной точкой за время t, задана формулой $s(t)$, а длина пути, пройденного точкой за время $t + \Delta t$, вычисляется по формуле $s(t + \Delta t)$. Тогда длина пути в момент времени от t до $t + \Delta t$ определяется разностью $s(t + \Delta t) - s(t)$.

Если эту разность разделить на Δt, то получим среднюю скорость движения точки за время Δt, $v_{\text{сред.}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$. Если найдем предел этого выражения при $\Delta t \to 0$, и, учитывая, что $s = v \cdot t$, то получим

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot (t + \Delta t) - v \cdot t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta t} = v(t).$$

Итак, $v(t) = s'(t)$ — мгновенная скорость движущегося тела в момент времени t. Производная функции $y = f(x)$ в точке x определяет скорость изменения функции в этой точке.

Понятие производной широко используется в современной физике.

Приведем несколько примеров.

1. *Мгновенное ускорение точки* равно $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t)$.

Сила и импульс по второму закону Ньютона связаны соотношением: $F = p'$.

Количество заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника, определяет силу тока: $I = q'$.

В электростатическом поле, изменяющемся только по оси Ox, *напряженность и потенциал* связаны соотношением $E = -\varphi'$.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис.42.1):

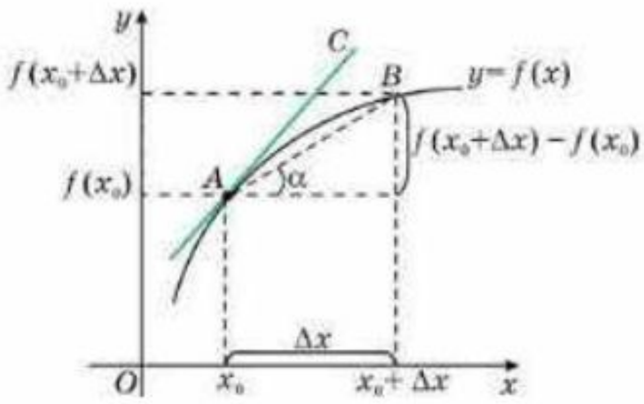


Рис 42.1

Из рисунка 42.1 видно, что для любых двух точек A и B графика функции $y = f(x)$ имеет место равенство: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, где α — угол наклона секущей AB к оси Ox.

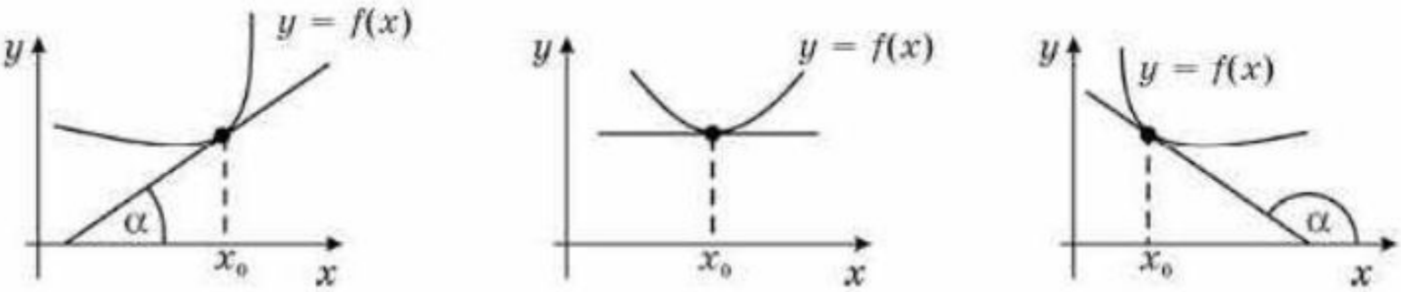
Если зафиксировать точку A и двигать по направлению к ней точку B, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая AB приближается к касательной AC. Следовательно, предел разностного отношения $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ равен угловому коэффициенту касательной в точке с абсциссой A, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Геометрический смысл производной

Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке:

Отсюда следует, что производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке (рис. 42.2).

В этом и состоит геометрический смысл производной.



$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha > 0$ $\quad$ $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = 0$ $\quad$ $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha < 0$

Рис. 42.2

Введем понятие *дифференциал функции*.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на числовом промежутке. Тогда для некоторой точки x этого промежутка имеем: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) = 0$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0$. Это значит, что при $\Delta x \to 0$ $\Delta y - f'(x)\Delta x$ есть бесконечно малая высшего порядка малости, чем Δx. Обозначим ее α. Получим $\Delta y - f'(x)\Delta x = \alpha \cdot \Delta x$.

