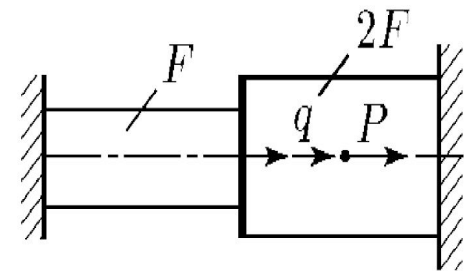
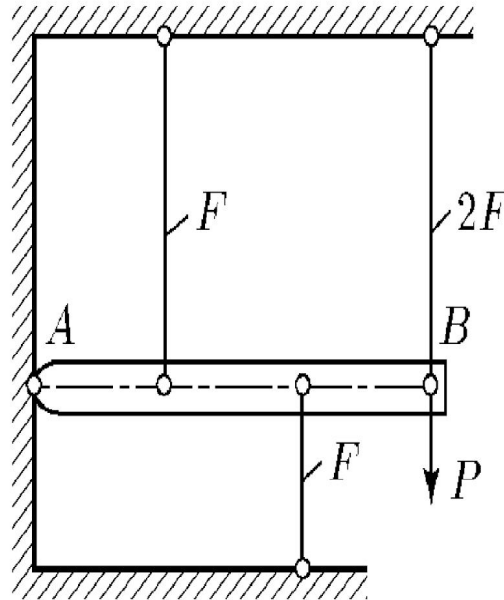
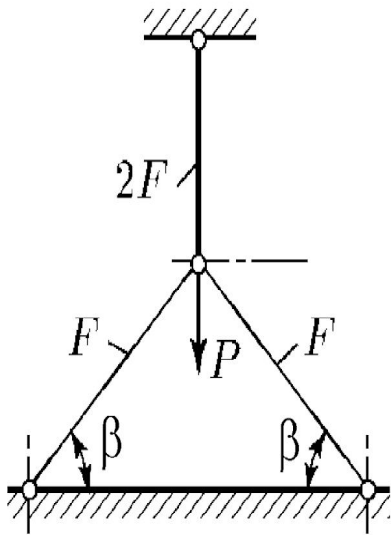
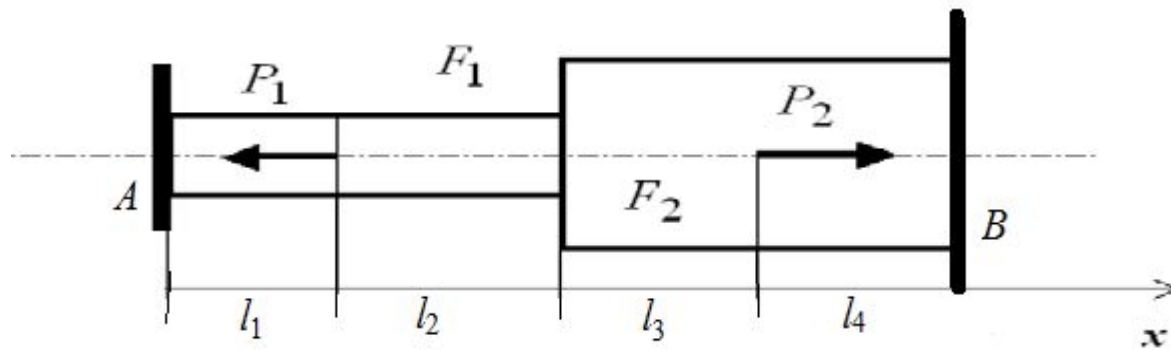


# Расчет статически неопределимых систем



# Статически неопределимый брус (стержень)

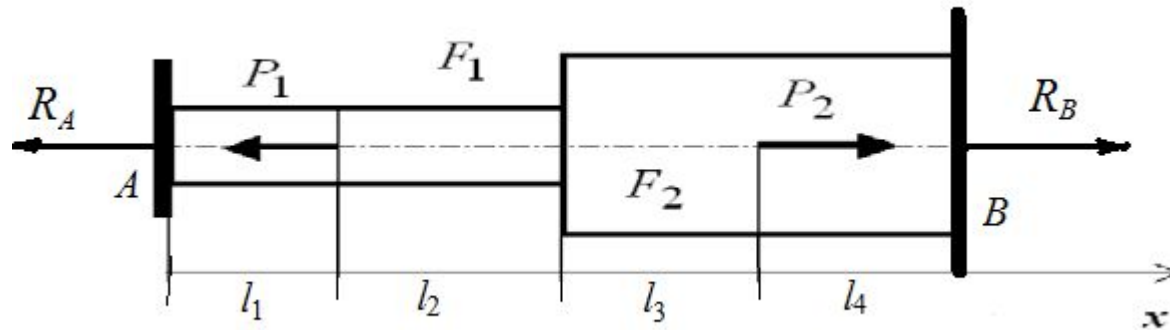
Дан стержень, жестко закрепленный с двух  
концов и нагруженный силами  $P_1$  и  $P_2$



Требуется определить опорные реакции и  
построить эпюры внутренних сил, напряжений,  
относительных деформаций и перемещений

# Статически неопределимый стержень (продолжение)

Покажем опорные реакции и составим уравнение равновесия



$$\sum X = 0 \quad -R_A - P_1 + P_2 + R_B = 0$$

Получили одно уравнение с двумя неизвестными  
– система статически неопределимая

# Раскрытие статической неопределимости

Для раскрытия статической неопределимости осуществляется переход к статически определенному стержню, эквивалентному заданному, путем отбрасывания одной лишней связи, например, стенки  $B$ , замены действия ее неизвестной силой  $R_b$  и составление уравнения перемещения сечения  $B$  с учетом тех ограничений, которые накладывались на перемещение сечения  $B$  отброшенной связью.

В случае жесткой стенки  $U_B = 0$

Есть два подхода к записи уравнения перемещений  $U_B=0$ .

Первый рассматривает перемещение  $U_B$  как сумму накопленных деформаций отдельных участков на всей длине стержня.

$$U_B = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 + \Delta l(T) = 0.$$

$$\Delta l_i = \int_0^{l_i} \frac{N_x^i dx}{EF} \quad \Delta l(T) = \alpha T l_T$$

Таким образом, достаточно найти внутреннюю силу на каждом участке, чтобы определить деформацию каждого участка, т.к. остальные исходные данные нам известны.

