

Дано уравнение второго порядка с двумя переменными

$$x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$$

Запишем данное уравнение в матричном виде:

$$(x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = (4 \ 2).$$



Находим собственные значения

матрицы $A := -1$
 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

Находим теперь собственные векторы,
соответствующие найденным собственным
значениям и превращаем их в

$$\bar{e}_1^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \bar{e}_2^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Составим матрицу ортогонального перехода от начального
базиса к ортонормированному:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В новом базисе исходное уравнение примет
новый вид:

$$3x'^2 - y'^2 + (4 \ 2)T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 5 = 0 \text{ или } 3x'^2 - y'^2 + 3\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' - 5 = 0.$$

Новые координаты выражаем через
старые

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

Выделяем полные
квадраты

$$9\left(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6 = 0.$$

Выполняем параллельный
перенос:

$$x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Получаем канонический
вид

ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ:

$$3x^{n2} - y^{n2} - 6 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x^{n2}}{2} - \frac{y^{n2}}{6} = 1.$$

Очевидно, это уравнение гиперболы.

