

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МЕРЫ

§1. Алгебры и σ -алгебры множеств

1. Определение. Пусть S – произвольное множество. Алгеброй подмножеств множества S называется множество Σ некоторых его подмножеств, удовлетворяющее условиям:

$$(*) \quad \emptyset, S \in \Sigma.$$

$$(**) \quad \text{Если } A, B \in \Sigma, \text{ то } A \cup B, A \cap B, A \setminus B, S \setminus A \in \Sigma.$$

Алгебра подмножеств Σ множества S называется σ -алгеброй подмножеств множества S , если выполнено условие:

$$(***) \quad \text{Если } A_k \in \Sigma \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \text{ то } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma \text{ и } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma.$$

Из равенств $A \setminus B = A \cap (S \setminus B)$, $A \cap B = S \setminus [(S \setminus A) \cup (S \setminus B)]$ следует, что в условии (***) достаточно оставить $A \cup B$ и $S \setminus A \in \Sigma$, а в условии (*) – только $\emptyset \in \Sigma$ или только $S \in \Sigma$. В условии (***) можно оставить $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ или $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$, так как

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = S \setminus \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (S \setminus A_k) \right], \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = S \setminus \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} (S \setminus A_k) \right].$$

Кроме того, $A \cup B = A \cup B \cup B \cup \dots$ и $A \cap B = A \cap B \cap B \cap \dots$. Поэтому из (***) следует, что $A \cup B \in \Sigma$ и $A \cap B \in \Sigma$, если $A, B \in \Sigma$. Таким образом, определение σ -алгебры можно сократить:

2. Определение. Множество Σ подмножеств множества S называется σ -алгеброй подмножеств множества S , если выполнены условия:

(1) $\emptyset \in \Sigma$.

(2) Если $A \in \Sigma$, то $S \setminus A \in \Sigma$.

(3) Если $A_k \in \Sigma$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

3. Примеры алгебр и σ -алгебр.

(α) Множество $\{\emptyset, S\}$ – наименьшая алгебра (и σ -алгебра) подмножеств множества S .

(β) Если $A \subset S$, то $\{\emptyset, S, A, S \setminus A\}$ – наименьшая алгебра подмножеств множества S , которой принадлежит A . Говорят, что эта алгебра *порождена* одним множеством A .

(γ) Множество 2^S всех подмножеств множества S есть σ -алгебра подмножеств множества S .

(δ) Множество $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ всех множеств $A \subset \mathbb{R}^n$, измеримых в смысле Лебега, есть σ -алгебра подмножеств пространства \mathbb{R}^n . Это – важнейшая из σ -алгебр.

4. Теорема. Пересечение Σ семейства σ -алгебр $\Sigma_i, i \in I$, подмножеств множества S является σ -алгеброй подмножеств в S .

Доказательство. По определению σ -алгебры $\emptyset \in \Sigma_i$ для каждого $i \in I$. Отсюда следует, что $\emptyset \in \Sigma$.

Пусть $A \in \Sigma$. Тогда $A \in \Sigma_i$ для каждого $i \in I$. Значит, $S \setminus A \in \Sigma_i$ для каждого $i \in I$, так как Σ_i – σ -алгебра. Следовательно, $S \setminus A \in \Sigma$.

Пусть (A_k) – последовательность множеств, принадлежащих Σ . Тогда для каждого $i \in I$ все $A_k \in \Sigma_i$ и, значит, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma_i$, так как Σ_i – σ -алгебра. Следовательно, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Применяя определение 2, заключаем, что Σ – σ -алгебра подмножеств множества S . \square

5. **Определение.** Пусть Δ – множество (или семейство) подмножеств множества S . По теореме 4 пересечение $\sigma(\Delta)$ всех σ -алгебр $\Sigma \subset 2^S$, удовлетворяющих условию $\Delta \subset \Sigma$, является σ -алгеброй в S .

Говорят, что σ -алгебра $\sigma(\Delta)$ порождена множеством (семейством) Δ подмножеств множества S .