Для этого удобно рассматривать ту отсеченную часть, где представлена неизвестная сила  $R_B$ .

Определение внутренних силовых факторов на каждом участке и запись уравнения перемещений

$$N_1 = -P_1 + P_2 + R_B \quad N_2 = N_3 = P_2 + R_B$$

$$N_4 = R_B$$

$$U_B = -\frac{P_1 l_1}{EF_1} + \frac{P_2(l_1 + l_2)}{EF_1} + \frac{P_2 l_3}{EF_2} + \frac{R_B(l_1 + l_2)}{EF_1} + \frac{R_B(l_3 + l_4)}{EF_2} + \alpha T l_T$$

Второй подход к записи уравнения  
перемещений  $U_B=0$ .

Используется принцип  
независимости действия сил

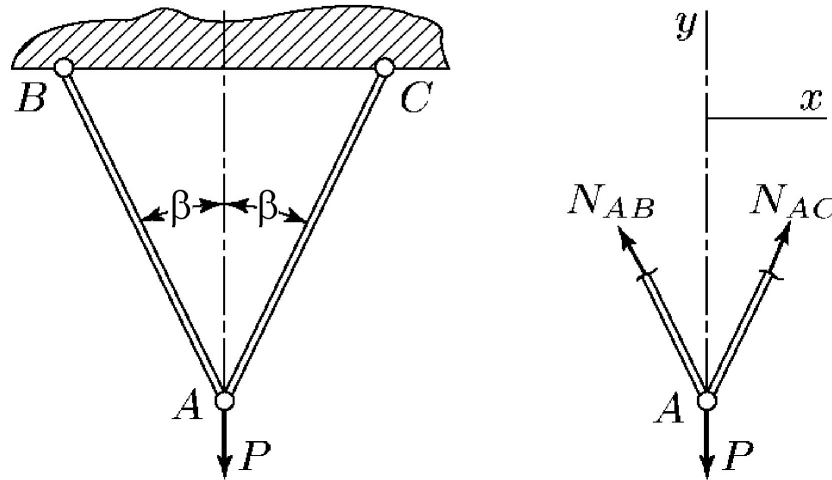
$$U_B = U_B(P_1) + U_B(P_2) + U_B(R_B) + U_B(T)$$

где

$$U_B(P_1) = -\frac{P_1 l_1}{EF_1} \quad U_B(P_2) = \frac{P_2(l_1 + l_2)}{EF_1} + \frac{P_2 l_3}{EF_2}$$

$$U_B(R_B) = \frac{R_B(l_1 + l_2)}{EF_1} + \frac{R_B(l_3 + l_4)}{EF_2} \quad U_B(T) = \alpha T l_T$$

# Статически неопределимая стержневая система

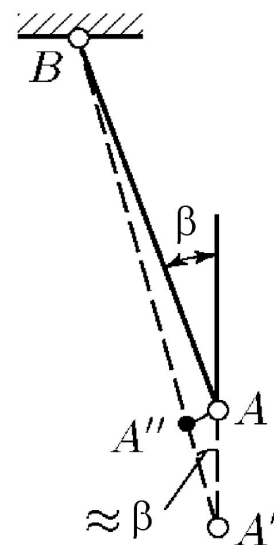
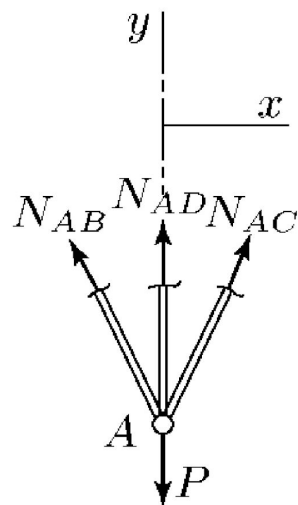
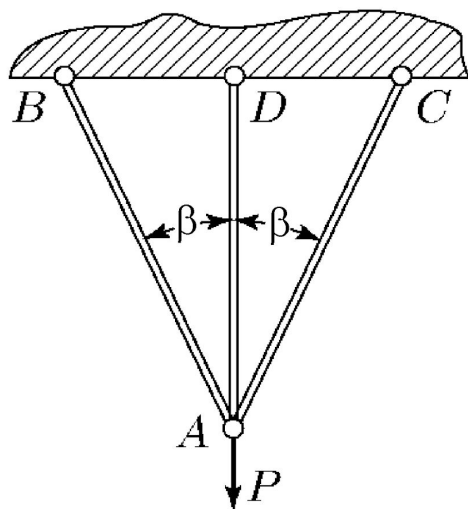


$$\sum X = 0 \quad -N_{AB} + N_{AC} = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad N_{AB} \cos \beta + N_{AC} \cos \beta = P$$



# Статически неопределимая стержневая система (продолжение)



$$\sum X = 0 \quad -N_{AB} + N_{AC} = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad N_{AB} \cos \beta + N_{AC} \cos \beta + N_{AD} = P$$

# Статически неопределимая стержневая система (продолжение 2)

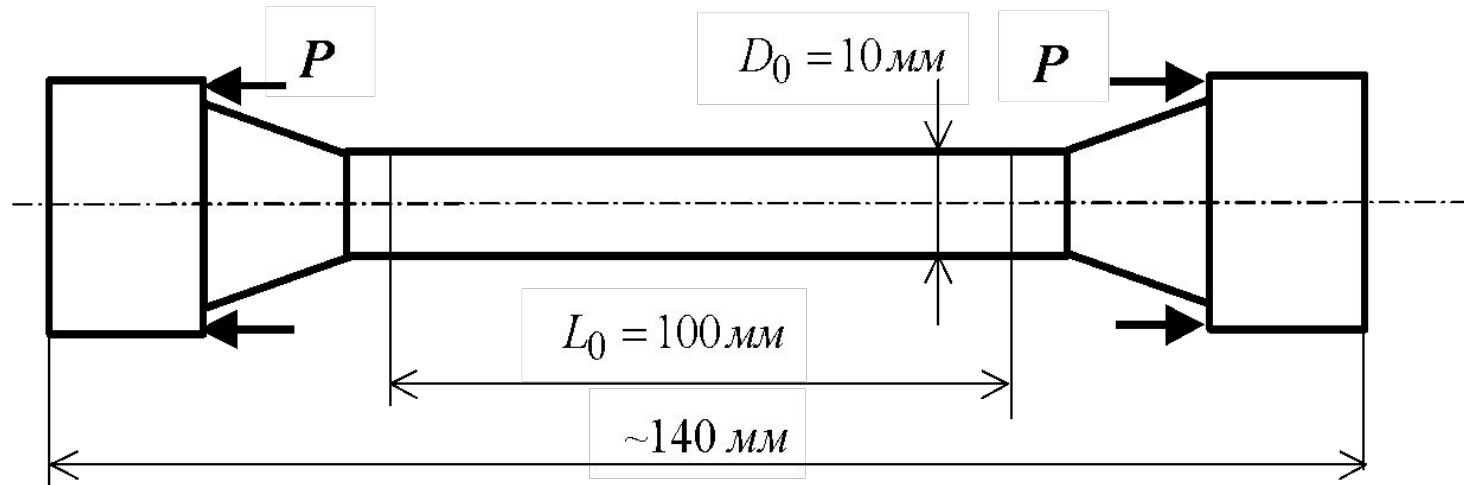
$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{AD} \cos \beta$$

