Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МЕРЫ

§1. Алгебры и σ-алгебры множеств

1. Определение. Пусть S – произвольное множество. *Алгеброй подмножеств множества* S называется множество Σ некоторых его подмножеств, удовлетворяющее условиям:

(*) $\varnothing, S \in \Sigma$.

(**) *Если* $A, B \in \Sigma$, *то* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $S \setminus A \in \Sigma$.

Алгебра подмножеств Σ множества S называется *σ-алгеброй подмножеств множества* S, если выполнено условие:

(***) *Если* $A_k \in \Sigma$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, *то* $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ *и* $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Из равенств $A \setminus B = A \cap (S \setminus B)$, $A \cap B = S \setminus [(S \setminus A) \cup (S \setminus B)]$ следует, что в условии (**) достаточно оставить $A \cup B$ и $S \setminus A \in \Sigma$, а в условии (*) – только $\varnothing \in \Sigma$ или только $S \in \Sigma$. В условии (***) можно оставить $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ или $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$, так как

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = S \setminus \Big[\bigcup_{k=1}^{\infty} (S \setminus A_k) \Big], \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = S \setminus \Big[\bigcap_{k=1}^{\infty} (S \setminus A_k) \Big].$$

Кроме того, $A \cup B = A \cup B \cup B \cup \ldots$ и $A \cap B = A \cap B \cap B \cap \ldots$. Поэтому из (***) следует, что $A \cup B \in \Sigma$ и $A \cap B \in \Sigma$, если $A, B \in \Sigma$. Таким образом, определение σ-алгебры можно сократить:

2. **Определение.** Множество Σ подмножеств множества S называется *σ-алгеброй подмножеств множества* S, если выполнены условия:

(1) $\varnothing \in \Sigma$.

(2) *Если* $A \in \Sigma$, *то* $S \setminus A \in \Sigma$.

(3) *Если* $A_k \in \Sigma$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, *то* $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

3. Примеры алгебр и σ-алгебр.

(α) Множество $\{\varnothing, S\}$ – наименьшая алгебра (и σ-алгебра) подмножеств множества S.

(β) Если $A \subset S$, то $\{\varnothing, S, A, S \setminus A\}$ – наименьшая алгебра подмножеств множества S, которой принадлежит A. Говорят, что эта алгебра *порождена* одним множеством A.

(γ) Множество 2^S всех подмножеств множества S есть σ-алгебра подмножеств множества S.

(δ) Множество $\mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ всех множеств $A \subset \mathbb{R}^n$, измеримых в смысле Лебега, есть σ-алгебра подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Это – важнейшая из σ-алгебр.

4. Теорема. *Пересечение Σ семейства σ-алгебр $\Sigma_i, i \in I$, подмножеств множества S является σ-алгеброй подмножеств в S.*

Доказательство. По определению σ-алгебры $\varnothing \in \Sigma_i$ для каждого $i \in I$. Отсюда следует, что $\varnothing \in \Sigma$.

Пусть $A \in \Sigma$. Тогда $A \in \Sigma_i$ для каждого $i \in I$. Значит, $S \setminus A \in \Sigma_i$ для каждого $i \in I$, так как Σ_i – σ-алгебра. Следовательно, $S \setminus A \in \Sigma$.

Пусть (A_k) – последовательность множеств, принадлежащих Σ. Тогда для каждого $i \in I$ все $A_k \in \Sigma_i$ и, значит, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma_i$, так как Σ_i – σ-алгебра. Следовательно, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Применяя определение 2, заключаем, что Σ – σ-алгебра подмножеств множества S. □

5. Определение. Пусть Δ – множество (или семейство) подмножеств множества S. По теореме 4 пересечение $\sigma(\Delta)$ всех σ-алгебр $\Sigma \subset 2^S$, удовлетворяющих условию $\Delta \subset \Sigma$, является σ-алгеброй в S.

Говорят, что σ-алгебра $\sigma(\Delta)$ *порождена множеством* (*семейством*) Δ *подмножеств множества* S.

Отметим, что если Δ_1 и Δ_2 – семейства подмножеств множества S и $\Delta_1 \subset \Delta_2$, то $\sigma(\Delta_1) \subset \sigma(\Delta_2)$.

