Определение предела последовательности

Число a называется *пределом последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\ :\ \forall\ n > n_0\ \Rightarrow\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Нахождение пределов по определению

Докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

По определению

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\ :\ \forall\ n > n_0\ \Rightarrow\ |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon.$$

Обозначим $\sqrt[n]{n} - 1 = a_n$, тогда по формуле бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2\,!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3\,!} + \quad \ldots \quad + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)x^k}{k\,!} + \ \ldots$$

$$n = (1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \ldots.$$

Так как $\sqrt[n]{n} - 1 > 0$, каждое слагаемое в полученном выражении положительно, следовательно, верна следующая оценка

$$n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2.$$

Отсюда,

$$a_n^2 < \frac{2}{n-1} \Rightarrow a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \text{ или}$$

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Найдем n, для которых будет выполняться неравенство $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. Учитывая построенные оценки для a_n, найдем n из неравенства

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n-1} < \varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1.$$

Таким образом, неравенство $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > n_0 = \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$, что доказывает, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Применение теорем об арифметике

Теорема об арифметике пределов последовательности.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *тогда:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha a$ *для любого действительного числа* α;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *если* $b \neq 0$.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.

Р е ш е н и е. Числитель и знаменатель дроби стремятся к ∞, имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Дробь $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, знаменатель дроби

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Пределы с факториалами

Факториалом натурального числа n называется натуральное число $n!$, равное произведению чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Очевидны равенства

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = n!\,(n+1)$$

$$(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)\,(n+2) = n!\,(n+1)\,(n+2) = (n+1)!\,(n+2).$$

При вычислении пределов последовательностей, содержащих разные факториалы, необходимо выразить все факториалы через самый младший:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!((n+1)-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Шкала роста

Последовательности $\ln^a n \ (\forall a)$, $n^b \ (\forall b > 0)$, $a^n \ (\forall a > 1)$, $n!$, n^n являются бесконечно большими.

При $n \to \infty$ верна цепочка неравенств

$$\underbrace{\ln^a n}_{\forall a} < \underbrace{n^b}_{\forall b>0} < \underbrace{a^n}_{\forall a>1} < n! < n^n,$$

которую называют ***шкалой роста.***

Для элементов шкалы можно записать

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{b} = 0,$$

где m – меньший элемент, b – больший элемент шкалы.

Так предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^{20}} = \infty$, а предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{1{,}01^n} = 0$.

Пример вычисления предела

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^2+10n+4}{n^2+1}$.

Р е ш е н и е. На бесконечности числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, т.е. имеем неопределенность:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+10n+4}{n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Для раскрытия неопределенности вынесем за скобки в числителе и знаменателе n в старшей степени:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+10n+4}{n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2\left(3+\frac{10}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Величины $\frac{10}{n}$, $\frac{4}{n^2}$, $\frac{1}{n^2}$ являются бесконечно малыми при $n \to \infty$, т.е. стремятся к нулю, следовательно:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2\left(3+\frac{10}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^2}{n^2} = 3.$$

Эквивалентные последовательности

Последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ называются эквивалентными, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1.$$

Эквивалентные последовательности обозначаются $a_n \sim b_n$.

Например, последовательности $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$, а так же последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$и $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентны, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Аналогично, многочлен $a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_n$ эквивалентен слагаемому, содержащему старшую степень n, то есть

$$a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_n \sim a_0n^k, \text{ так как } \lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_n}{a_0n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1\frac{1}{n}+\ldots+a_n\frac{1}{n^k}}{a_0}=1.$$

Поэтому при нахождении пределов, содержащих действия с многочленами, слагаемые с младшими степенями можно отбросить (только не в разности эквивалентных!) :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2}+n\right)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2}=4.$$

Различные приемы нахождения пределов

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{\sqrt[3]{8n^3+n^2+2}}$.