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} l_{AB}}{E_{AB} F} \quad \Delta l_{AD} = \frac{N_{AD} l_{AD}}{E_{AD} F}$$

$$l_{AD} = l_{AB} \cos \beta \quad N_{AB} = N_{AD} \cos^2 \beta$$

$$N_{AB} = N_{AC} = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad N_{AD} = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta}$$

# Механические свойства материалов при растяжении

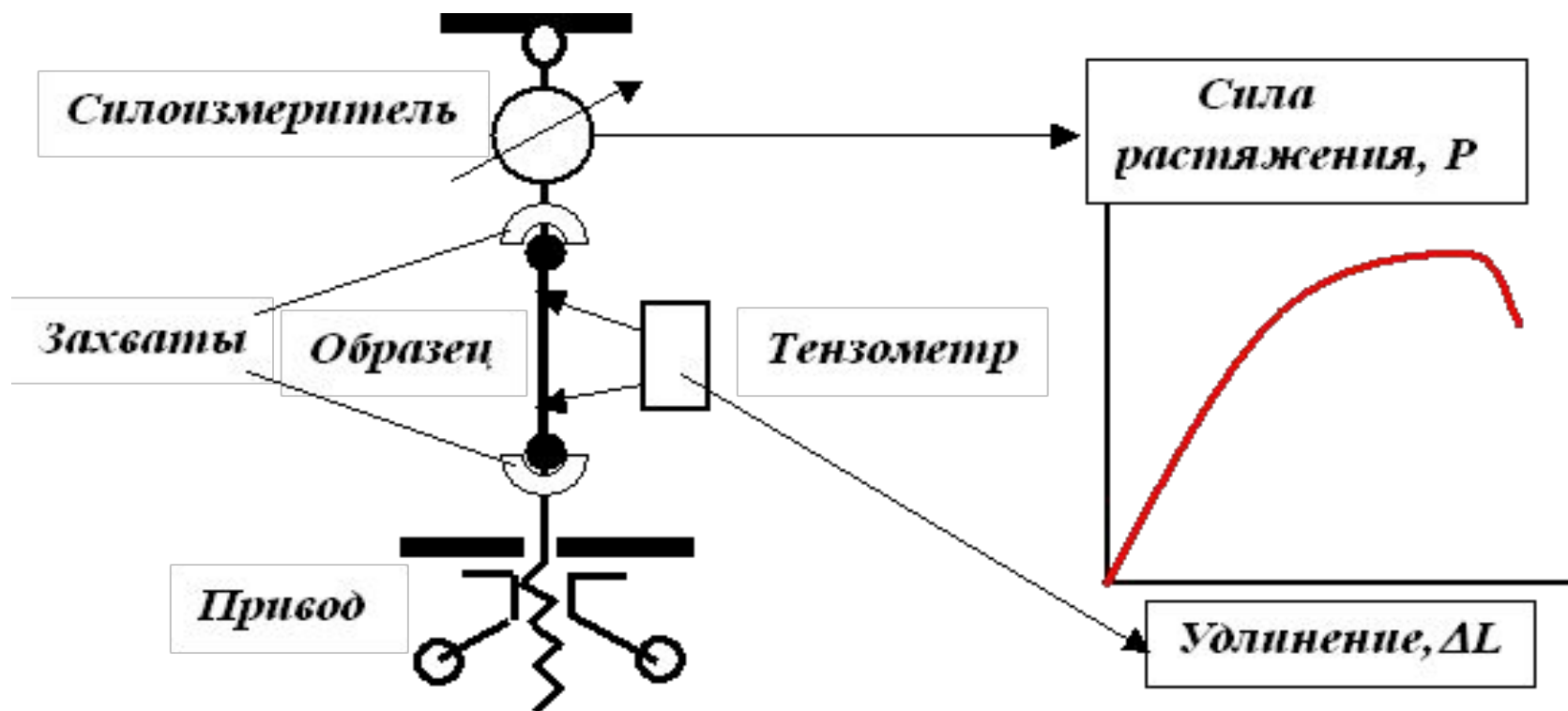


## *Образец для испытаний*

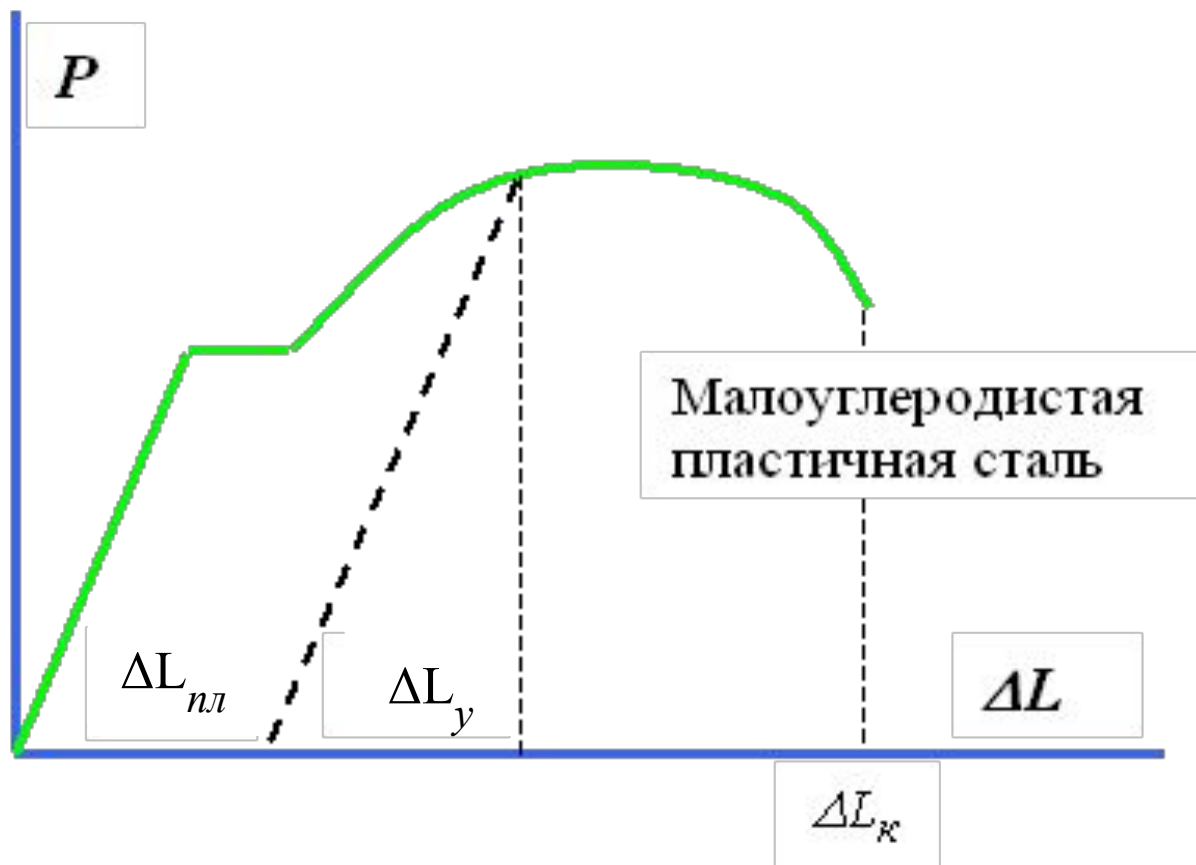
$L_0$  - расчетная длина, база измерений удлинения;  $P$  – растягивающая сила,

$$F_0 = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{- начальная площадь поперечного сечения образца}$$