Отметим, что если Δ_1 и Δ_2 – семейства подмножеств множества S и $\Delta_1 \subset \Delta_2$, то $\sigma(\Delta_1) \subset \sigma(\Delta_2)$.

6. **Пример.** Пусть M – метрическое пространство и τ – множество всех открытых множеств пространства M . По теореме 4 пересечение $\mathbf{B}(M)$ всех σ -алгебр $\Sigma \subset 2^M$, удовлетворяющих условию $\tau \subset \Sigma$, является σ -алгеброй подмножеств пространства M . Множества $A \in \mathbf{B}(M)$ называются *борелевскими множествами* пространства M .

§2. Аддитивные и счетно аддитивные функции

1. Определение. Пусть Σ – алгебра подмножеств множества S . Функция $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu: \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ или $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ называется *конечно аддитивной* (или просто *аддитивной*), если $\mu(\emptyset) = 0$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$ справедливо равенство $\mu(A \sqcup B) = \mu A + \mu B$. Если функция μ конечно аддитивна, то $\mu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_m) = \mu A_1 + \mu A_2 + \dots + \mu A_m$ для любой конечной системы попарно не пересекающихся множеств $A_k \in \Sigma$.

2. Определение. Пусть Σ – σ -алгебра подмножеств множества S . Функция $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu: \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ или $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ называется *счетно аддитивной функцией* или *мерой*, если $\mu(\emptyset) = 0$ и для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_k \in \Sigma$ справедливо равенство $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k$. Мера μ на Σ называется *вещественной*, если $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, *неотрицательной*, если $\mu: \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$, *конечной*, если $\mu(A) \neq +\infty$ для всех $A \in \Sigma$, *комплексной*, если $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$; *вероятностной*, если $\mu(S) = 1$.

Из условия $\mu(\emptyset) = 0$ следует, что каждая мера является конечно аддитивной функцией.

3. Примеры конкретных мер.

(α) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ мера Лебега $\lambda_n : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$, есть неотрицательная мера.

(β) Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и пусть функция $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает. Допустим еще, что она непрерывна слева, т.е.

$$g(t) = g(t+0) \text{ для всех } t \in (a, b).$$

Если $P = [\alpha, \beta)$, где $a < \alpha < \beta < b$, то положим

$$\nu_g P = g(\beta) - g(\alpha).$$

Повторив построение меры Лебега на \mathbb{R} , мы получим σ -алгебру $\mathbf{L}(a, b)$ подмножеств интервала (a, b) и новую меру ν_g на ней. Говорят, что множества $A \in \mathbf{L}(a, b)$ измеримы в смысле Лебега – Стильеса. Мера $\nu_g : \mathbf{L}(a, b) \rightarrow [0, +\infty)$ называется мерой Лебега – Стильеса, порожденной функцией $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

4. Определение. Тройка (S, Σ, μ) , где S – множество, Σ – σ -алгебра подмножеств множества S и μ – мера на Σ , называется *пространством с мерой* (или *измеримым пространством*).

Каждому из приведенных выше примеров мер соответствует свое пространство с мерой. Важнейшим из них является пространство $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ с мерой Лебега.

Отметим простейшие свойства меры на σ -алгебре.

5. Теорема. Пусть μ – неотрицательная мера на σ -алгебре Σ подмножеств множества S . Тогда

(а) Если $A, B \in \Sigma$ и $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$.

(b) Если $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$ и $\mu B \neq +\infty$, то $\mu A \neq +\infty$ и $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

(c) Если $A \in \Sigma$, все $B_k \in \Sigma$ и $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, то $\mu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k$.

В частности, $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k$.

Доказательство. (а) Допустим, что $A, B \in \Sigma$ и $A \subset B$. Тогда $B = A \sqcup (B \setminus A)$ и, значит, $\mu B = \mu A + \mu(B \setminus A)$. Отсюда и из неравенства $\mu(B \setminus A) \geq 0$ ясно, что $\mu A \leq \mu B$.

(б) Из соотношений $\mu B = \mu A + \mu(B \setminus A)$ и $\mu B \neq +\infty$ следует, что $\mu A \neq +\infty$. Поэтому $\mu B - \mu A = \mu A + \mu(B \setminus A) - \mu A = \mu(B \setminus A)$.

