Здравствуйте!

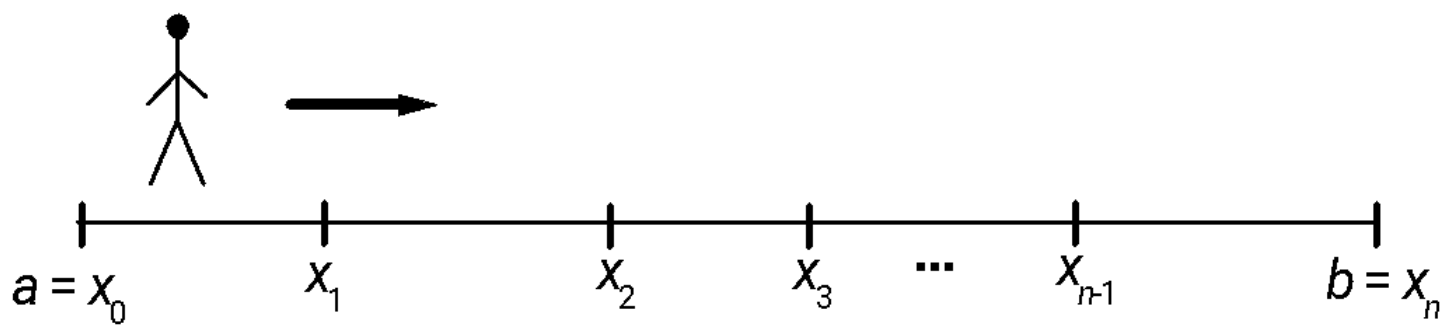
Лекция №8

Свойства определенных интегралов

1. Интеграл по ориентированному промежутку.

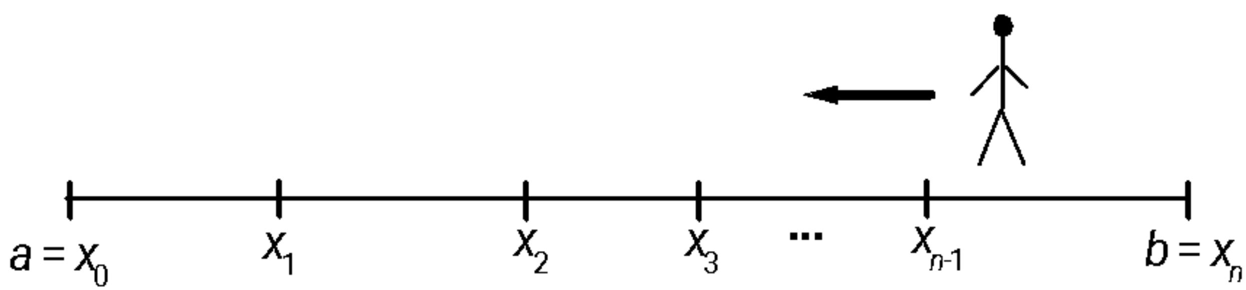
Когда вводилось понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, то неявно предполагалось, что нижний предел меньше верхнего, то есть что $a < b$. А можно ли придать смысл интегралу $\int_b^a f(x)dx$?

Такой смысл придается введением понятия **ориентации** промежутка интегрирования.



Вспомним еще раз, как строилось понятие определенного интеграла. Отрезок $[a,b]$ разбивался на кусочки, по которым строилась интегральная сумма. Представим теперь, что эти кусочки проходятся в направлении от точки a к точке b и величина Δx_i определяется так: из координаты точки, которая проходится **позже** вычитается координата точки, которая проходится **раньше** то есть $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

А теперь вернемся к интегралу $\int_b^a f(x)dx$. Что изменилось? Нижний предел стал b, а верхний – a. Это трактуют так: отрезок $[a,b]$ проходится теперь в обратном направлении, от точки b к точке a:



Но тогда меняются величины Δx_i: они становятся равными $\Delta x_i' = x_i - x_{i+1}$, так как теперь точка x_i проходится **позже** точки x_{i+1}. Очевидно соотношение между этими величинами: $\Delta x_i' = -\Delta x_i$.

Но тогда интегральные суммы в первом и втором случаях принимают вид

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i; \qquad \sigma' = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i' = -\sigma,$$

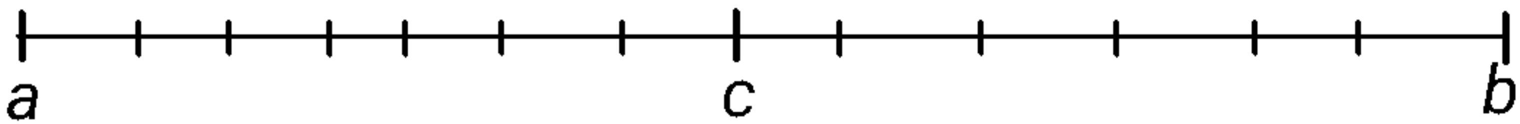
и, после предельного перехода $\lambda \to 0$, получаем соотношение

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Следствие. Рассмотрим интеграл $\int_a^a f(x)dx$, у которого верхний и нижний пределы **одинаковы**. Меняя их местами, получим $\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$, откуда следует, что $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. Если $a < c < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Это свойство называется аддитивностью определенного интеграла относительно промежутка интегрирования.