6. Пример. Пусть M – метрическое пространство и τ – множество всех открытых множеств пространства M. По теореме 4 пересечение $\mathrm{B}(M)$ всех σ-алгебр $\Sigma \subset 2^M$, удовлетворяющих условию $\tau \subset \Sigma$, является σ-алгеброй подмножеств пространства M. Множества $A \in \mathrm{B}(M)$ называются *борелевскими множествами* пространства M.

§2. Аддитивные и счетно аддитивные функции

1. Определение. Пусть Σ – алгебра подмножеств множества S. Функция $\mu:\Sigma\to\mathbb{R}$, $\mu:\Sigma\to[0,+\infty]$ или $\mu:\Sigma\to\mathbb{C}$ называется *конечно аддитивной* (или просто *аддитивной*), если $\mu(\varnothing)=0$ и для любых непересекающихся множеств $A,B\in\Sigma$ справедливо равенство $\mu(A\sqcup B)=\mu A+\mu B$. Если функция μ конечно аддитивна, то $\mu(A_1\sqcup A_2\sqcup\ldots\sqcup A_m) = \mu A_1+\mu A_2+\ldots+\mu A_m$ для любой конечной системы попарно не пересекающихся множеств $A_k\in\Sigma$.

2. Определение. Пусть Σ – σ-алгебра подмножеств множества S. Функция $\mu:\Sigma\to\mathbb{R}$, $\mu:\Sigma\to[0,+\infty]$ или $\mu:\Sigma\to\mathbb{C}$ называется *счетно аддитивной функцией* или *мерой*, если $\mu(\varnothing)=0$ и для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_k\in\Sigma$ справедливо равенство $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu A_k$. Мера μ на Σ называется *вещественной*, если $\mu:\Sigma\to\mathbb{R}$, *неотрицательной*, если $\mu:\Sigma\to[0,+\infty]$, *конечной*, если $\mu(A)\neq+\infty$ для всех $A\in\Sigma$, *комплексной*, если $\mu:\Sigma\to\mathbb{C}$.; вероятностной, если $\mu(S)=1$.

Из условия $\mu(\varnothing)=0$ следует, что каждая мера является конечно аддитивной функцией.

3. Примеры конкретных мер.

(α) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ мера Лебега $\lambda_n : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$, есть неотрицательная мера.

(β) Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и пусть функция $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ возрастает. Допустим еще, что она непрерывна слева, т.е.

$$g(t) = g(t+0) \text{ для всех } t \in (a, b).$$

Если $P = [\alpha, \beta)$, где $a < \alpha < \beta < b$, то положим

$$\nu_g P = g(\beta) - g(\alpha).$$

Повторив построение меры Лебега на $\mathbb{R}$, мы получим σ-алгебру $\mathsf{L}(a, b)$ подмножеств интервала (a, b) и новую меру ν_g на ней. Говорят, что множества $A \in \mathsf{L}(a, b)$ *измеримы в смысле Лебега – Стилтьеса*. Мера $\nu_g : \mathsf{L}(a, b) \to [0, +\infty)$ называется *мерой Лебега – Стилтьеса, порожденной функцией* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$.

4. Определение. Тройка (S, Σ, μ), где S – множество, Σ – σ-алгебра подмножеств множества S и μ – мера на Σ, называется *пространством с мерой* (или *измеримым пространством*).

Каждому из приведенных выше примеров мер соответствует свое пространство с мерой. Важнейшим из них является пространство $\left(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n\right), \lambda_n\right)$ с мерой Лебега.

Отметим простейшие свойства меры на σ-алгебре.

5. Теорема. *Пусть μ – неотрицательная мера на σ-алгебре Σ подмножеств множества S. Тогда*

(a) *Если $A, B \in \Sigma$ и $A \subset B$, то $\mu A \leqslant \mu B$.*

(b) *Если $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$ и $\mu B \neq +\infty$, то $\mu A \neq +\infty$ и $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.*

(c) *Если $A \in \Sigma$, все $B_k \in \Sigma$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, то $\mu A \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_k$.*

В частности, $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_k$.

Доказательство. (a) Допустим, что $A, B \in \Sigma$ и $A \subset B$. Тогда $B = A \sqcup (B \setminus A)$ и, значит, $\mu B = \mu A + \mu(B \setminus A)$. Отсюда и из неравенства $\mu(B \setminus A) \geqslant 0$ ясно, что $\mu A \leqslant \mu B$.

