Лекция 14

Динамика системы вблизи цикла

Основные понятия. Система первого приближения

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

имеющую T-периодическое решение

$$x = \xi(t) \ (\xi(t+T) = \xi(t).$$

Графиком такого решения будет замкнутая фазовая кривая – цикл Γ.

Точка $x_0 = \xi(0)$ отмечает на Γ начальное положение этого решения. Всякое решение, стартующее с любой другой точки цикла, будет двигаться по этой же замкнутой кривой. Цикл Γ – инвариантное множество системы (1).

Если начальную точку взять в окрестности цикла, то траектория соответствующего решения может вести себя различным образом.

Варианты поведения траектории решения

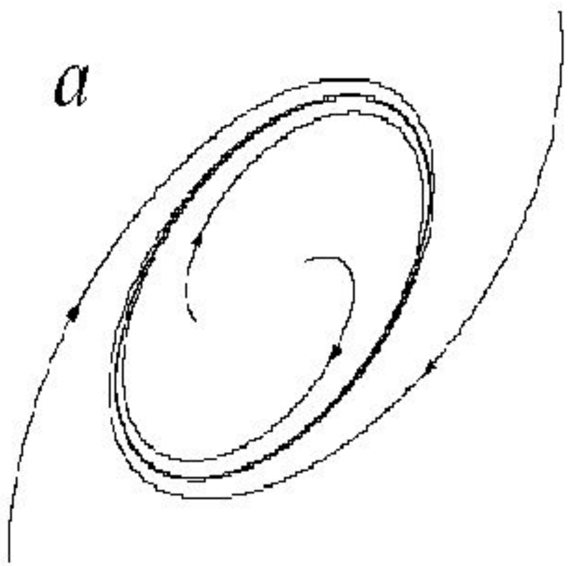
а) решение приближается к циклу так, что отклонение от цикла стремится к нулю; другими словами, фазовая траектория наматывается на цикл;

б) решение движется вдоль цикла и формирует замкнутую фазовую кривую – новый цикл, расположенный рядом с исходным;

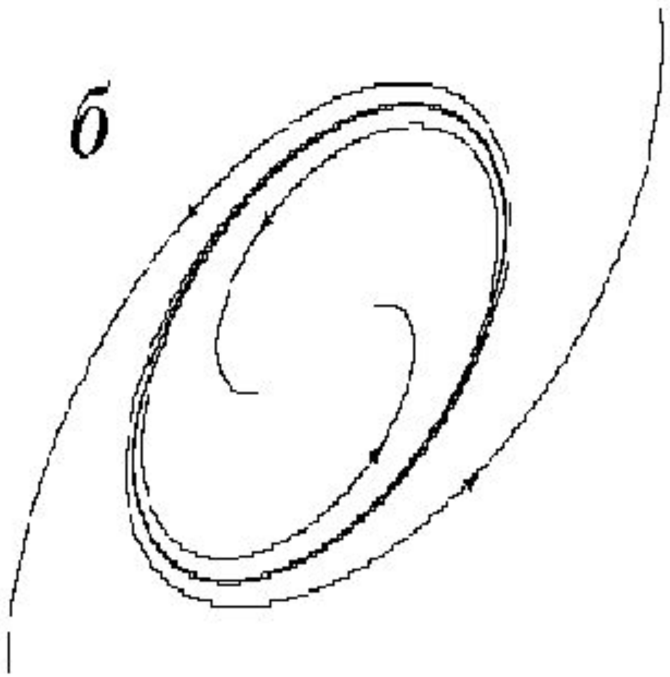
в) решение удаляется от цикла; фазовая кривая разматывается по спирали.

Среди возможных сочетаний динамики снаружи и внутри цикла обычно выделяют следующие.

Устойчивый предельный цикл:

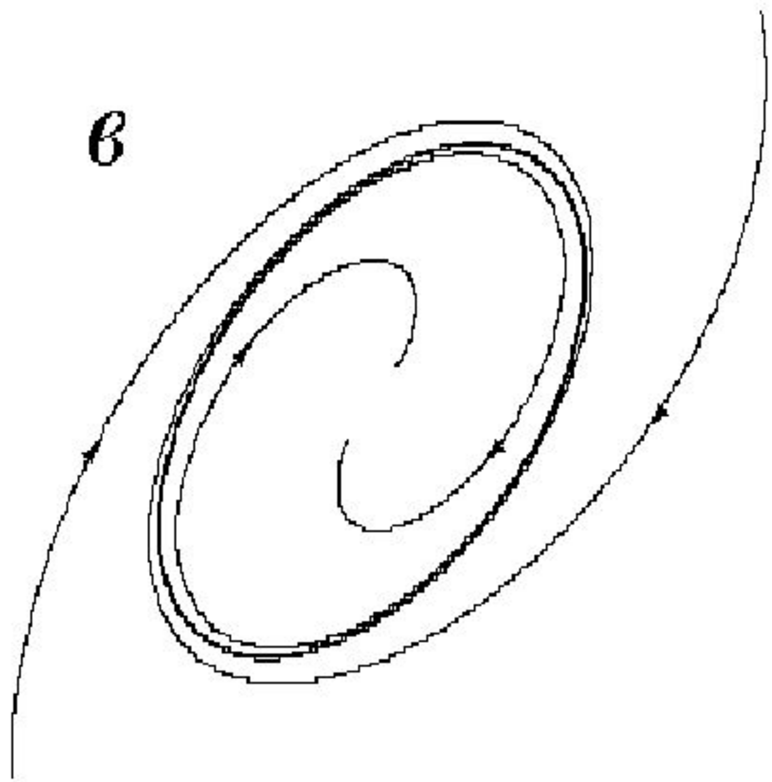


Неустойчивый цикл:



Полуустойчивый цикл

в



Устойчивость предельного цикла

Нас интересуют условия, при которых предельный цикл имеет сильное экспоненциальное притяжение.

Предполагается, что в U – некоторой окрестности кривой Γ – определена функция $\gamma(x) = \mathrm{argmin}_{y\in\Gamma} \|y - x\|$, задающая для каждого x из окрестности U ближайшую к ней точку $\gamma(x)$ с цикла Γ. Тогда функция $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ задает отклонение точки x от цикла Γ.

О п р е д е л е н и е 1.

Решение $\xi(t)$ будем называть э к с п о н е н ц и а л ь н о о р б и т а л ь н о у с т о й ч и в ы м, если найдутся такие $\alpha > 0$, $K > 0$, что справедливо неравенство

$$\|\Delta(x(t))\| \leq Ke^{-\alpha t}\|\Delta(x_0)\|$$

для любого решения $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

Динамика малых отклонений, как и в случае точки покоя, определяется системой первого приближения.

Рассмотрим для T-периодического решения $\xi(t)$ системы (1) новую переменную $z = x - \xi(t)$. Подставив $x = \xi(t) + z$ в систему (1) и разложив ее правую часть в ряд Тейлора, получим

$$\dot{\xi} + \dot{z} = f(\xi(t) + z) = f(\xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))z + \dots .$$

Отбрасывая нелинейные члены с учетом тождества

$$\dot{\xi} = f(\xi(t)),$$

получим линейную систему первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)). \tag{2}$$

Матрица $F(t)$ этой системы вслед за функцией $\xi(t)$ является T-периодической.

Мультипликаторы – характеристики устойчивости цикла

Рассмотрим для системы

$$\dot{z} = A(t)z, \qquad (3)$$

где $A(t)$ – произвольная T-периодическая $(n \times n)$-матрица, фундаментальную матрицу

$$Z(t) = [z_1(t)\ z_2(t)\ \dots\ z_n(t)],$$

составленную из линейно независимых решений системы (3) с начальными условиями

$$z_1(0) = (1, 0, \dots, 0)^\top,\ z_2(0) = (0, 1, \dots, 0)^\top, \dots, z_n(0) = (0, 0, \dots, 1)^\top.$$

Л е м м а 1.

Для фундаментальной матрицы справедливо тождество

$$Z(t+T) = Z(t) \cdot Z(T) \quad (4)$$

Матрица

$$B = Z(T),$$

задающая отображение за период T системы (3), называется

м а т р и ц е й м о н о д р о м и и.

Любое решение $z(t)$ системы (3) в моменты времени, кратные периоду, благодаря (4) легко выражается с помощью матрицы монодромии через начальные данные:

$$z(kT) = Z(kT)z(0) = Z((k-1)T)Z(T)z(0) = \dots = B^k z(0).$$

Рассмотрим постоянную матрицу

$$\Lambda = \frac{1}{T}\ln B \ (B = e^{T\Lambda})$$

и матричную функцию $\Phi(t) = Z(t)e^{-t\Lambda}$.