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $f'(x)\Delta x$ — главная линейная часть приращения. Она называется *дифференциалом функции в точке* x и обозначается $dy = f'(x)\Delta x$.

Определение. ***Дифференциалом** dy **функции в точке** x называется главная линейная часть $f'(x)\Delta x$ приращения $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.*

$dy = f'(x)\Delta x$ — определение дифференциала.

Установим связь dx и Δx при $\Delta x \to 0$. Для этого найдем дифференциал функции $y = x$. Получим $dy = x'\Delta x$, или $dy = \Delta x$. Поскольку $y = x$, то $dx = \Delta x$.

Получили важную формулу для нахождения дифференциала функции:

$df = f'(x)dx$ — формула для нахождения дифференциала функции.

ПРИМЕР

2. Найдем дифференциал функции $f(x) = x^3$.

Решение. Применим формулу $df = f'(x)dx$, получим $df(x) = 3x^2dx$.

Ответ: $3x^2dx$.

Рассмотрим применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Вы знаете, что приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Отбросим бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$, получим приближенное равенство $\Delta y \approx dy$. Это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

$\Delta y \approx dy$ — формула для вычисления приближенного приращения любой дифференцируемой функции.

Формула $\Delta y \approx dy$ широко применяется в вычислительной практике, так как дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции.

ПРИМЕР

3. Найдем приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Решение. Применим формулу: $\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x$.

$dy = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x = (3 \cdot 2^2 - 2) \cdot 0{,}001 = 10 \cdot 0{,}001 = 0{,}01$.

Получим $\Delta y \approx 0{,}01$.

Найдем допущенную погрешность, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем Δy:

$\Delta y = ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 = \Delta x\,(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2)$;

$\Delta y = \Delta x\,(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2) = 0{,}001 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 - 2) = 0{,}010\,006$.

Абсолютная погрешность приближения равна $|\Delta y - dy| = |0{,}010\,006 - 0{,}01| = 0{,}000\,006$. Как видим, равенство $\Delta y \approx dy$ позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Чтобы получить формулу для вычислений приближенных значений функций, подставим в равенство $\Delta y \approx dy$ значения Δy и dy, получим

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \text{ или } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ — формула для вычисления приближенных значений функций.

Выведем формулу для вычисления приближенного значения функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 1 + \Delta x$.

$\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$ — формула для вычисления приближенного значения функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 1 + \Delta x$.

Доказательство. Воспользуемся формулой $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$. По условию $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда $f(1) = 1$. Найдем производную функции и ее значение при $x = 1$. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ и $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Следовательно, по формуле получим $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$.

ПРИМЕР

4. Вычислим приближенно $\sqrt{25,75}$.

Решение. $\sqrt{25,75} = \sqrt{25 + 0,75} = \sqrt{25 \cdot (1+0,03)} = 5 \cdot \sqrt{1 + 0,03} \approx$
$\approx 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,03\right) = 5,075.$

Ответ: 5,075.

Домашнее задание:

Посмотреть видео и презентацию

Выписать определения, теоремы и формулы

Решить задачи №42.1 (1-3), №42.2 (1-2), № 42.3 (1-3)

42.1. Найдите производную функции в указанной точке, используя определение. Дайте геометрическое и физическое истолкование полученного результата:

1) $y = 2 + \frac{3x+1}{5x+1}$ при $x = 4$;
2) $y = \frac{x^2+2}{2x+3} - 3$ при $x = 1$;

3) $y = \frac{x-2}{x+4}$ при $x = 7$;
4) $y = \frac{x^2+1}{2x^2+3x}$ при $x = 3$;

5) $y = x^3 - 7$ при $x = 3$;
6) $y = \frac{x^3}{3(x+1)^2} - 5{,}2$ при $x = 1$.

42.2. 1) Точка движется по прямой по закону $s = 5t^2 - 4t + 4$, где s — длина пути, измеряемая в метрах, t — время в секундах. Найдите мгновенную скорость при $t = 2$ *с* и среднюю скорость точки за время от $t = 2c$ до $t_1 = 2 + \Delta t$, считая $\Delta t = 0{,}5$.

2) Закон движения точки по прямой задан формулой $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$ (s измеряется в метрах, t — в секундах). В какие моменты времени скорость точки равна нулю?

42.3. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y(x)$, проходящей через точку A:

1) $y = 2x^2 - x - 5$, $A(-1; -2)$;

2) $y = 0{,}2x^2 + 2x - 4$, $A(2; 0{,}8)$;

3) $y = -3x^2 - x + 5$, $A(-2; -5)$;