

Здравствуйте!

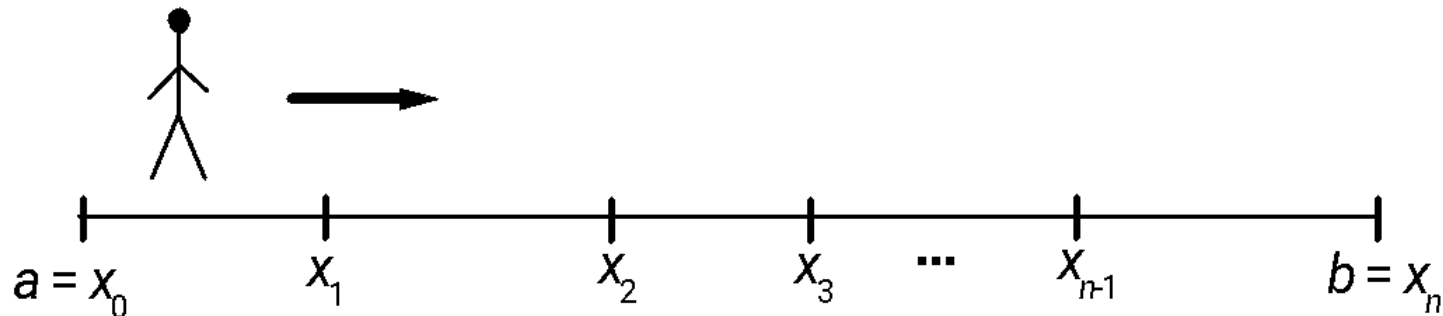
Лекция №8

Свойства определенных интегралов

1. Интеграл по ориентированному промежутку.

Когда вводилось понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, то неявно предполагалось, что нижний предел меньше верхнего, то есть что $a < b$. А можно ли придать смысл интегралу $\int_b^a f(x)dx$?

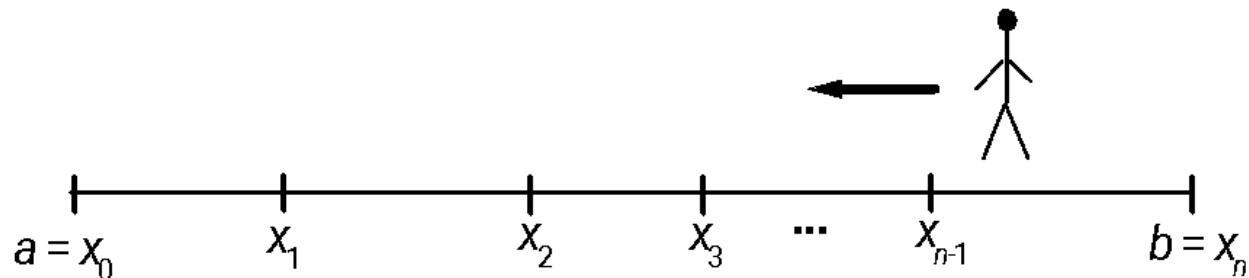
Такой смысл придается введением понятия **ориентации** промежутка интегрирования.



Вспомним еще раз, как строилось понятие определенного интеграла. Отрезок $[a, b]$ разбивался на кусочки, по которым строилась интегральная сумма. Представим теперь, что эти кусочки проходятся в направлении от точки a к точке b и величина Δx_i определяется так: из координаты точки, которая проходится **позже** вычитается координата точки, которая проходится **раньше** то есть $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

А теперь вернемся к интегралу $\int_b^a f(x) dx$. Что изменилось?

Нижний предел стал b , а верхний – a . Это трактуют так: отрезок $[a, b]$ проходится теперь в обратном направлении, от точки b к точке a :



Но тогда меняются величины Δx_i : они становятся равными $\Delta x'_i = x_i - x_{i+1}$, так как теперь точка x_i проходится **позже** точки x_{i+1} . Очевидно соотношение между этими величинами: $\Delta x'_i = -\Delta x_i$.