Снова рассмотрим разбиение промежутка на кусочки так, что точка c попадает в число точек деления. Тогда относительно интегральных сумм можно написать

.

$$\sum f(\xi_i)\Delta x_i = \sum f(\xi_i)\Delta x_i +$$

Делая предельный переход $\lambda \to 0$, получаем

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i: x_i \in [a,b)} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i: x_i \in [a,c)} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i: x_i \in [c,b)} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

что и приводит к требуемому соотношению:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$.

Действительно, для интегральных сумм верно соотношение

$$\sum_{i=0}^{n-1} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

После предельного перехода $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

получаем, что $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

Записывая соотношение для интегральных сумм

$$\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i$$

и делая предельный переход $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i,$$

получим требуемое соотношение

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$$

5. Если $a<b$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Действительно, так как $a<b$, то все $\Delta x_i > 0$. Поэтому

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

Делая предельный переход $\lambda \to 0$ и учитывая непрерывность функции $|x|$, получим

$$\lim_{\lambda\to 0}\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \left|\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i,$$

что и дает $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

6. Если $a<b$ и $\forall x\in[a,b]\ \ f(x)\le g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$.

Действительно, в этом случае $\forall i\ \ f(\xi_i)\le g(\xi_i)$, и, так как все $\Delta x_i>0$, то $\forall i\ \ f(\xi_i)\Delta x_i\le g(\xi_i)\Delta x_i$. Суммируя

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i$$

и переходя к пределу $\lambda\to 0$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\le\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i,$$

получим требуемое свойство $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$

Первая теорема о среднем

Теорема. Пусть

1. функции $f(x)$ **и** $g(x)$ **интегрируемы на** $[a,b]$**;**

2. существуют конечные $\boldsymbol{m}$ **и** $\boldsymbol{M}$ **такие, что** $\forall x \in [a,b] \;\; m \le f(x) \le M$ **;**

3. $\forall x \in [a,b] \;\; g(x) \ge 0$.

Тогда существует число μ такое, что

1. $m \le \mu \le M$ **;**

2. $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$

Доказательство.

Имеем $\forall x \in [a,b] \;\; m \le f(x) \le M$. Так как $\forall x \in [a,b] \;\; g(x) \ge 0$, то

$$\forall x \in [a,b] \;\; mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x).$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx. \qquad (*)$$

Возможны следующие варианты:

а) $\int_a^b g(x)dx = 0$. Но тогда из (*) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и μ может быть взято любым.

б) $\int_a^b g(x)dx > 0$. Тогда, деля все части неравенства (*) на $\int_a^b g(x)dx$, получим:

$$m \le \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx \le M .$$

Обозначим $\int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx = \mu$. Тогда будет

1. $m \le \mu \le M$;
2. $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$**,** то $\exists c\in[a,b]$ такая, что

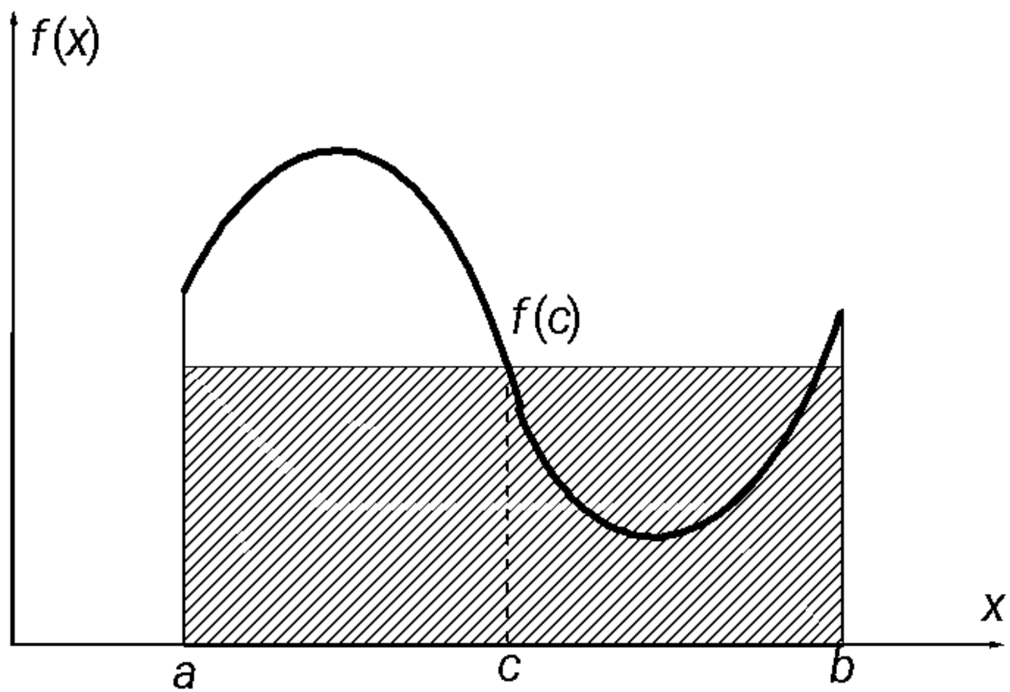
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Имеем следующую цепочку следствий:
$f(x)$ непрерывна на $[a,b] \Rightarrow$ по первой теореме Вейерштрасса существуют $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ так что
$\forall x\in[a,b]\;\; m \le f(x) \le M \;\Rightarrow$ по второй теореме Больцано–Коши $\exists c\in[a,b]$ такая, что для $\mu\in[m,M]\quad f(c)=\mu$. Заменяя в первой теореме о среднем μ на $f(c)$, получим следствие.

