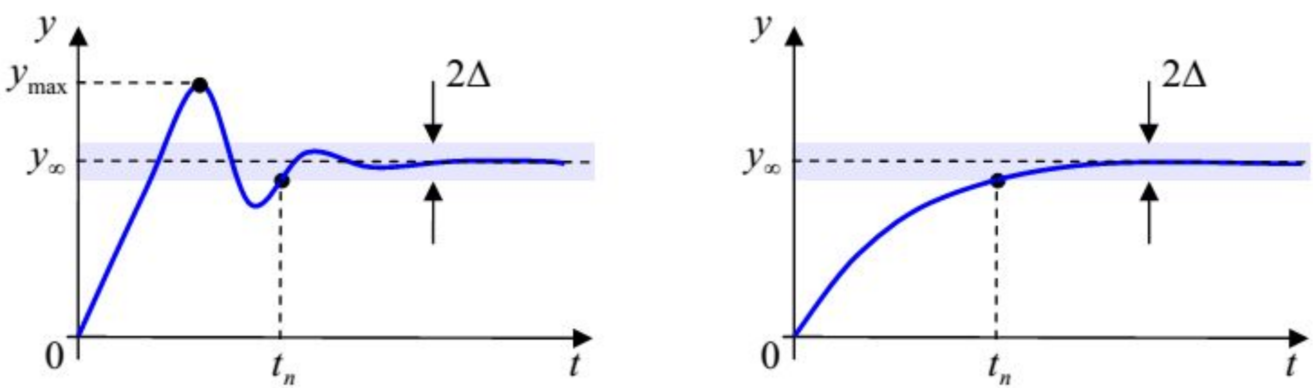
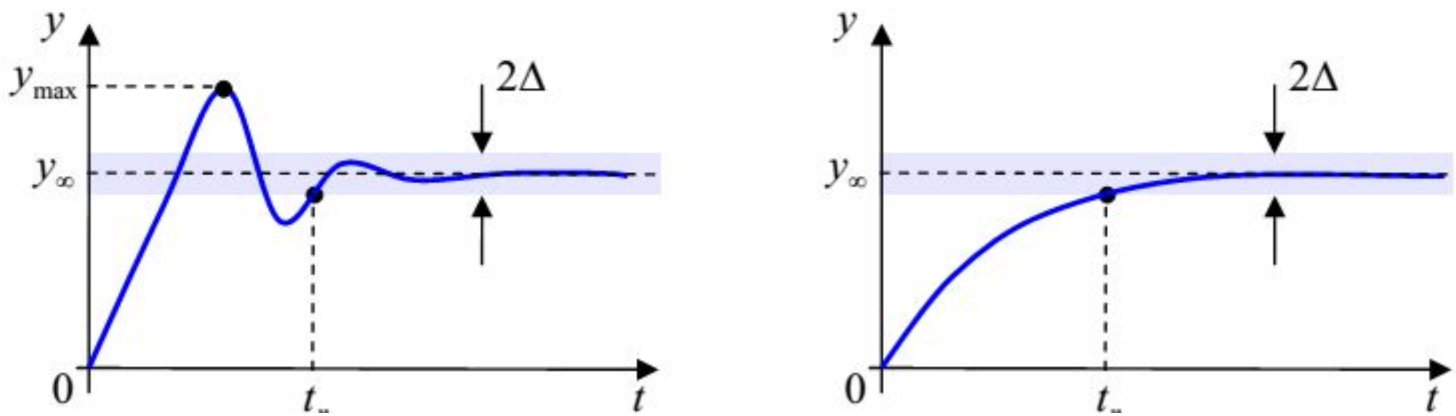
Анализ систем управления
Переходный процесс

Хорошо спроектированная система должна не только быть устойчивой и поддерживать заданную точность в установившемся режиме, но и плавно переходить на новый режим при изменении заданного значения выхода (*уставки*). Качество переходных процессов обычно оценивается по переходной характеристике (реакции системы на единичный ступенчатый входной сигнал).

