Дано уравнение второго порядка с двумя переменными

$$x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$$

Запишем данное уравнение в матричном виде:

$$(x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0,$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (4\ \ 2)$.

Находим собственные значения матрицы А: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

Находим теперь собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям и превращаем их в

$$\overline{e_1}^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \overline{e_2}^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Составим матрицу ортогонального перехода от начального базиса к ортонормированному:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В новом базисе исходное уравнение примет новый вид:

$$3x'^2 - y'^2 + (4\ \ 2)T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 5 = 0 \text{ или } 3x'^2 - y'^2 + 3\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' - 5 = 0.$$

Новые координаты выражаем через стары

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y,\ y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

Выделяем полные квадр

$$9(x' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - (y' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 6 = 0.$$

Выполняем параллельный перенос:

$$x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{2}},\ y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Получаем канонический вид
исходного уравнения:

$$3x''^2 - y''^2 - 6 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{6} = 1.$$

Очевидно, это уравнение гиперболы.