

A bright yellow sticky note is partially visible on the left side of the image, overlapping the white card.

# Математическое моделирование

Погрешности математических операций

# Косвенные измерения

Пусть на основании многократных измерений найдено, что диаметр и длина металлического цилиндра равны  $d = 13,840 \pm 0,011$  мм и  $l = 40,84 \pm 0,04$  мм. Объем цилиндра можно вычислить как

$$V = l \frac{\pi}{4} d^2$$

В данном случае объем представляет функцию от измеренных величин  $d$  и  $l$ , т.е. функцию от приближенных чисел. Таким образом, величина объема  $V$  тоже будет приближенным числом, имеющим определенную предельную ошибку  $\Delta V$ . Вычисление ошибки функции называется косвенным измерением.

# Погрешность суммы

**0** Теорема 1. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

Доказательство. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - данные приближенные числа. Рассмотрим их алгебраическую сумму

$$u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$$

Очевидно, что

$$\Delta u = \pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm \dots \pm \Delta x_n$$

и, следовательно,

$$|\Delta u| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_n|$$

Следствие. За предельную абсолютную погрешность алгебраической суммы можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta_n = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \dots + \Delta_{x_n}$$

Отсюда следует, что предельная абсолютная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного (в смысле абсолютной погрешности) из слагаемых

# Погрешность разности

Рассмотрим разность двух приближенных чисел

$$u = x_1 - x_2$$

предельная абсолютная погрешность разности

$$\Delta u = \pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2$$

и, следовательно,

$$|\Delta u| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

Таким образом, за предельную абсолютную погрешность алгебраической разности можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого

$$\Delta_n = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}$$

# Пример

Сложить три числа:

$$a = 102,5 \pm 0,3; b = 13,62 \pm 0,04; c = 32,474 \pm 0,002$$

Решение:

$$y = a + b + c = 102,5 + 13,62 + 32,474 = 148,594$$

$$\Delta y = \Delta a + \Delta b + \Delta c = 0,3 + 0,04 + 0,002 = 0,342$$

В этом примере предельная абсолютная ошибка функции равна  $\pm 0,342$ . Старший разряд в числе  $0,342$  отмечен цифрой 3. А эта цифра обозначает десятые доли единицы. Поэтому в числе  $148,594$  сомнительной цифрой является та, которая тоже означает десятые доли единицы. В данном случае это цифра 5. Ее нужно сохранить, а все другие справа отбросить по правилу округления. В итоге получаем ответ:

$$y = 148,6 \pm 0,3$$

# Погрешность произведения

**Т**еорема. Относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел

Доказательство. Функция  $y = ab$  имеет предельную абсолютную ошибку  $\Delta y$ . Можно записать

$$y \pm \Delta y = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)$$

Выполним умножение по правилу алгебры

$$y \pm \Delta y = ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a\Delta b$$

Примем за нуль произведение ошибок  $\Delta a\Delta b$  ввиду его малости и вычтем почленно  $y = ab$ . Получим  $\pm \Delta y = \pm a\Delta b \pm b\Delta a$

Если разделить это равенство почленно на  $y = ab$ , можно записать выражение для предельной относительной ошибки  $\delta$

$$\delta = \frac{\Delta y}{y} = \pm \left( \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right)$$

Таким образом, **предельная относительная погрешность произведения складывается из предельных относительных погрешностей сомножителей.**

# Пример

Определить произведение  $u$  приближенных чисел  $x_1 = 12,2$  и  $x_2 = 73,56$

и число верных знаков в нем, если все написанные цифры сомножителей верные. Решение. Имеем

$\Delta x_1 = 0,05$  и  $\Delta x_2 = 0,005$ . Отсюда

$$\delta = \left( \frac{0,05}{12,2} + \frac{0,005}{73,56} \right) = 0,0042$$

Так как произведение  $u = 897,432$ , то  $\Delta_n = u\delta = 897,432 \cdot 0,0042 \cong 3,6$ .

Первая цифра погрешности больше 2,

таким образом разряд единиц является сомнительным в числе, и результат следует записать так

$$u = 897,4 \pm 4$$



# Частные случаи погрешности произведения

Отметим частный случай

$$u = kx,$$

где  $k$  – точный множитель, отличный от нуля. Имеем:

$$\delta_u = \delta_x$$

так как относительная ошибка точного числа равна нулю. И

$$\Delta_u = |k|\Delta_x$$

т.е. при умножении приближенного числа на точный множитель  $k$  относительная предельная погрешность не изменяется, а абсолютная предельная погрешность увеличивается в  $|k|$  раз.