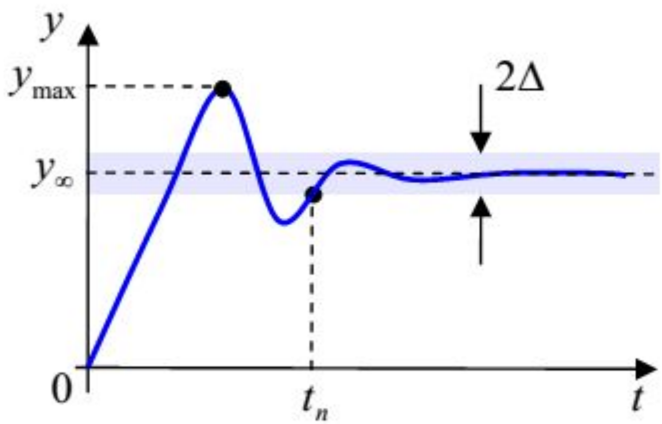


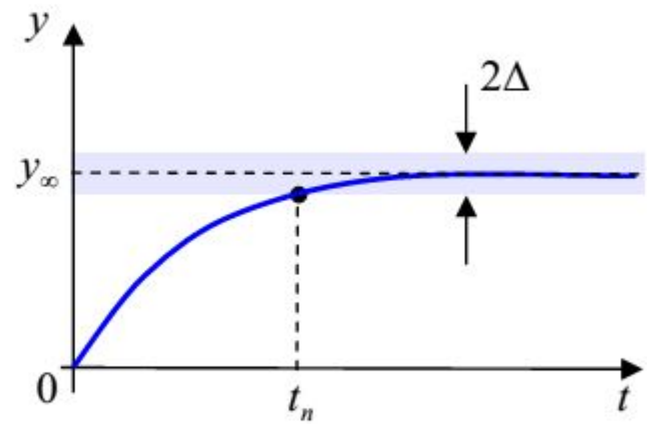
Анализ систем управления
Переходный процесс



В первую очередь нас интересует, насколько быстро заканчивается переход на другой режим (время переходного процесса $t_п$). Оно определяется как время, через которое регулируемая величина «входит в коридор» шириной 2Δ вокруг установившегося значения y_∞. Это значит, что при $t > t_п$ значение выхода отличается от установившегося не более, чем на Δ. Обычно величина Δ задается в процентах от установившегося значения, чаще всего 2% или 5%. Заметим, что для апериодического звена с постоянной времени T время переходного процесса равно $t_п = 3T$ (с точностью 5%).

Анализ систем управления
Переходный процесс





Другая важная характеристика – **перерегулирование** σ – показывает, на сколько процентов максимальное значение выхода y_{max} превышает установившееся значение[12] y_∞:

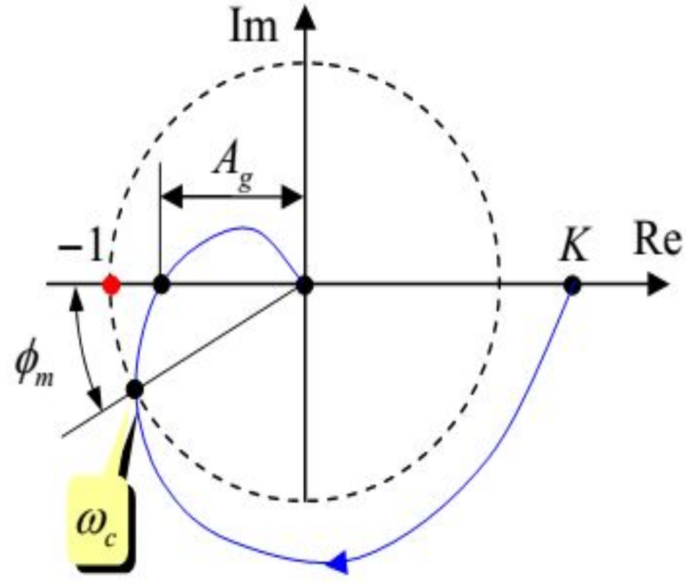
$$\sigma = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100\% \ .$$

Иногда удается обеспечить нулевое перерегулирование (*апериодический* переходный процесс, как у апериодического звена). Нужно помнить, что увеличение быстродействия обычно приводит к увеличению перерегулирования.

Анализ систем управления Частотные оценки качества

Качество системы можно оценивать не только во временнóй области (переходный процесс во времени), но и в частотной (по частотной характеристике). Из частотных оценок наиболее важны **запасы устойчивости**.

Запас устойчивости по амплитуде g_m – это дополнительное усиление контура, которое необходимо, чтобы вывести систему на границу области устойчивости. Эта величина измеряется в децибелах.