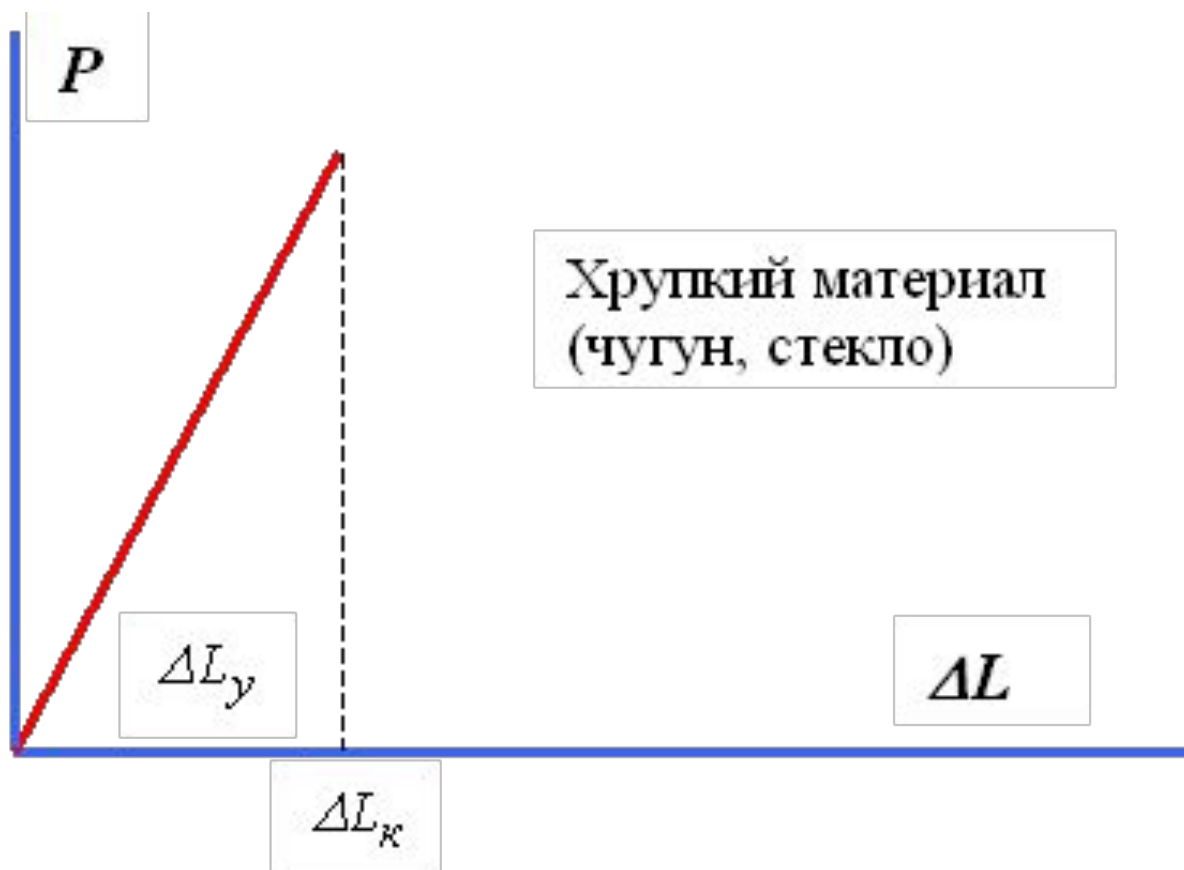
# Машина для испытаний материалов



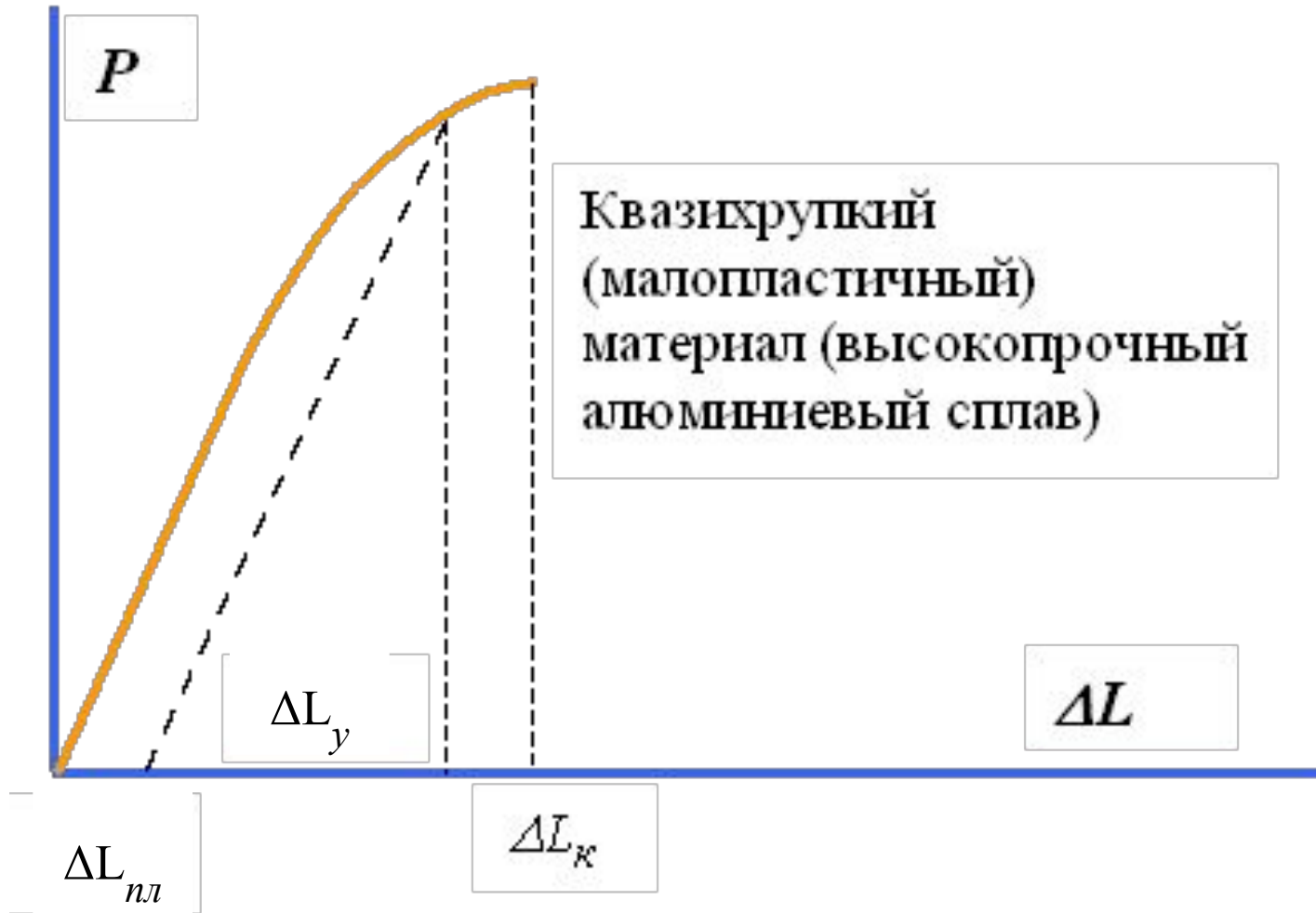