Р е ш е н и е. Перейдем к эквивалентным величинам в числителе и знаменателе:

$$4n^2+1\sim 4n^2;\ \ 8n^3+n^2+2\sim 8n^3 \text{ при } n\to\infty,$$

и вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{\sqrt[3]{8n^3+n^2+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2}+n}{\sqrt[3]{8n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n}=\frac{3}{2}.$$

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-(n-1)^4}$

Р е ш е н и е. В числителе можно перейти к эквивалентным бесконечно большим, но в знаменателе такой переход «превратит» разность бесконечно больших в выражение, тождественно равное нулю:

$$(n+1)^4-(n-1)^4 \sim n^4-n^4=0 \text{ НЕВЕРНО!}$$

Преобразуем разность в знаменателе, раскрывая степени:

$$(n+1)^4-(n-1)^4=\left((n+1)^2-(n-1)^2\right)\left((n+1)^2+(n-1)^2\right)=$$

$$=\left(n^2+2n+1-\left(n^2-2n+1\right)\right)\left((n+1)^2+(n-1)^2\right)=4n\left((n+1)^2+(n-1)^2\right)\sim 4n\cdot 2n^2=8n^3,$$

и вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-(n-1)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^3-(n)^3}{8n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3}{8n^3}=\frac{7}{8}.$$

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right)$

Р е ш е н и е. Перейти к эквивалентным в знаменателях дробей нельзя, так как при этом:

$$\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\sim\frac{n^2}{n}-\frac{n^3}{n^2}=n-n\equiv 0 \text{ НЕПРАВИЛЬНО!}$$

Преобразуем разность дробей, переходя к общему знаменателю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2+1)-n^3(n+1)}{(n+1)(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2-n^4-n^3}{n\cdot n^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^3}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3}{n^3}=-1\,.$$

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

Р е ш е н и е. Перейти к эквивалентным под знаками корней нельзя, так как при этом разность будет тождественно равна нулю, поэтому преобразуем выражения, домножив и разделив на сопряженное относительно разности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}=$$

Произведение в числителе преобразуем в разность квадратов, а в знаменателе перейдем к эквивалентным

$$\square=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n}=0.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

При подстановке бесконечно большого значения n в выражение в пределе, получается неопределенность $[1^\infty]$.

Важно: в данном случае $[1^\infty]\neq 1$, так как в основании не 1, а переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, которая при $n\to\infty$ принимает значения, сколь угодно близкие к 1, но не равные 1.

Часто второй замечательный предел будем применять в следующей форме.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

где $a_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$

При подстановке бесконечно большого значения n в выражение в пределе, получается неопределенность $[1^\infty]$, для раскрытия которой воспользуемся вторым замечательным пределом. Перепишем предел в следущем виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-2n)}\right)^n.$$

Преобразуем выражение в показателе:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-2n)}\right)^{-2n\cdot\frac{1}{(-2n)}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(-2n)}\right)^{-2n}\right)^{\frac{1}{(-2n)}\cdot n}$$

Выражение в скобках $\left(\left(1+\frac{1}{(-2n)}\right)^{-2n}\right)\to e$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(-2n)}\right)^{-2n}\right)^{\frac{1}{(-2n)}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{n}{2n}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Вычислить предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

- 1/2
- 1
- ∞
- 0

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

- ∞
- 3
- 0
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2}$
- 2

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^2+n}}$

- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2}$
- ∞
- 1
- 0

Вычислить предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+2)\,!+(n+1)\,!}{(n+3)\,!}$

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{3}$
- 1
- ∞
- 0
- 2

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{\sqrt{n^4+1}}\right)^n$

- 0
- 1
- e^{-1}
- ∞
- $2e$
- e^{-2}

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+3}}\right)^n$.

- $-\sqrt{e}$
- ∞
- 0
- $\sqrt{e}$
- $\frac{1}{\sqrt{e}}$
- $\frac{e}{2}$

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n$

- ∞
- e^2
- 0
- $-e^2$
- e^{-2}
- 1