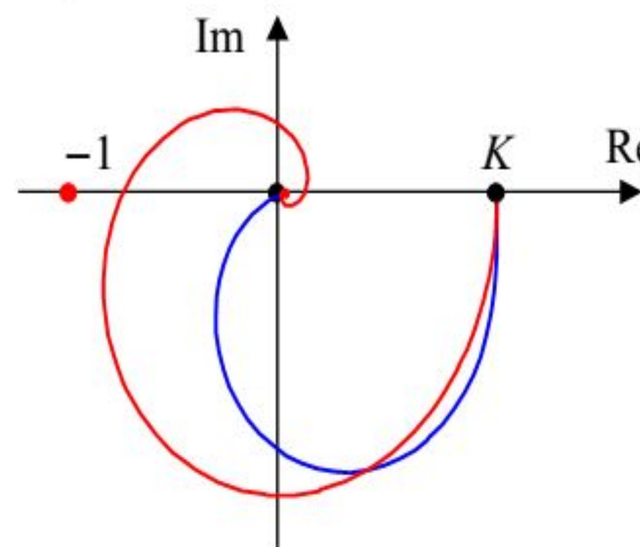


Анализ систем управления
Частотные оценки качества

Запас по амплитуде вычисляется по формуле $g_m = 20\lg\frac{1}{A_g}$, где $A_g < 1$ – значение амплитудной характеристики на частоте ω_g, где фазовая характеристика равна $-180°$. В практических задачах нужно обеспечивать запас по амплитуде не менее 6 дБ.

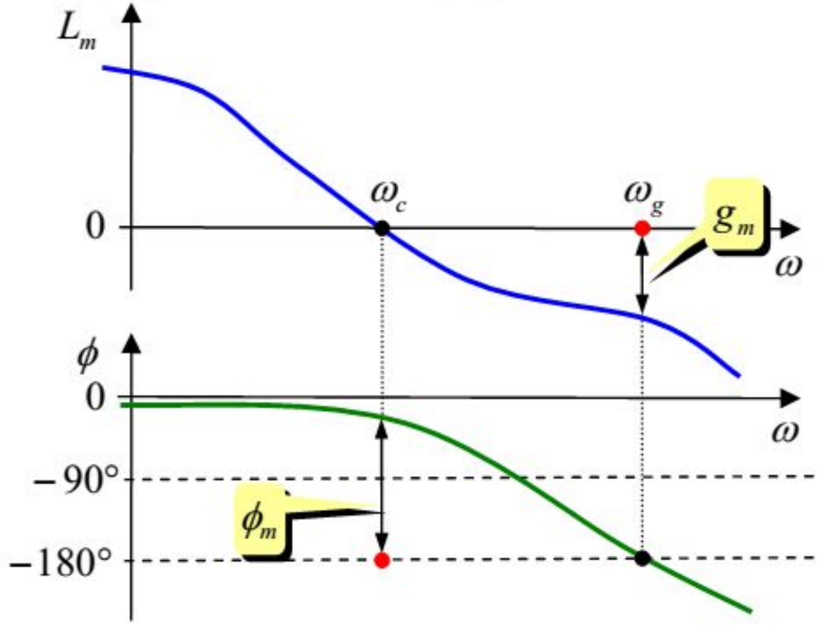
Запас устойчивости по фазе ϕ_m – это дополнительный сдвиг фазы («поворот» частотной характеристики против часовой стрелки), который необходим для того, чтобы вывести систему на границу устойчивости. Он определяется на *частоте среза* ω_c, где $A(\omega_c) = 1$. Запас по фазе должен быть не менее $30°$.

Если в системе есть запаздывание на время τ, каждая точка годографа частотной характеристики дополнительно поворачивается против часовой стрелки на угол, равный $\tau\omega$ для частоты ω. Поэтому запасы устойчивости (как по амплитуде, так и по фазе) уменьшаются. На рисунке синяя линия соответствует системе без запаздывания, а красная – той же системе с запаздыванием. Видно, что во втором случае запасы устойчивости существенно меньше.