Но тогда интегральные суммы в первом и втором случаях принимают вид

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i; \quad \sigma' = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x'_i = -\sigma,$$

и, после предельного перехода $\lambda \rightarrow 0$, получаем соотношение

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$$

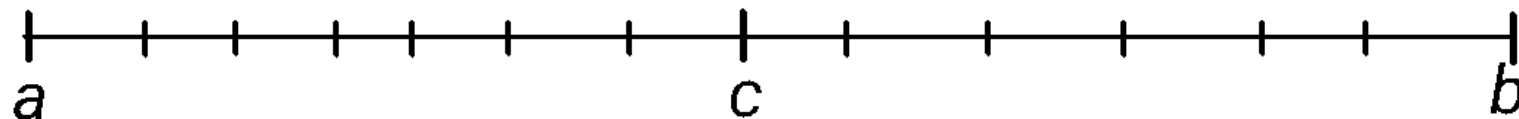
Следствие. Рассмотрим интеграл $\int_a^a f(x) dx$, у которого верхний

и нижний пределы **одинаковы**. Меняя их местами, получим

$$\int_a^a f(x) dx = -\int_a^a f(x) dx, \text{ откуда следует, что } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

2. Если $a < c < b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Это свойство называется аддитивностью определенного интеграла относительно промежутка интегрирования.



Снова рассмотрим разбиение промежутка на кусочки так, что точка c попадает в число точек деления. Тогда относительно интегральных сумм можно написать

$$\sum f(\xi_i)\Delta x_i = \sum f(\xi_i)\Delta x_i +$$

Делая предельный переход $\lambda \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i: x_i \in [a, b)} f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i: x_i \in [a, c)} f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i: x_i \in [c, b)} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

что и приводит к требуемому соотношению:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$3. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Действительно, для интегральных сумм верно соотношение

$$\sum_{i=0}^{n-1} kf(\xi_i)\Delta x_i = k \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

После предельного перехода $\lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

получаем, что $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Записывая соотношение для интегральных сумм

$$\sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \pm \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i$$

и делая предельный переход $\lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i,$$

получим требуемое соотношение

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

5. Если $a < b$, то $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Действительно, так как $a < b$, то все $\Delta x_i > 0$. Поэтому

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \Delta x_i.$$

Делая предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ и учитывая непрерывность функции $|x|$, получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right| = \left| \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \Delta x_i,$$

что и дает $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

6. Если $a < b$ и $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Действительно, в этом случае $\forall i \quad f(\xi_i) \leq g(\xi_i)$, и, так как все $\Delta x_i > 0$, то $\forall i \quad f(\xi_i) \Delta x_i \leq g(\xi_i) \Delta x_i$. Суммируя

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i$$

и переходя к пределу $\lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i,$$

получим требуемое свойство $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Первая теорема о среднем

Теорема. Пусть

1. функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$;
2. существуют конечные m и M такие, что $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$;
3. $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0$.

Тогда существует число μ такое, что

1. $m \leq \mu \leq M$;
2.
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство.

Имеем $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$. Так как $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0$, то
 $\forall x \in [a, b] \quad mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$.

Интегрируя это неравенство, получаем

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (*)$$

Возможны следующие варианты:

а) $\int_a^b g(x) dx = 0$. Но тогда из (*) следует, что $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ и μ

может быть взято любым.

б) $\int_a^b g(x)dx > 0$. Тогда, деля все части неравенства (*) на $\int_a^b g(x)dx$,

получим:

$$m \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx \leq M.$$

Обозначим $\int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx = \mu$. Тогда будет

1. $m \leq \mu \leq M$;

2. $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists c \in [a, b]$ такая, что