(с) Пусть $A \in \Sigma$, все $B_k \in \Sigma$ и $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Множества

$$A_1 = A \cap B_1, A_2 = A \cap (B_2 \setminus B_1), A_3 = A \cap [B_3 \setminus (B_2 \cup B_1)], \dots,$$

$$A_k = A \cap \left(B_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j \right), \dots \text{ принадлежат } \Sigma \text{ и попарно не пересекаются.}$$

Кроме того, $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Действительно, $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$, так как все

$A_k \subset A$. Обратно, пусть $x \in A$. Тогда $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ и найдется $k \in \mathbb{N}$ такое,

что $x \in B_k$, но $x \notin B_l$ при $1 \leq l < k$. Тогда $x \in B_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j$, значит,

$x \in A_k = A \cap \left(B_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j \right)$, и поэтому $x \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Из равенства $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и из включений $A_k \subset B_k$ следует, что

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k. \quad \square$$

Следствие. Пусть μ – неотрицательная мера на σ -алгебре Σ . Если

$$A \in \Sigma, B_1, B_2, \dots, B_m \in \Sigma \text{ и } A \subset \bigcup_{k=1}^m B_k, \text{ то } \mu A \leq \sum_{k=1}^m \mu B_k.$$

6. Теорема. (О непрерывности меры). Пусть μ – произвольная мера на σ -алгебре Σ подмножеств множества S . Тогда:

(а) Если последовательность множеств $A_k \in \Sigma, k \in \mathbb{N}$, возрастает, т.е.

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots, \text{ то } \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k.$$

(б) Если последовательность множеств $A_k \in \Sigma, k \in \mathbb{N}$, убывает, т.е.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots, \text{ и } \mu A_1 \neq +\infty, \text{ то } \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k.$$

Доказательство. (а) Пусть множества $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, образуют возрастающую последовательность. Обозначим

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad B_3 = A_3 \setminus A_2, \dots$$

Множества B_k , $k \in \mathbb{N}$, принадлежат Σ , попарно не пересекаются,

$$A_k = \bigsqcup_{j=1}^k B_j \text{ для всех } k \in \mathbb{N} \text{ и } A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k. \text{ Поэтому}$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k.$$

(b) Пусть теперь $\mu(A_1) \neq +\infty$ и последовательность множеств $A_k \in \Sigma$,

$k \in \mathbb{N}$, убывает. Обозначим $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ и $B_k = A_1 \setminus A_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Последовательность множеств B_k , $k \in \mathbb{N}$, возрастает и

$$A_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_1 \setminus B_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A.$$

Применяя только что доказанное утверждение (а), получим

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu B_k.$$

Очевидно, все $B_k \subset A_1$. Поэтому $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset A_1$. Отсюда и из условия $\mu(A_1) \neq +\infty$ следует (по части (b) теоремы 5), что

$$\mu(A_k) = \mu(A_1 \setminus B_k) = \mu A_1 - \mu B_k,$$

$$\mu A = \mu\left(A_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu A_1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu A &= \mu A_1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu A_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu A_1 - \mu B_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. Условие $\mu A_1 \neq +\infty$ в части (b) теоремы 6 существенно: Если

$A_k = [k, +\infty) \subset \mathbb{R}$, то все $\lambda_1 A_k = +\infty$, однако $\lambda_1 \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \lambda_1(\emptyset) = 0$.

§3. Измеримые функции

В данном разделе всюду, где явно не указано иное, фиксирована σ -алгебра Σ подмножеств множества S . Здесь и далее кроме обычных вещественных функций $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ мы будем рассматривать также функции, допускающие бесконечные значения $-\infty$ и $+\infty$, т.е. функции $f: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Такие функции приходится складывать, перемножать и делить друг на друга. Условимся применять следующие естественные правила действия с символами $\pm\infty$: (известные из теории предела функции) $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ при $a \in (0, +\infty]$, $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ при $a \in [-\infty, 0)$,

$a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$ и $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ для всех $a \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, и др.