Анализ систем управления
Частотные оценки качества

Запасы устойчивости легко определяются по логарифмических частотным характеристикам:

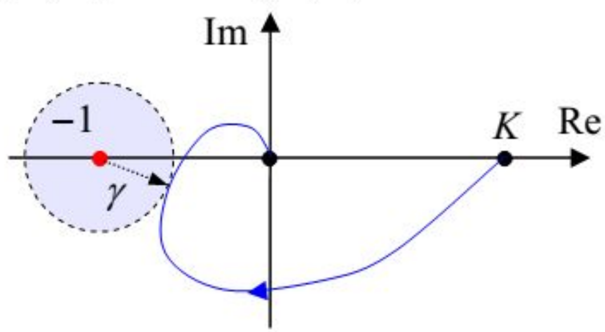


Заметим, что запас по амплитуде может быть равен бесконечности, если фазовая характеристика не пересекает линию $-180°$.

Анализ систем управления
Частотные оценки качества

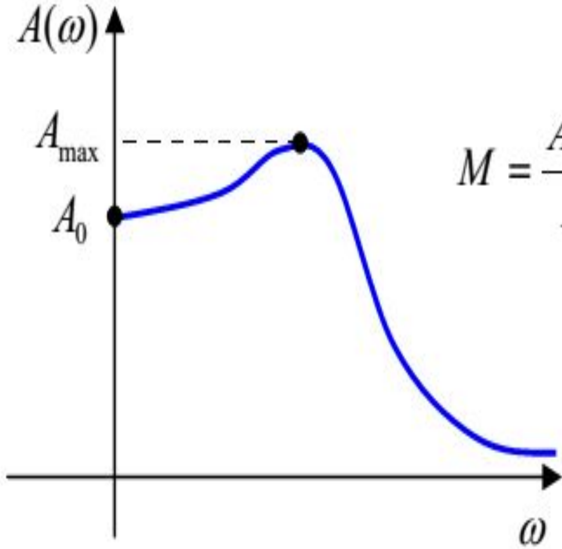
Заметим, что запас по амплитуде может быть равен бесконечности, если фазовая характеристика не пересекает линию $-180°$.

К сожалению, в некоторых случаях классические запасы устойчивости (по амплитуде и фазе) дают не совсем верное представление о том, насколько система действительно близка к границе устойчивости. Поэтому в качестве единой характеристики иногда используют кратчайшее расстояние γ от годографа до точки $(-1; 0)$.



Анализ систем управления
Частотные оценки качества

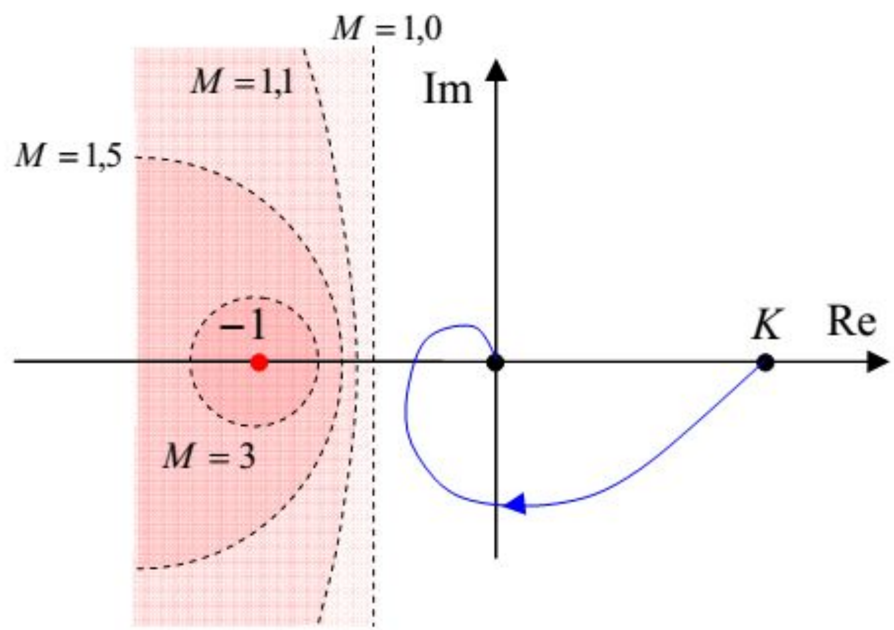
Еще одна аналогичная характеристика называется **показателем колебательности** *M*. Она определяется по амплитудной частотной характеристике *замкнутой* системы как отношение ее максимума к значению на нулевой частоте:



$$M = \frac{A_{max}}{A_0}$$

Анализ систем управления Частотные оценки качества

Для каждого значения M можно нарисовать «запретную области», в которую не должна заходить частотная характеристика *разомкнутой системы*, если ее показатель колебательности должен быть меньше M. Эта область имеет форму круга радиуса $R = \dfrac{M}{M^2 - 1}$, центр которого находится в точке $\left(-\dfrac{M^2}{M^2-1};\, 0\right)$. На рисунке показаны границы запретных областей для различных значений M.