Л е м м а 2. *Матричная функция* $\Phi(t)$ *является* T*-периодической.*

Доказательство следует из цепочки равенств:

$$\Phi(t+T) = Z(t+T)e^{-(t+T)\Lambda} = Z(t)Z(T)e^{-T\Lambda}e^{-t\Lambda} =$$

$$= \{Z(T)e^{-T\Lambda} = I\} = Z(t)e^{-t\Lambda} = \Phi(t)$$

Приводимость

В системе (3) сделаем замену переменных $z = \Phi(t)y$, где y – новая переменная.

Т е о р е м а 1. *Система (3) в новых переменных y имеет вид*

$$\dot{y} = \Lambda y \quad (5)$$

Как видим, линейная система с периодическими коэффициентами (3) подходящей заменой переменных приводится к системе (5) с постоянной матрицей.

Собственные значения ρ_i $(i = 1, ..., n)$ матрицы монодромии $B = Z(T)$ называют **мультипликаторами** системы (3). Собственные числа λ_i матрицы Λ – **характеристические показатели** – связаны с мультипликаторами соотношениями

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \operatorname{Ln} \rho_i, \quad \rho_i = e^{\lambda_i}.$$

Критерием асимптотической устойчивости решения $\bar{y} = 0$ системы (5) является условие

$$Re\lambda_i < 0$$

В силу равенства

$$|\rho_i| = e^{Re\lambda_i T}$$

это эквивалентно условию

$$|\rho_i| < 1.$$

Полученное неравенство и теорема 1 дают следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Для асимптотической устойчивости решения $\bar{z} = 0$ системы (3), необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы удовлетворяли неравенствам*

$$|\rho_i| < 1, \ (i = 1, ..., n).$$

Экспоненциальная устойчивость цикла

Система первого приближения (2) в общем классе линейных систем с периодическими коэффициентами (3) имеет важную особенность. Действительно, вектор-функция $r(t) = f(\xi(t))$ в силу равенств

$$\dot{r}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))\dot{\xi}(t), \quad \dot{\xi}(t) = f(\xi(t))$$

является частным решением системы первого приближения (2). Отсюда следует равенство $r(T) = Br(0)$, или, с учетом T-периодичности функции $r(t)$, равенство $r(0) = Br(0)$. Как видим, вектор $r(0)$ является собственным вектором матрицы B с соответствующим собственным значением, равным единице.

Таким образом, в случае цикла матрица монодромии B обязательно имеет мультипликатор $\rho_1 = 1$. Полученное означает, что точка покоя $\bar{z} = 0$ системы первого приближения (2) никогда не может быть асимптотически устойчивой.

Следует подчеркнуть, что для экспоненциальной устойчивости цикла этого и не требуется. Вопрос об экспоненциальной устойчивости цикла Γ решается в зависимости от расположения остальных мультипликаторов $\rho_2, \ldots, \rho_n$.

Критерий экспоненциальной орбитальной устойчивости

Т е о р е м а 3 (Андронова – Витта). *Для экспоненциальной орбитальной устойчивости решения* $\xi(t)$ *системы (1) необходимо и достаточно, чтобы мультипликаторы* $\rho_2, ..., \rho_n$ *удовлетворяли неравенствам*

$$|\rho_i| < 1, \, i = 2, ..., n.$$

Необходимое условие экспоненциальной орбитальной устойчивости

Из теоремы Виета и формулы Лиувилля следуют равенства

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_n = det B = e^{\int_0^T trF(t)dt}.$$

Неравенство

$$\int_0^T trF(t)dt < 0 \quad (6)$$

по теореме Андронова – Витта является в общем n-мерном случае необходимым условием экспоненциальной устойчивости цикла Γ.

Случай цикла на плоскости

В двумерном случае справедливо равенство

$$\rho_2 = detB,$$

что делает неравенство (6) не только необходимым, но одновременно и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла (критерий Пуанкаре).

В случае цикла на плоскости мультипликатор ρ_2 имеет простой геометрический смысл, показывая при малых отклонениях, во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот. Величина ρ_2 может служить мерой устойчивости предельного цикла к начальным возмущениям.

Малость ρ_2 означает высокую степень устойчивости. При значениях $\rho_2 < 1$, но близких к единице, цикл устойчив слабо. При $\rho_2 > 1$ цикл неустойчив. Случай $\rho_2 = 1$ – критический. Здесь возможны различные варианты: цикл устойчив, но не экспоненциально; цикл полуустойчив; цикл находится в окружении других близких циклов и т. д.