# Диаграмма растяжения пластичного материала



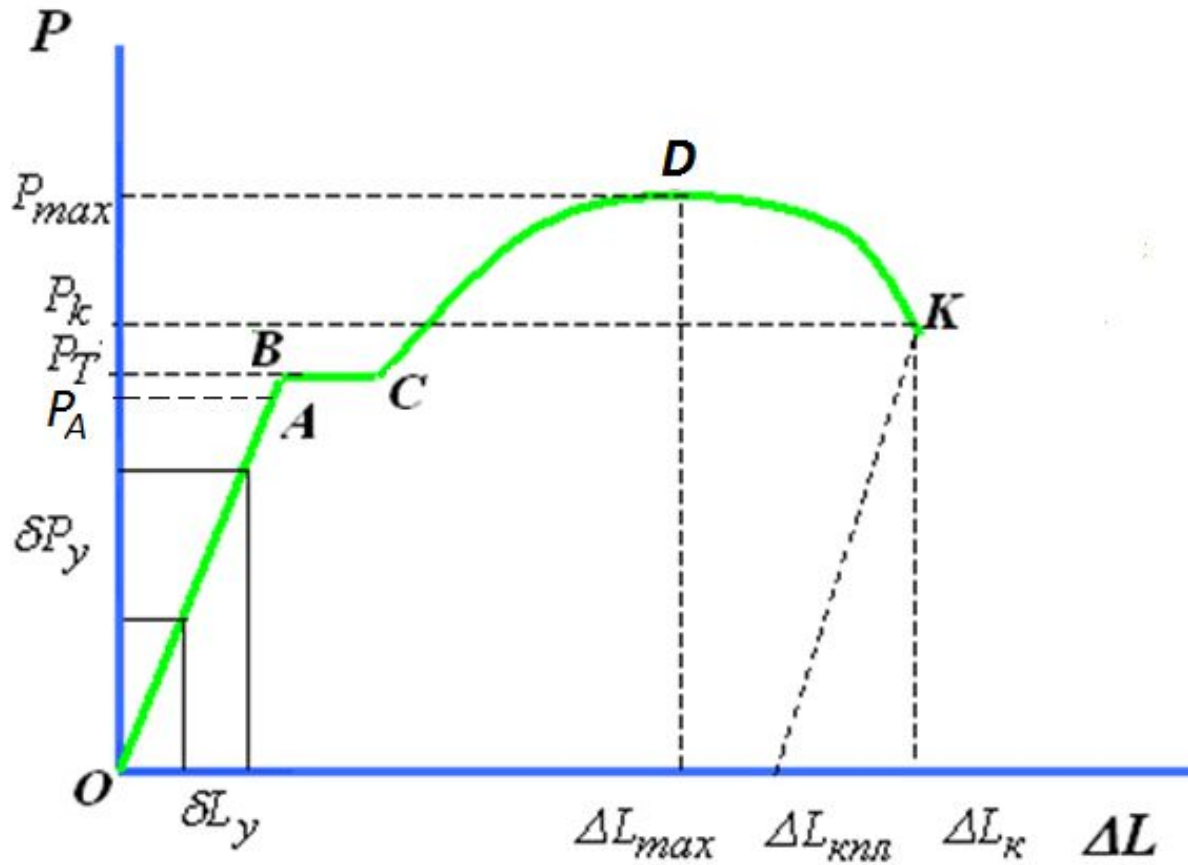
# Диаграмма растяжения хрупкого материала



