Готовимся к ЕГЭ по математике.

Доцент кафедры ЕМО ОГБУ ДПО КИРО

М.Е.Чаплыгина

Задание №17

Задачи на оптимизацию.
Целевые функции.

Задачи на оптимизацию

(от лат. optimum – «наилучший») – задачи, которые возникают там, где необходимо выяснить как с помощью имеющихся средств достичь наилучшего результата

- Большую часть своих усилий человек тратит на поиск наилучшего, т.е. оптимального решения поставленной задачи. Задачи подобного рода носят общее название – экономические задачи на оптимизацию или экстремальные задачи. Эти задачи тесно связаны с практической деятельностью человека. Как добиваться наиболее высокого жизненного уровня, наивысшей производительности труда, наименьших потерь, максимальной прибыли, минимальной затраты времени – так ставятся вопросы, над которыми приходится думать каждому члену общества.

- «Особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: <u>как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды</u>»

П.Л. Чебышев

Как Пахом покупал землю

(Задача Льва Толстого)

— А цена, какая будет? — говорит Пахом.

— Цена у нас одна: 1000 руб. за день.

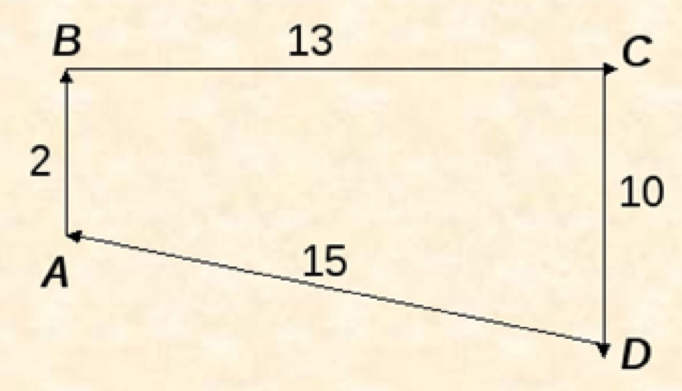
Не понял Пахом.

— Какая же это мера — день? Сколько в ней десятин будет?

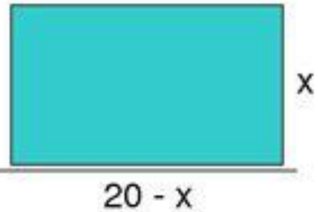
— Мы этого, — говорит, — не умеем считать. **А мы за день продаем; сколько обойдешь в день, то и твое, а цена дню 1000 рублей...**Какой хочешь круг забирай, только до захода солнца приходи к тому месту, с какого взялся. Что обойдешь, все твое.

Какой путь должен выбрать Пахом, чтобы получить большую площадь земли?

Только брызнуло из-за края солнце, вскинул Пахом скребку на плечо и пошел в степь…Верст 5 прошел…. Дай пройду еще верст пяток, тогда влево загибать начну. Пошел еще напрямик. «Ну, — думает, в эту сторону довольно забрал; надо загибать». Остановился, вырыл ямку побольше и загнул круто влево. Прошел еще и по этой стороне много; загнул второй угол. Оглянулся Пахом на шихан (бугорок).«Ну, — думает; — длинны стороны взял, надо эту покороче взять»….по третьей стороне всего версты две прошел. И до места все те же верст 15. «Нет, — думает, — хоть кривая дача будет, а надо прямиком поспевать». Вырыл Пахом поскорее ямку и повернул прямиком к шихану»



Задача: **Периметр прямоугольника равен 40 см. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы площадь была наибольшей?**



Решение:

- Составляем математическую модель. Пусть x – ширина прямоугольника, тогда длина – $20 - x$. Функция будет иметь вид: $S(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$, где $0<x<20$
- Находим наибольшее значение этой функции $S`(x) = 20 - 2x$, $20 – 2x = 0$, $x = 10$. $S(10) = 10 \cdot (20 - 10) = 100$

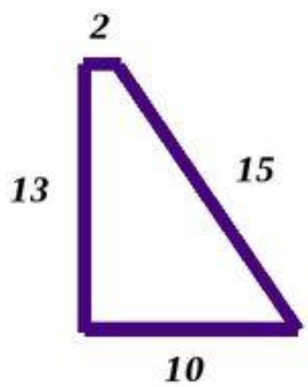
Ответ:

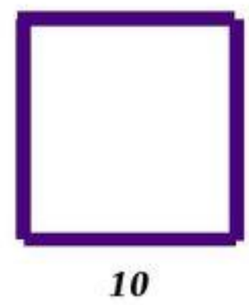
Длина и ширина прямоугольника равны 10 см.