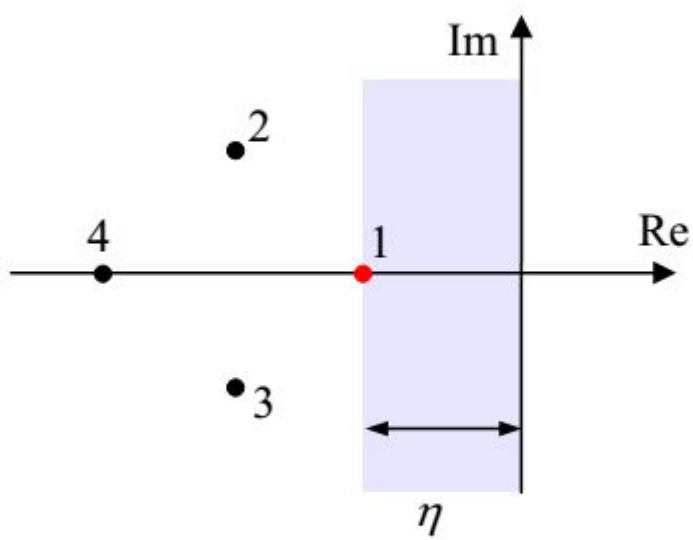


При $M = 1$ окружность имеет бесконечный радиус (превращается в вертикальную линию) и

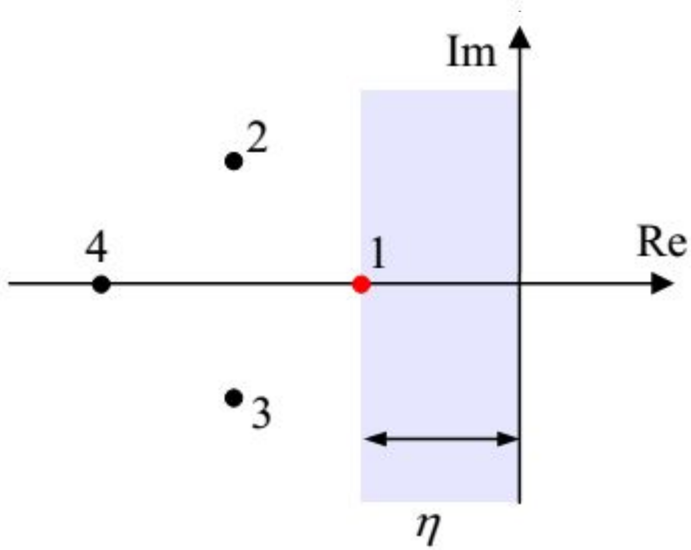
Анализ систем управления Корневые оценки качества

Многие свойства системы можно предсказать, посмотрев на расположение корней характеристического полинома $\Delta(s)$ на комплексной плоскости. Прежде всего, все корни $\Delta(s)$ для устойчивой системы должны находиться в левой полуплоскости, то есть слева от мнимой оси. Быстродействие системы определяется **степенью устойчивости** η – так называется расстояние мнимой оси до ближайшего корня (или пары комплексно-сопряженных корней).

Степень устойчивости определяется вещественным корнем 1, потому что он находится ближе всех к мнимой оси.

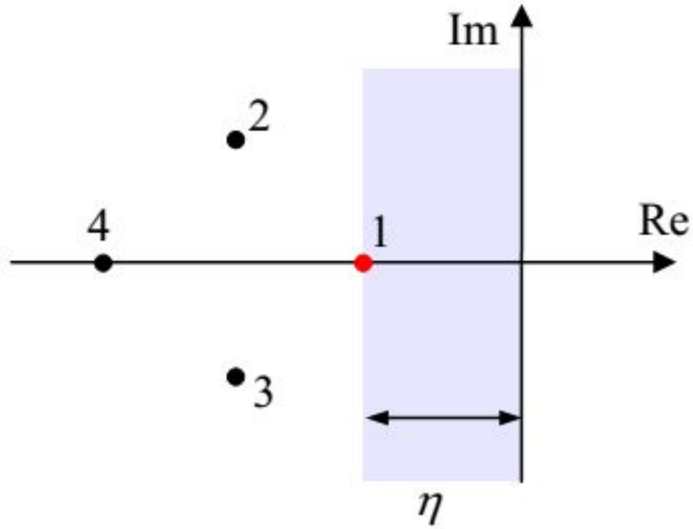


Анализ систем управления
Корневые оценки качества



Этот корень называется *доминирующим*, он определяет самые медленные движения в системе и время переходного процесса, которое может быть примерно рассчитано по формуле $t_n = \dfrac{3}{\eta}$. Корни 2, 3 и 4 соответствуют более быстрым движениям.