# Диаграмма растяжения квазихрупкого материала



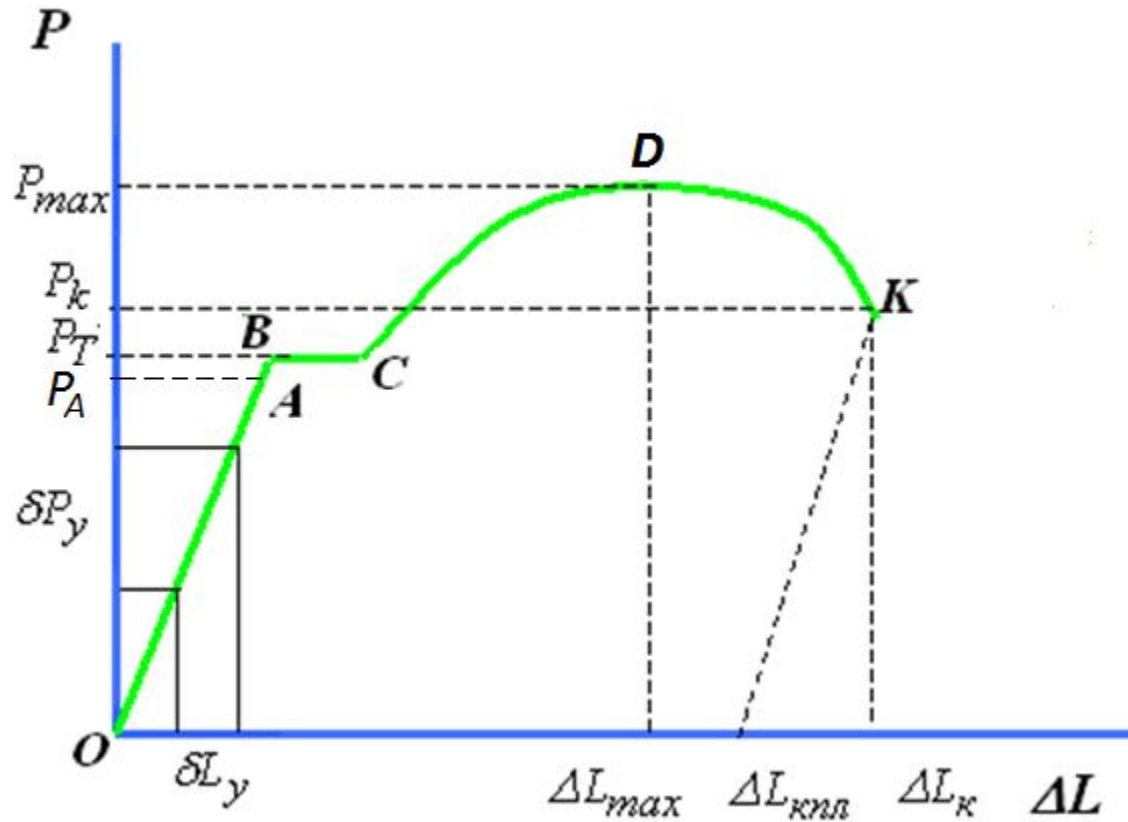
# Определение модуля упругости



$$E = \frac{\delta P_y}{F_0} \cdot \frac{L_0}{\delta L_y}$$



# Определение предела текучести, предела прочности и истинного напряжения разрыва

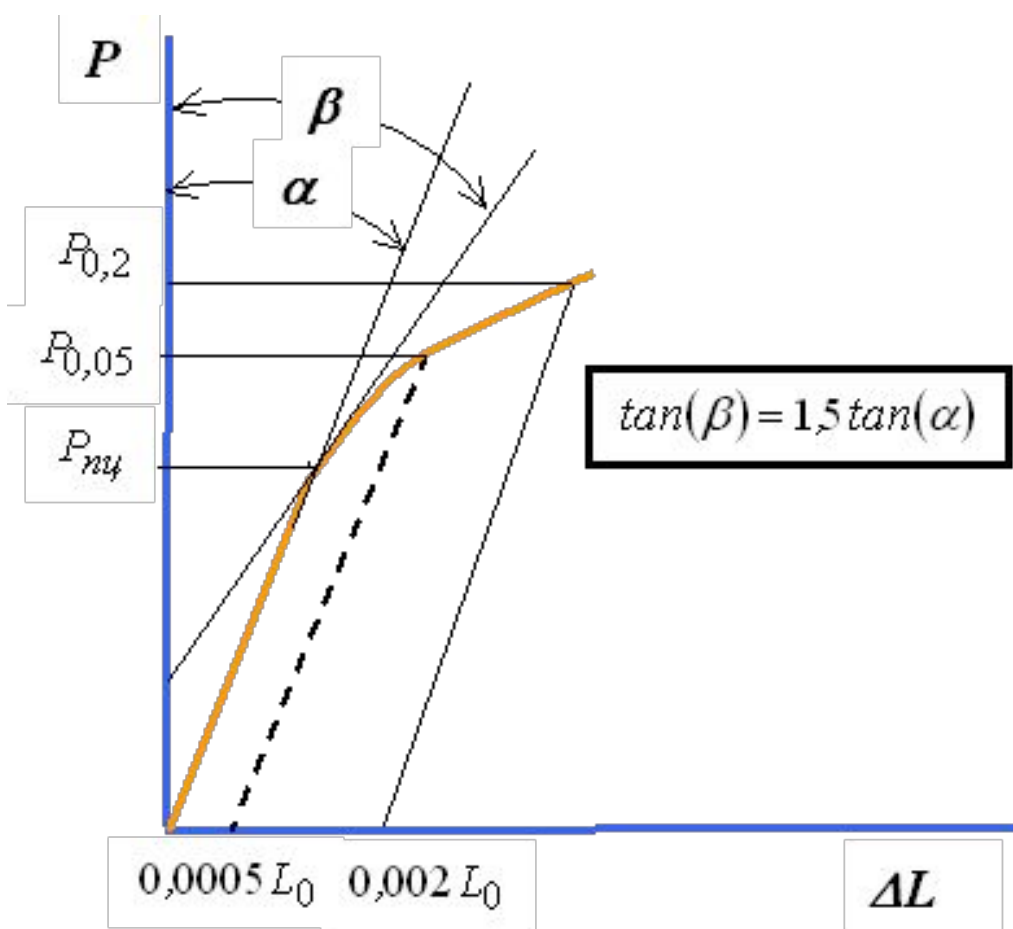


$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}$$

$$\sigma_b = \frac{P_{max}}{F_0}$$

$$S_k = \frac{P_k}{F_k}$$

# Определение предела пропорциональности, предела упругости и условного предела текучести

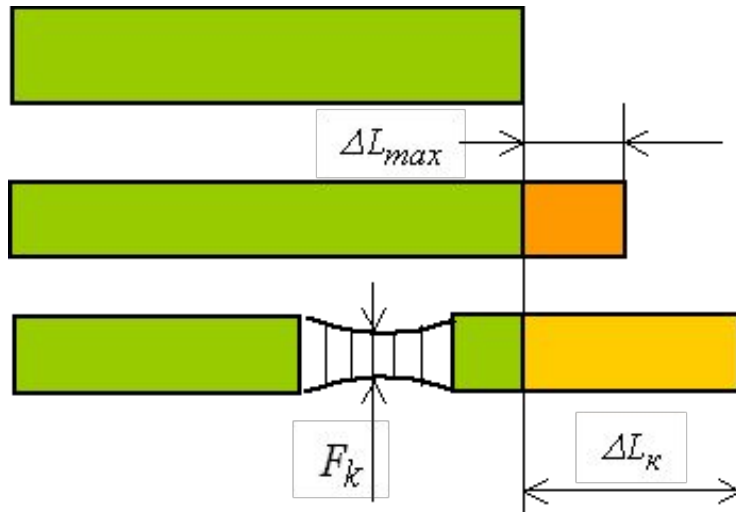
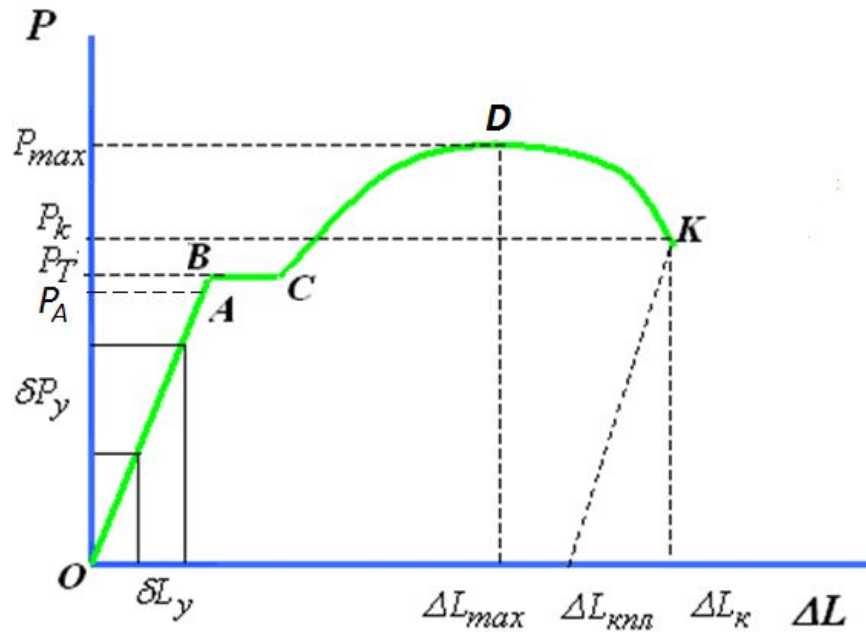


$$\sigma_{ny} = \frac{P_{ny}}{F_0}$$

$$\sigma_{0,05} = \frac{P_{0,05}}{F_0}$$

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0}$$

# Стадии деформации образца, относительное удлинение и относительное сужение



$$\delta_p = \frac{\Delta L_{max}}{L_0}$$

$$\delta = \frac{\Delta L_{кнл}}{L_0}$$

$$\psi = \frac{F_0 - F_K}{F_0}$$

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{\Delta L_T}{L_0}$$

# Пределные характеристики материалов

- Предел текучести для пластичных материалов -  $\sigma_T$
- Временное сопротивление или предел прочности для хрупких материалов -  $\sigma_B$
- Расчетная характеристика – допускаемое напряжение  $[\sigma]$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}(\sigma_T, \sigma_B)}{n(n_T, n_B)}$$