(b) Из соотношений $\mu B = \mu A + \mu(B \setminus A)$ и $\mu B \neq +\infty$ следует, что $\mu A \neq +\infty$. Поэтому $\mu B - \mu A = \mu A + \mu(B \setminus A) - \mu A = \mu(B \setminus A)$.

(c) Пусть $A \in \Sigma$, все $B_k \in \Sigma$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Множества $A_1 = A \cap B_1$, $A_2 = A \cap (B_2 \setminus B_1)$, $A_3 = A \cap [B_3 \setminus (B_2 \cup B_1)], \ldots,$ $A_k = A \cap \left(B_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} B_j \right), \ldots$ принадлежат Σ и попарно не пересекаются.

Кроме того, $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Действительно, $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$, так как все $A_k \subset A$. Обратно, пусть $x \in A$. Тогда $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ и найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in B_k$, но $x \notin B_l$ при $1 \leqslant l < k$. Тогда $x \in B_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j$, значит, $x \in A_k = A \cap \left(B_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j \right)$, и поэтому $x \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Из равенства $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и из включений $A_k \subset B_k$ следует, что

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k. \ \square$$

Следствие. *Пусть* μ *– неотрицательная мера на* σ*-алгебре* Σ. *Если* $A \in \Sigma,\ B_1, B_2, \ldots, B_m \in \Sigma$ *и* $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k$, *то* $\mu A \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \mu B_k$.

6. Теорема. (О непрерывности меры). *Пусть* μ *– произвольная мера на* σ*-алгебре* Σ *подмножеств множества* S. *Тогда*:

(a) *Если последовательность множеств* $A_k \in \Sigma,\ \ k \in \mathbb{N}$, *возрастает, т.е.* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$, *то* $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu A_k$.

(b) *Если последовательность множеств* $A_k \in \Sigma,\ \ k \in \mathbb{N}$, *убывает, т.е.* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$, *и* $\mu A_1 \neq +\infty$, *то* $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu A_k$.

Доказательство. (a) Пусть множества $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, образуют возрастающую последовательность. Обозначим $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2, \ldots$.

Множества B_k, $k \in \mathbb{N}$, принадлежат Σ, попарно не пересекаются, $A_k = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Поэтому

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu B_k = \lim_{k\to\infty} \mu A_k.$$

(b) Пусть теперь $\mu(A_1) \neq +\infty$ и последовательность множеств $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, убывает. Обозначим $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ и $B_k = A_1 \setminus A_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Последовательность множеств B_k, $k \in \mathbb{N}$, возрастает и

$$A_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_1 \setminus B_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A.$$

Применяя только что доказанное утверждение (а), получим

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu B_k .$$

Очевидно, все $B_k \subset A_1$. Поэтому $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \subset A_1$. Отсюда и из условия $\mu(A_1) \neq +\infty$ следует (по части (b) теоремы 5), что

$$\mu(A_k) = \mu(A_1 \setminus B_k) = \mu A_1 - \mu B_k ,$$

$$\mu A = \mu\left(A_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu A_1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right).$$

Следовательно,

$$\mu A = \mu A_1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu A_1 - \lim_{k\to\infty} \mu B_k = \lim_{k\to\infty} (\mu A_1 - \mu B_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus B_k) = \lim_{k\to\infty} \mu A_k . \ \square$$

Замечание. Условие $\mu A_1 \neq +\infty$ в части (b) теоремы 6 существенно: Если

$A_k = [k, +\infty) \subset \mathbb{R}$, то все $\lambda_1 A_k = +\infty$, однако $\lambda_1\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lambda_1(\varnothing) = 0$.

§3. Измеримые функции

В данном разделе всюду, где явно не указано иное, фиксирована σ-алгебра Σ подмножеств множества S. Здесь и далее кроме обычных вещественных функций $f: A \to \mathbb{R}$ мы будем рассматривать также функции, допускающие бесконечные значения $-\infty$ и $+\infty$, т.е. функции $f: A \to [-\infty, +\infty]$. Такие функции приходится складывать, перемножать и делить друг на друга. Условимся применять следующие естественные правила действия с символами $\pm\infty$: (известные из теории предела функции)

$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ при $a \in (0, +\infty]$, $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ при $a \in [-\infty, 0)$,

$a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$ и $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$ для всех $a \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, и др.