Частный случай. Пусть $g(x) \equiv 1$ и $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\exists c \in [a,b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Здесь использован тот факт, что $\int_a^b dx = b - a$.



Вычисление определенных интегралов

Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 1. Если существует <u>непрерывная</u> функция $F(x)$ **такая, что** $\forall x \in [a,b]$ $F'(x) = f(x)$**, то**

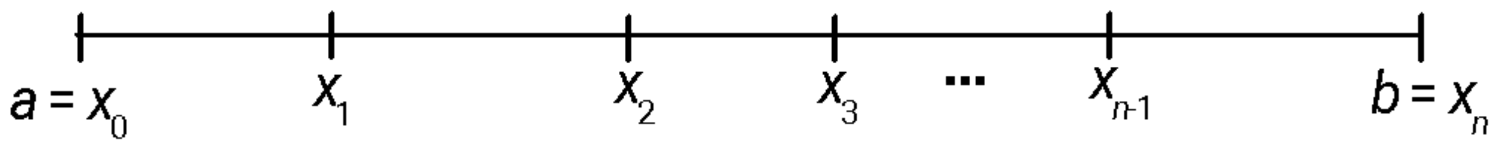
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(обратите внимание на символику: символ $F(x)\Big|_a^b$ означает разность $F(b) - F(a)$).

Эта формула носит название формулы Ньютона–Лейбница.

Доказательство

Как и при построении понятия определенного интеграла, разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на части (кусочки) точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.



Тогда имеем

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) =$$
$$= \big(F(x_n) - F(x_{n-1})\big) + \big(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\big) + \ldots + \big(F(x_1) - F(x_0)\big) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \big(F(x_{i+1}) - F(x_i)\big) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma.$$

После предельного перехода $\lambda \to 0$, получим

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)dx.$$

Непрерывность $F(x)$ обязательна!

Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

Теорема 2. Пусть равенство $F'(x) = f(x)$ **верно всюду, за исключением конечного числа точек** $x_1, x_2, \ldots, x_k$**. Тогда**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^{k} \left(F(x_i + 0) - F(x_i - 0)\right).$$

Эта формула носит название обобщенной формулы Ньютона–Лейбница.

Доказательство.

Имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} f(x)dx +$$

$$+ \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{x_k+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Но, по первой теореме о среднем,

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)dx = \mu\left[(x_i+\varepsilon)-(x_i-\varepsilon)\right] = 2\mu\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{x_k+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\big(F(x_1-\varepsilon)-F(a)\big)+\big(F(x_2-\varepsilon)-F(x_1+\varepsilon)\big)+\ldots+\big(F(b)-F(x_k+\varepsilon)\big)\right] =$$

$$= \big(F(x_1-0)-F(a)\big)+\big(F(x_2-0)-F(x_1+0)\big)+\ldots+\big(F(b)-F(x_k+0)\big) =$$

$$= F(b)-F(a)-\sum_{i=1}^{k}\big(F(x_i+0)-F(x_i-0)\big).$$

Интегрирование определенных интегралов по частям

Вспомним формулу интегрирования неопределенных интегралов по частям

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

Переходя к определенным интегралам, получим:

$$\int_a^b udv = \int udv\Big|_a^b = uv\Big|_a^b - \int vdu\Big|_a^b =$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vdu .$$

Итак

$$\int_a^b udv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vdu .$$

Эта формула носит название формулы интегрирования определенных интегралов по частям.