# Жесткость и податливость стержня

Произведение модуля упругости на площадь поперечного сечения  $EF$  называю *жесткостью поперечного сечения* стержня при растяжении.

Жесткость  $EF$  поперечного сечения, деленную на длину  $L$  стержня

$$k = \frac{EF}{L},$$

называют *жесткостью стержня*.

Величину  $\lambda$ , обратную жесткости  $k$

$$\lambda = \frac{1}{k},$$

называют *податливостью стержня*.

Для стержня длиной  $L$ , нагруженного продольными силами  $P$ , имеют место следующие зависимости между силой  $P$  и удлинением  $\Delta$ :

$$P = k\Delta \quad \text{и} \quad \Delta = \lambda P.$$

# Испытание на сжатие

## *Особенности испытания на сжатие*

- Трудно обеспечить соосность нагружения
- Длинные образцы теряют устойчивость
- Чем меньше отношение длины образца к его диаметру, тем заметнее влияние трения на торцах образца, которое приводит к образованию бочкообразной формы образца из пластичных материалов
- По той же причине образцы из пластичных материалов нельзя довести до разрушения

# *Механические характеристики, определяемые*

## *при испытании хрупких и пластичных*

- ~~ГОСТом предусматривается~~ **по ГОСТ 25.503** по результатам испытаний образцов на сжатие определение следующих механических характеристик: модуля упругости, предела пропорциональности, предела упругости, физического предела текучести, условного предела текучести, предела прочности
- испытывают цилиндрические образцы четырех типов: с гладкими торцами (три типа) и торцевыми выточками