Анализ систем управления
Корневые оценки качества



Обратите внимание, что степень устойчивости, несмотря на название, ничего не говорит о близости системы к границе устойчивости, она только характеризует быстродействие.

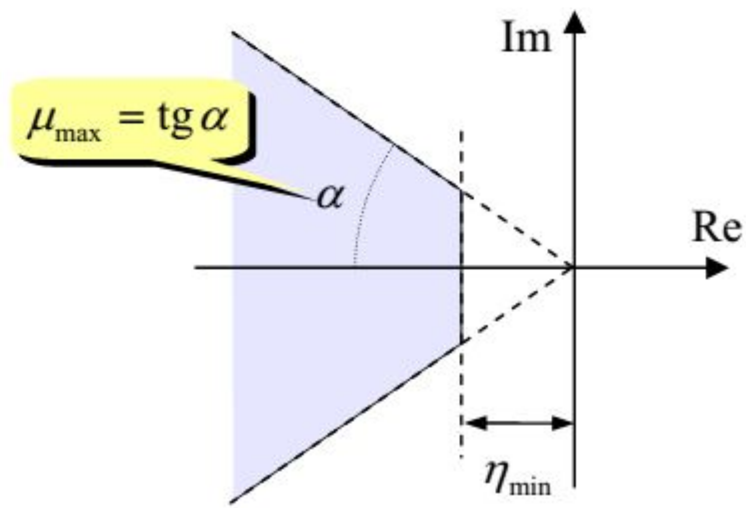
Параметр, определяющий скорость затухания колебаний в системе, называется *колебательностью*. Колебательность μ для пары комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm j\beta$ вычисляется как отношение мнимой и вещественной частей корня (по модулю):

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|.$$

Чем больше эта величина, тем слабее затухают колебания, вызванные этими корнями, за 1 период колебаний.

Анализ систем управления
Корневые оценки качества

Линии постоянной колебательности – это лучи, выходящие из начала координат. При проектировании систем обычно требуется обеспечить быстродействие не ниже заданного (степень устойчивости не меньше заданной $\eta_{\min}$) и колебательность не выше заданной $\mu_{\max}$. Эти условия определяют усеченный сектор на комплексной плоскости.



Анализ систем управления Робастность

Обычно регулятор строится на основе некоторых приближенных (*номинальных*) моделей объекта управления (а также приводов и датчиков) и внешних возмущений. При этом поведение реального объекта и характеристики возмущений могут быть несколько иными. Поэтому требуется, чтобы разработанный регулятор обеспечивал устойчивость и приемлемое качество системы при малых отклонениях свойств объекта и внешних возмущений от номинальных моделей. В современной теории управления это свойство называют *робастностью* (грубостью). Иначе его можно назвать нечувствительностью к малым ошибкам моделирования объекта и возмущений.

Различают несколько задач, связанных с робастностью:

- **робастная устойчивость** – обеспечить *устойчивость* системы при всех допустимых отклонениях модели *объекта* от номинальной;
- **робастное качество** – обеспечить *устойчивость* и заданные *показатели качества* системы при всех допустимых отклонениях модели *объекта* от номинальной;
- **гарантирующее управление** – обеспечить заданные показатели качества системы при всех допустимых отклонениях модели *возмущения* от номинальной (считая, что модель объекта известна точно).

Анализ систем управления
Робастность. Параметрическая неопределенность

Параметрическая неопределенность означает, что структура модели известна, а параметры могут отличаться от номинальных, например:

$$P(s) = \frac{k_0 + \varepsilon_1}{(T_0 + \varepsilon_2)s + 1},$$

где k_0 и T_0 – номинальные значения коэффициента усиления и постоянной времени, а ε_1 и ε_2 – малые ошибки моделирования.

