



Лекция 14

Динамика системы вблизи цикла

Основные понятия. Система первого приближения

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

имеющую T -периодическое решение

$$x = \xi(t) \quad (\xi(t + T) = \xi(t)).$$

Графиком такого решения будет замкнутая фазовая кривая – цикл Γ .



Точка $x_0 = \xi(0)$ отмечает на Γ начальное положение этого решения. Всякое решение, стартующее с любой другой точки цикла, будет двигаться по этой же замкнутой кривой. Цикл Γ – инвариантное множество системы (1).

Если начальную точку взять в окрестности цикла, то траектория соответствующего решения может вести себя различным образом.



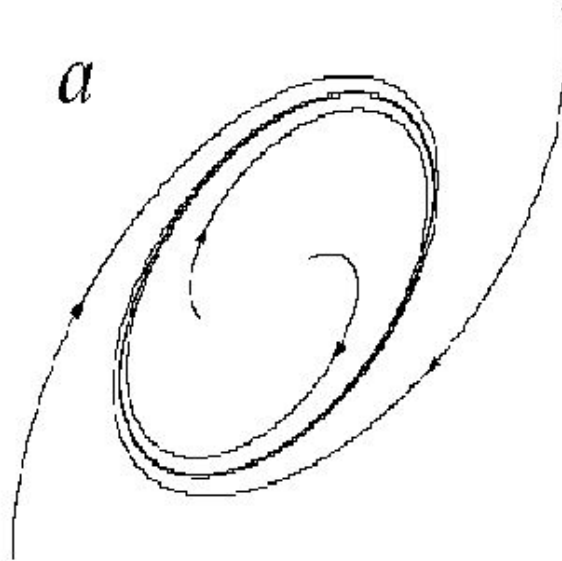
Варианты поведения траектории решения

- а) решение приближается к циклу так, что отклонение от цикла стремится к нулю; другими словами, фазовая траектория наматывается на цикл;
- б) решение движется вдоль цикла и формирует замкнутую фазовую кривую – новый цикл, расположенный рядом с исходным;
- в) решение удаляется от цикла; фазовая кривая разматывается по спирали.



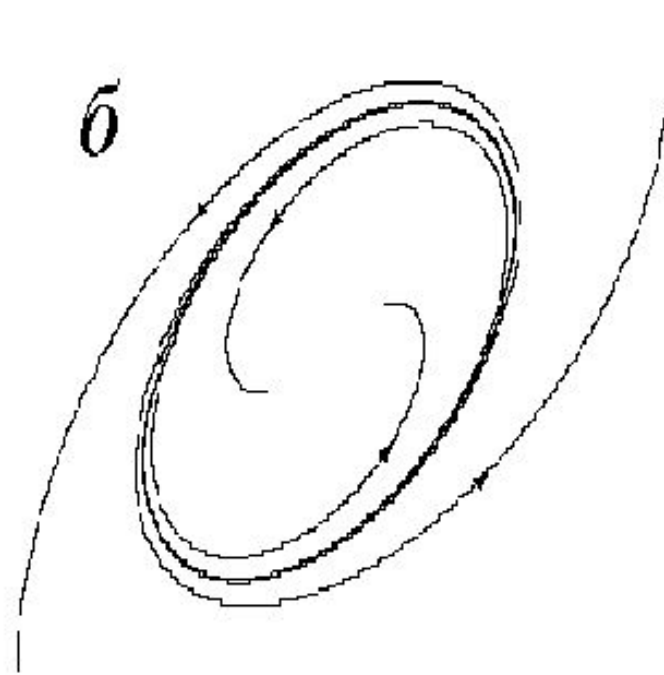
Среди возможных сочетаний динамики снаружи и внутри цикла
обычно выделяют следующие.

Устойчивый предельный цикл:





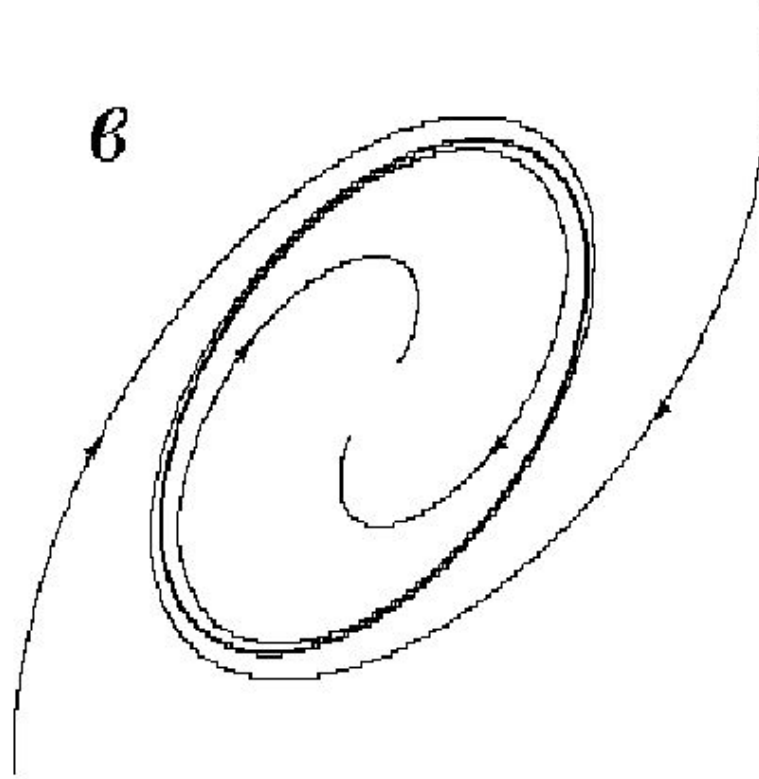
Неустойчивый цикл:





Полуустойчивый цикл

в





Устойчивость предельного цикла

Нас интересуют условия, при которых предельный цикл имеет сильное экспоненциальное притяжение.

Предполагается, что в U – некоторой окрестности кривой Γ – определена функция $\gamma(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \Gamma} \|y - x\|$, задающая для каждого x из окрестности U ближайшую к ней точку $\gamma(x)$ с цикла Γ . Тогда функция $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ задает отклонение точки x от цикла Γ .



О п р е д е л е н и е 1.

Решение $\xi(t)$ будем называть э к с п о н е н ц и а л ь н о
о р б и т а л ь н о у с т о й ч и в ы м, если найдутся такие $\alpha > 0$, $K > 0$,
что справедливо неравенство

$$\|\Delta(x(t))\| \leq K e^{-\alpha t} \|\Delta(x_0)\|$$

для любого решения $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

Динамика малых отклонений, как и в случае точки покоя, определяется системой первого приближения.



Рассмотрим для T -периодического решения $\xi(t)$ системы (1) новую переменную $z = x - \xi(t)$. Подставив $x = \xi(t) + z$ в систему (1) и разложив ее правую часть в ряд Тейлора, получим

$$\dot{\xi} + \dot{z} = f(\xi(t) + z) = f(\xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))z + \dots$$

Отбрасывая нелинейные члены с учетом тождества

$$\dot{\xi} = f(\xi(t)),$$

получим линейную систему первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)). \quad (2)$$

Матрица $F(t)$ этой системы вслед за функцией $\xi(t)$ является T -периодической.



Мультипликаторы – характеристики устойчивости цикла

Рассмотрим для системы

$$\dot{z} = A(t)z, \quad (3)$$

где $A(t)$ – произвольная T -периодическая $(n \times n)$ -матрица, фундаментальную матрицу

$$Z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_n(t)],$$

составленную из линейно независимых решений системы (3) с начальными условиями

$$z_1(0) = (1, 0, \dots, 0)^\top, \ z_2(0) = (0, 1, \dots, 0)^\top, \ \dots, \ z_n(0) = (0, 0, \dots, 1)^\top.$$



Л е м м а 1.

Для фундаментальной матрицы справедливо тождество

$$Z(t + T) = Z(t) \cdot Z(T) \quad (4)$$

Матрица

$$B = Z(T),$$

задающая отображение за период T системы (3), называется

м а т р и ц е й м о н о д р о м и и.



Любое решение $z(t)$ системы (3) в моменты времени, кратные периоду, благодаря (4) легко выражается с помощью матрицы монодромии через начальные данные:

$$z(kT) = Z(kT)z(0) = Z((k-1)T)Z(T)z(0) = \dots = B^k z(0).$$



Рассмотрим постоянную матрицу

$$\Lambda = \frac{1}{T} \ln B \quad (B = e^{T\Lambda})$$

и матричную функцию $\Phi(t) = Z(t)e^{-t\Lambda}$.

Л е м м а 2. Матричная функция $\Phi(t)$ является T -периодической.