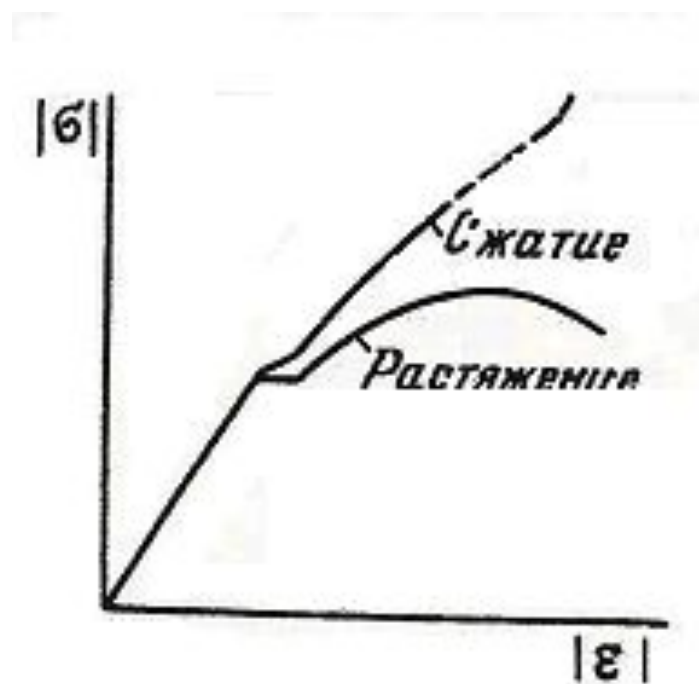


## *Механические характеристики, определяемые при испытании хрупких и пластичных материалов на сжатие по ГОСТ 25.503*

- По результатам испытания строится диаграмма сжатия в координатах сжимающая нагрузка  $P$  – укорочение образца  $\Delta h$
- Процедура определения прочностных характеристик при сжатии практически не отличается от процедуры их определения при растяжении
- Сопоставление диаграмм растяжения и сжатия пластичных материалов показывает, что на начальной стадии деформирования эти диаграммы совпадают и характеристики сопротивления начальным пластическим деформациям ( $\sigma_{\text{пц}}, \sigma_{0,05}, \sigma_{\text{T}}, \sigma_{0,2}$ ) практически одинаковы



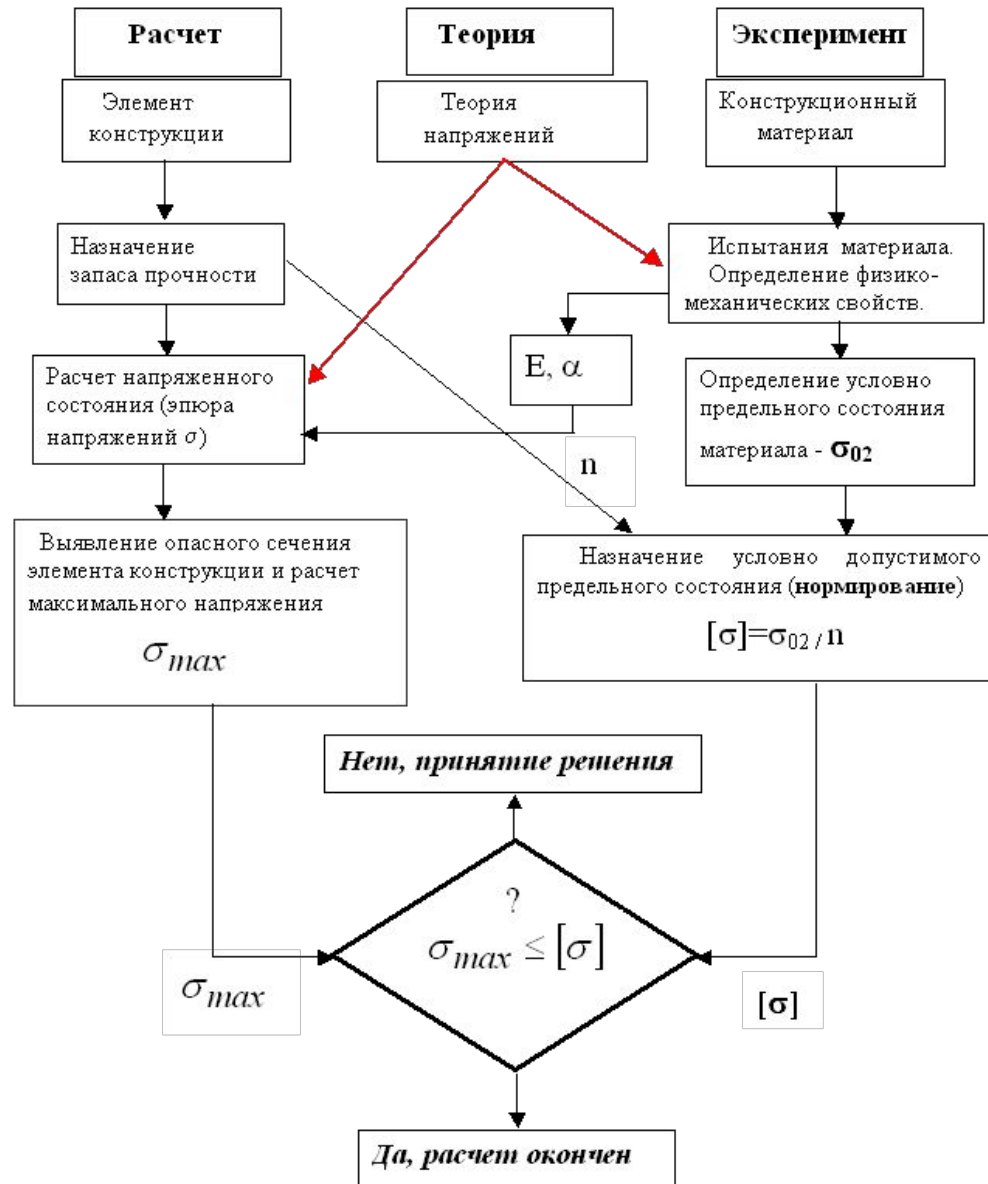
# *Сравнение диаграмм растяжения и сжатия пластичного материала*



## *Сравнение диаграмм растяжения и сжатия пластичного материала*

- При развитых пластических деформациях вид кривой сжатия существенно отличается от характера кривой растяжения. Кривая сжатия идет выше, круче. Она не обрывается, поскольку невозможно довести образец до разрушения.
- Диаграмма сжатия пластичного материала должна быть ограничена величиной максимальной деформации, при которой еще испытывается материал образца, а не захватных приспособлений испытательной машины

# Алгоритм расчета на прочность



# Алгоритм расчета на жесткость