Вывод:

Наибольшую площадь среди четырехугольников при заданном периметре имеет квадрат

Фигура Пахома | **Оптимальное решение**





P=2+15+13+10=40 км

*S=(2+10):2*13=78 кв. км*

*P = 10 * 4 = 40 км*

*S = 10 * 10 = 100 кв. км*

Задачи на оптимизацию – это исследовательские задачи, очень близкие по смыслу (но не по методам решения) к задачам с параметром. Сложность таких задач в том, что не всегда есть готовые методы решения и задача может потребовать своего подхода. ***Успех в*** решении таких задач заключается в ***систематическом тренинге.***

Основные этапы решения текстовой задачи:

- подробный разбор условия задачи для четкого понимания сути описанного в задаче процесса;
- выбор переменных, количество которых должно быть достаточным для того, чтобы составить уравнения и неравенства;
- формализация или составление математической модели (составление уравнений, неравенств или их систем);
- решение полученного уравнения, неравенства или системы;
- интерпретация полученного результата и непосредственно сам ответ на вопрос задачи.

В задачах оптимизации обычно заданы определённые условия производства какой-либо продукции или услуги и требуется найти значения некоторых величин с целью максимизации прибыли или минимизации расходов.

Математическая модель (т.е. формализация условия задачи посредством неравенств и уравнений, задающих связи между данными величинами) любой из таких задач обычно приводит к одному-двум линейным уравнениям (неравенствам) относительно двух данных неизвестных и к одному линейному или простейшему нелинейному уравнению, которое связывает данные неизвестные и величину, максимум или минимум которой надо определить.

После введения в качестве новой неизвестной (параметра) этой величины (её обычно называют целевой функцией) задача сводится к определению наибольшего (наименьшего) значения параметра, при котором полученное уравнение имеет хотя бы один корень на множестве неотрицательных чисел, удовлетворяющий данным ограничениям.

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Владимир платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе – 300 рублей. Владимир готов выделять 1200000 рублей на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение с использованием производной

Допустим, что на заводе в первом городе рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе во втором городе y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $x+y$ единиц товара при затратах на оплату труда $500x^2+300y^2$ рублей.

Найдем наибольшее значение выражения $Q=x+y$ при условии $500x^2+300y^2=1200000$. Выразив отсюда $y=\sqrt{4000-\frac{5}{3}x^2}$, получим $Q(x)=x+\sqrt{4000-\frac{5}{3}x^2}$.

Нужно найти наибольшее значение функции $Q(x)$ на отрезке $[0;20\sqrt{6}]$.

$Q'(x)=1-\dfrac{5x}{3\cdot\sqrt{4000-\frac{5}{3}x^2}}$ при $x\neq 20\sqrt{6}$.

Из уравнения $Q'(x)=0$ получаем

$$3\cdot\sqrt{4000-\frac{5}{3}x^2}=5x,$$

$$x^2=900,$$

$$x=30.$$

Точки $x=30$ – единственная критическая точка функции на отрезке $[0;20\sqrt{6}]$. Сравнивая значения $Q(30)=80$, $Q(20\sqrt{6})=20\sqrt{6}$, $Q(0)=20\sqrt{10}$, получаем, что наибольшее значение функции $Q(x)$ равно 80, а значит и наибольшее количество единиц товара равно 80.

Ответ. 80.

Леонид является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они производят t приборов.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Леонид платит рабочему 1 тысячу рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме t^2 Гб входящей в него информации выходит $20t$, а с сервера №2 при объёме t^2 Гб входящей в него информации выходит $21t$ Гб обработанной информации; $25 \leqslant t \leqslant 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гб?

Решение. Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гб из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гб информации. Выразим y через x: $y = \sqrt{3364 - x^2}$.

Требуется найти наибольшее значение функции $f(x) = 20x + 21\sqrt{3364 - x^2}$.

$f'(x) = 20 - \dfrac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}}$, $f'(x) = 0, 400 = \dfrac{441x^2}{3364 - x^2}$, $x^2 = \dfrac{400 \cdot 3364}{841} = 1600, x = 40.$

Поэтому $x = 40$ единственная критическая точка и $y = \sqrt{3364 - 1600} = 42$. Условия $25 \leqslant x \leqslant 55$, $25 \leqslant y \leqslant 55$ выполнены. Если $x < 40$, то $x^2 < 1600$, $400 > \dfrac{441x^2}{3364 - x^2}$ и $f'(x) > 0$. Если $x > 40$, то $f'(x) < 0$. Поэтому $x = 40$ есть точка максимума. Значит, $f_{\text{наиб.}} = f(40) = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682$.