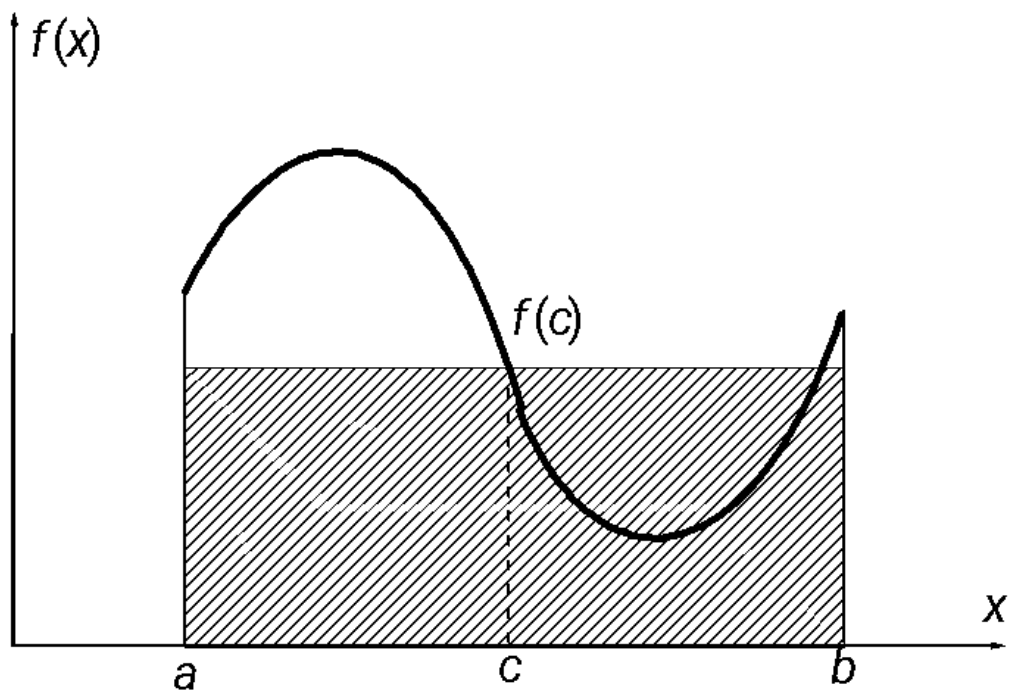
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Имеем следующую цепочку следствий:
 $f(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ по первой теореме Вейерштрасса существуют $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ и $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ так что
 $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M \Rightarrow$ по второй теореме Больцано–Коши $\exists c \in [a, b]$ такая, что для $\mu \in [m, M] \quad f(c) = \mu$. Заменяя в первой теореме о среднем μ на $f(c)$, получим следствие.

Частный случай. Пусть $g(x) \equiv 1$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.
Тогда $\exists c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Здесь использован тот факт, что $\int_a^b dx = b - a$.



Вычисление определенных интегралов

Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 1. Если существует непрерывная функция $F(x)$ такая, что $\forall x \in [a, b] F'(x) = f(x)$, то

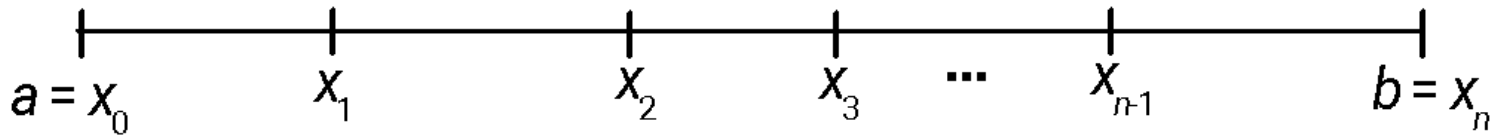
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(обратите внимание на символику: символ $F(x) \Big|_a^b$ означает разность $F(b) - F(a)$).

Эта формула носит название формулы Ньютона–Лейбница.

Доказательство

Как и при построении понятия определенного интеграла, разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на части (кусочки) точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.



Тогда имеем

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \\ &= (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_1) - F(x_0)) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sigma. \end{aligned}$$

После предельного перехода $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x) dx.$$

Непрерывность $F(x)$ обязательна!

Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

Теорема 2. Пусть равенство $F'(x) = f(x)$ верно всюду, за исключением конечного числа точек x_1, x_2, \dots, x_k . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^k (F(x_i + 0) - F(x_i - 0)).$$

Эта формула носит название обобщенной формулы Ньютона–Лейбница.

Доказательство.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} f(x) dx + \\ &+ \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_k+\varepsilon}^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Но, по первой теореме о среднем,

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x) dx = \mu[(x_i + \varepsilon) - (x_i - \varepsilon)] = 2\mu\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x_1 - \varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} f(x)dx + \dots + \int_{x_k + \varepsilon}^b f(x)dx \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(F(x_1 - \varepsilon) - F(a)) + (F(x_2 - \varepsilon) - F(x_1 + \varepsilon)) + \dots + (F(b) - F(x_k + \varepsilon)) \right] = \\ &= (F(x_1 - 0) - F(a)) + (F(x_2 - 0) - F(x_1 + 0)) + \dots + (F(b) - F(x_k + 0)) = \\ &= F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^k (F(x_i + 0) - F(x_i - 0)).\end{aligned}$$

Интегрирование определенных интегралов по частям

Вспомним формулу интегрирования неопределенных интегралов по частям

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Переходя к определенным интегралам, получим:

$$\begin{aligned} \int_a^b u dv &= \int_a^b u dv \Big|_a^b = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \Big|_a^b = \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du . \end{aligned}$$

Итак

$$\int_a^b u dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du .$$

Эта формула носит название формулы интегрирования определенных интегралов по частям.