Доказательство следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \Phi(t + T) &= Z(t + T)e^{-(t+T)\Lambda} = Z(t)Z(T)e^{-T\Lambda}e^{-t\Lambda} = \\ &= \{Z(T)e^{-T\Lambda} = I\} = Z(t)e^{-t\Lambda} = \Phi(t) \end{aligned}$$



Приводимость

В системе (3) сделаем замену переменных $z = \Phi(t)y$, где y – новая переменная.

Т е о р е м а 1. Система (3) в новых переменных y имеет вид

$$\dot{y} = \Lambda y \quad (5)$$

Как видим, линейная система с периодическими коэффициентами (3) подходящей заменой переменных приводится к системе (5) с постоянной матрицей.



Собственные значения ρ_i ($i = 1, \dots, n$) матрицы монодромии $B = Z(T)$ называют мультипликаторами системы (3).

Собственные числа λ_i матрицы Λ – характеристические показатели – связаны с мультипликаторами соотношениями

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \text{Ln } \rho_i, \quad \rho_i = e^{\lambda_i T}.$$

Критерием асимптотической устойчивости решения $\bar{y} = 0$ системы (5)

является условие

$$\text{Re } \lambda_i < 0$$



В силу равенства

$$|\rho_i| = e^{\operatorname{Re} \lambda_i T}$$

это эквивалентно условию

$$|\rho_i| < 1.$$

Полученное неравенство и теорема 1 дают следующий результат.

Т е о р е м а 2. Для асимптотической устойчивости решения $\bar{z} = 0$ системы (3), необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы удовлетворяли неравенствам

$$|\rho_i| < 1, \quad (i = 1, \dots, n).$$



Экспоненциальная устойчивость цикла

Система первого приближения (2) в общем классе линейных систем с периодическими коэффициентами (3) имеет важную особенность. Действительно, вектор-функция $r(t) = f(\xi(t))$ в силу равенств

$$\dot{r}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))\dot{\xi}(t), \quad \dot{\xi}(t) = f(\xi(t))$$

является частным решением системы первого приближения (2). Отсюда следует равенство $r(T) = Br(0)$, или, с учетом T -периодичности функции $r(t)$, равенство $r(0) = Br(0)$. Как видим, вектор $r(0)$ является собственным вектором матрицы B с соответствующим собственным значением, равным единице.



Таким образом, в случае цикла матрица монодромии B обязательно имеет мультипликатор $\rho_1 = 1$. Полученное означает, что точка покоя $\bar{z} = 0$ системы первого приближения (2) никогда не может быть асимптотически устойчивой.

Следует подчеркнуть, что для экспоненциальной устойчивости цикла этого и не требуется. Вопрос об экспоненциальной устойчивости цикла Γ решается в зависимости от расположения остальных мультипликаторов ρ_2, \dots, ρ_n .



Критерий экспоненциальной орбитальной устойчивости

Т е о р е м а 3 (Андронова – Витта). Для экспоненциальной орбитальной устойчивости решения $\xi(t)$ системы (1) необходимо и достаточно, чтобы мультипликаторы ρ_2, \dots, ρ_n удовлетворяли неравенствам

$$|\rho_i| < 1, \quad i = 2, \dots, n.$$



Необходимое условие экспоненциальной орбитальной устойчивости

Из теоремы Виета и формулы Лиувилля следуют равенства

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n = \det B = e^{\int_0^T \text{tr} F(t) dt}.$$

Неравенство

$$\int_0^T \text{tr} F(t) dt < 0 \quad (6)$$

по теореме Андронова – Витта является в общем n -мерном случае необходимым условием экспоненциальной устойчивости цикла Γ .



Случай цикла на плоскости

В двумерном случае справедливо равенство

$$\rho_2 = \det B,$$

что делает неравенство (6) не только необходимым, но одновременно и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла (критерий Пуанкаре).

В случае цикла на плоскости мультипликатор ρ_2 имеет простой геометрический смысл, показывая при малых отклонениях, во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот. Величина ρ_2 может служить мерой устойчивости предельного цикла к начальным возмущениям.



Малость ρ_2 означает высокую степень устойчивости. При значениях $\rho_2 < 1$, но близких к единице, цикл устойчив слабо. При $\rho_2 > 1$ цикл неустойчив. Случай $\rho_2 = 1$ – критический. Здесь возможны различные варианты: цикл устойчив, но не экспоненциально; цикл полуустойчив; цикл находится в окружении других близких циклов и т. д.