Ответ: 1682 Гб.

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t (t =1; 2; ...). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года.

При каких положительных значениях r это возможно?

Решение

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года t, то в конце двадцать пятого года на его счете будет $f(t)=t^2(1+r)^{25-t}$ тыс. рублей.

Комментарий. Большинство участников экзамена решало данную задачу следующим образом. Вводили последовательность $\{f(t)\}$, где $f(t)=t^2(1+r)^{25-t}$ тыс. рублей сумма на счете пенсионного фонда в конце двадцать пятого года при условии, что он продаст ценные бумаги в конце года t. Далее решали систему $\begin{cases} f(21)>f(20), \\ f(21)>f(22). \end{cases}$

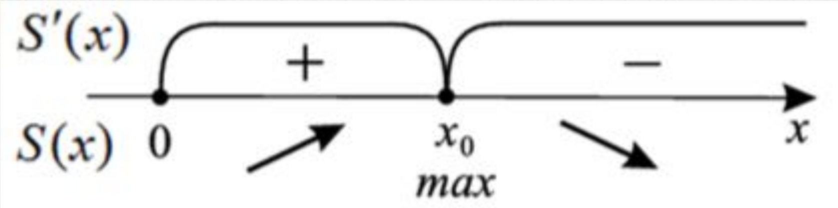
Однако данное условие является необходимым, но не достаточным условием того, что последовательность принимает наибольшее значение при $t=21$. Такое решение оценивается в 0 баллов.

Ответ. $\frac{43}{441}<r<\frac{41}{400}$

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года t, то в конце двадцать пятого года на его счете будет $S(t)=t^2(1+r)^{25-t}$ тыс. рублей. Рассмотрим функцию $S(x)=x^2(1+r)^{25-x}$, зависящую от действительной переменной x на отрезке $[0;25]$. Числа $S(t)$ последовательности $\{S(t)\}$, $1\le t\le 25$ совпадают со значениями функции $S(x)$ при $x=t$.

Функция $S(x)$ непрерывна на $[0;25]$ и $S(0)=0$, $S(25)=625$.

$$S'(x)=\left(x^2(1+r)^{25-x}\right)'=2x(1+r)^{25-x}-x^2(1+r)^{25-x}\ln(1+r)=$$
$$=x(1+r)^{25-x}(2-x\ln(1+r)).$$



$S'(x) = 0$ при $x = 0$ или $x_0 = \dfrac{2}{\ln(1+r)}$. Причем $S'(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq \dfrac{2}{\ln(1+r)}$ и $S'(x) < 0$ при $x > \dfrac{2}{\ln(1+r)}$, то есть $x_{\max} = \dfrac{2}{\ln(1+r)}$ (единственный!).

В условии сказано, что ценные бумаги выгоднее продать в конце 21-го года. Значит, максимум функции $S(x)$ находится на интервале $(20; 22)$ и для последовательности $\{S(t)\}$ должны выполняться условия $\begin{cases} S(21) > S(20), \\ S(21) > S(22). \end{cases}$

Отсюда

$$\begin{cases} 21^2(1+r)^{25-21} > 20^2(1+r)^{25-20}, \\ 21^2(1+r)^{25-21} > 22^2(1+r)^{25-22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21^2 > 20^2(1+r), \\ 21^2 > 22^2(1+r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r < \dfrac{41}{400}, \\ r > \dfrac{43}{441}. \end{cases}$$

Ответ. $\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}$.

На каждом из двух заводов работает по 100 человек. На первом заводе один рабочий изготавливает за смену 3 детали A или 1 деталь B. На втором заводе для изготовления t деталей (и A, и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба завода поставляют детали на комбинат, где собирают изделие, причем для его изготовления нужна 1 деталь A и 3 детали B. При этом заводы договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

Ответ: 33 детали

Однажды в разговоре П.Л. Чебышев заметил: «В старину математические задачи задавали боги. Далее наступил второй период, когда задачи задавали полубоги: Ньютон, Эйлер, Лагранж и т.д. Теперь третий период, когда задачи задает практика»