Анализ систем управления
Робастность. Параметрическая неопределенность

Предположим, что такой объект управляется регулятором-усилителем с передаточной функцией $C(s) = K$. Тогда характеристический полином замкнутой системы принимает вид

$$\Delta(s) = (T_0 + \varepsilon_2)s + 1 + K(k_0 + \varepsilon_1).$$

Робастный регулятор должен обеспечивать устойчивость этого полинома при всех допустимых ε_1 и ε_2. В данном случае условия устойчивости сводятся к тому, что коэффициенты полинома, $T_0 + \varepsilon_2$ и $1 + K(k_0 + \varepsilon_1)$, имеют одинаковый знак (оба положительные или оба отрицательные). Будем считать, что $k_0 > 0$ и $T_0 > 0$, а отклонения ε_1 и ε_2 малы в сравнении с k_0 и T_0 соответственно. Таким образом, $T_0 + \varepsilon_2 > 0$ при всех возможных ε_2. Следовательно, замкнутая система устойчива при

$$1 + K(k_0 + \varepsilon_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad K > \frac{-1}{k_0 + \varepsilon_1}.$$

Анализ систем управления
Робастность. Параметрическая неопределенность

Наибольшее значение в правой части последнего неравенства будет при максимальном значении ε_1, поэтому условие робастной устойчивости принимает вид

$$K > K_{\min} = \frac{-1}{k_0 + \varepsilon_{1\max}}.$$

Таким образом, любой регулятор-усилитель, имеющий коэффициент усиления $K > K_{\min}$, обеспечивает робастную устойчивость системы в том смысле, что устойчивость сохраняется при всех допустимых ошибках ε_1 и ε_2.

Анализ систем управления
Робастность. Параметрическая неопределенность

В более сложных случаях часто используют *теорему Харитонова*, которая позволяет проверить робастную устойчивость характеристического полинома

$$\Delta(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^{n-1} + a_n s^n ,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ точно неизвестны, но принадлежат интервалам

$$\ell_i < a_i < u_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Оказывается, полином $\Delta(s)$ устойчив при всех возможных значениях коэффициентов тогда и только тогда, когда устойчивы четыре полинома Харитонова:

$$\Delta_1(s) = \ell_0 + \ell_1 s + u_2 s^2 + u_3 s^3 + \ell_4 s^4 + \ell_5 s^5 + \ldots$$

$$\Delta_2(s) = u_0 + u_1 s + \ell_2 s^2 + \ell_3 s^3 + u_4 s^4 + u_5 s^5 + \ldots$$

$$\Delta_3(s) = \ell_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \ell_3 s^3 + \ell_4 s^4 + u_5 s^5 + \ldots$$

$$\Delta_4(s) = u_0 + \ell_1 s + \ell_2 s^2 + u_3 s^3 + u_4 s^4 + \ell_5 s^5 + \ldots$$

Таким образом, для проверки устойчивости *бесконечного* числа возможных характеристических полиномов достаточно проверить устойчивость *четырех* полиномов Харитонова.

Анализ систем управления
Робастность. Непараметрическая неопределенность

Непараметрическая неопределенность задает допустимую ошибку в частотной области, то есть ошибку в частотных характеристиках. Для номинальной модели $P_0(j\omega)$ различают *аддитивную* неопределенность (абсолютную ошибку) $\Delta_a(j\omega)$:

$$P(j\omega) = P_0(j\omega) + \Delta_a(j\omega)$$

и *мультипликативную* неопределенность (относительную ошибку) $\Delta_m(j\omega)$:

$$P(j\omega) = \left[1 + \Delta_m(j\omega)\right] P_0(j\omega)\,.$$

Анализ систем управления Робастность. Непараметрическая неопределенность

Для мультипликативной неопределенности известен очень простой **критерий робастной устойчивости**: система с регулятором $C(s)$ и номинальный объектом $P_0(s)$ робастно устойчива, если для любой частоты ω выполняется неравенство

$$\left| W_0(j\omega)\, \Delta_m(j\omega) \right| < 1,$$

где $W_0(s)$ – передаточная функция номинальной замкнутой системы:

$$W_0(s) = \frac{C(s)\, P_0(s)}{1 + C(s)\, P_0(s)}.$$

Этот результат называется *теоремой о малом коэффициенте усиления*. При этом также требуется, чтобы реальная и номинальная модели объекта, $P(s)$ и $P_0(s)$, имели одинаковые неустойчивые полюса, то есть неопределенность не должна вносить новые источники неустойчивости.