○ При возведении приближенного числа  $a$  в степень  $n$  будем иметь

○ ,

○ Поэтому формула (4.2) принимает вид

○ . (1.28)

○ Так как извлечение корня степени  $p$  из приближенного числа  $a$  можно свести к возведению этого числа в степень  $\frac{1}{p}$ , будем иметь



# Частные случаи погрешности произведения

При возведении приближенного числа  $a$  в степень  $n$  будем иметь

$$y = a^n = aa \cdots a$$

Поэтому формула относительной погрешности принимает вид

Так как извлечение корня степени  $p$  из приближенного числа  $a$  можно свести к возведению этого числа в степень  $\frac{1}{p}$ , будем иметь

$$\delta = \frac{\Delta y}{y} = \pm \left( \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta a}{a} + \cdots + \frac{\Delta a}{a} \right) = \pm n \frac{\Delta a}{a}$$

Так как извлечение корня степени  $p$  из приближенного числа  $a$  можно свести к возведению этого числа в степень  $\frac{1}{p}$ , будем иметь

$$\delta = \pm \frac{1}{p} \frac{\Delta a}{a}$$

# Общая формула для погрешности

Вычислим предельную ошибку сначала для функции одного аргумента  $y = f(a)$

Если при изменении аргумента  $a$  допускается предельная абсолютная ошибка  $\Delta a$ , то функция  $y$  получает изменение  $\Delta y$

$$y \pm \Delta y = f(a \pm \Delta a)$$

Вычтем отсюда равенство  $y = f(a)$  почленно и разделим обе части на  $\Delta a$

$$\pm \frac{\Delta y}{\Delta a} = \frac{f(a \pm \Delta a) - f(a)}{\Delta a}$$

# Общая формула для погрешности

Из математического анализа известно, что правая часть этого равенства хотя и не равна производной по  $a$  от функции  $f(a)$ , но отличается от нее лишь на бесконечно малую величину  $\theta$ . Поэтому можно записать

$$\pm \frac{\Delta y}{\Delta a} = f'_a(a) + \theta$$

Умножим обе части равенства на  $\Delta a$

$$\pm \Delta y = f'_a(a) \Delta a + \theta \Delta a$$

Величиной  $\theta \Delta a$  можно пренебречь в связи с ее малостью, тогда ***предельная абсолютная ошибка функции одного аргумента равна производной от этой функции на предельную абсолютную ошибку аргумента.***

$$\pm \Delta y = f'_a(a) \Delta a$$

# Общая формула для погрешности

Разделим последнее равенство на равенство  $y = f(a)$

$$\pm \frac{\Delta y}{y} = \frac{f'_a(a)\Delta a}{f(a)}$$

Так как отношение производной функции на саму функцию является производной по аргументу от натурального логарифма функции, можно записать

$$\delta = \pm |\ln f(a)|'_a \Delta a$$

Это правило звучит как – *предельная относительная ошибка функции одного аргумента равна произведению производной от логарифма этой функции на предельную абсолютную ошибку аргумента.*

# Общая формула для погрешности

Предельная относительная ошибка функции  $u = f(x_1, x_2 \dots x_n)$  нескольких аргументов складывается из частных относительных ошибок

$$\delta = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln u \right| \Delta x_i$$

# Пример

Для определения модуля Юнга  $E$  по прогибу стержня прямоугольного сечения применяется формула

$$E = \frac{1}{4} \frac{l^3 p}{a^3 b s}$$

где  $l$  – длина стержня,  $a$  и  $b$  – измерения поперечного сечения стержня,  $s$  – стрела прогиба,  $p$  – нагрузка.

Вычислить предельную относительную погрешность при определении модуля Юнга  $E$ , если  $p = 20$  кГ;  $\delta_p = 0,1$  %;  $a = 3$  мм;  $\delta_a = 1$  %;  $b = 44$  мм;  $\delta_b = 1$  %;  $l = 50$  см;  $\delta_l = 1$  %;  $s = 2,5$  см;  $\delta_s = 1$  %.

Решение.

$$\ln E = 3 \ln l + \ln p - 3 \ln a - \ln b - \ln s - \ln 4$$

заменяя приращение дифференциалами по модулю, будем иметь:

$$\frac{\Delta E}{E} = 3 \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta p}{p} + 3 \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta s}{s}$$

Следовательно,

$$\delta_E = 3 \cdot 0,01 + 0,001 + 3 \cdot 0,01 + 0,01 + 0,01 = 0,081$$

т.е. примерно 8 % от измеряемой величины. Произведя численные расчеты, имеем:

$$E = (2,1 \pm 0,17) \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$$

# Средняя квадратичная ошибка функции

Вычисленная ранее погрешность для функции нескольких переменных при косвенных измерениях относится к единичному измерению, если проводится ряд замеров, необходимо пользоваться формулами среднеквадратичной ошибки:

$$S_y = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f(x_1; x_2 \dots x_n)}{\partial x_i} S_{x_i} \right)^2}$$



# Средняя квадратичная ошибка функции

Например, имеем функцию следующего вида

$$y = f(a, b) = a + b$$

то есть требуется найти среднюю квадратичную ошибку суммы двух приближенных чисел, средние квадратичные ошибки которых  $S_a$  и  $S_b$ .

Решение:  $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 1$ ,  $\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 1$

следовательно

$$S_y = \pm \sqrt{S_a^2 + S_b^2}$$

# Список литературы

1. Рыбалко А.Ф. Математические методы в инженерии. Учебное электронное текстовое издание. Екатеринбург. – УрФУ, 2011 – 206 с.