Спектральное представление ССП

$\xi(t)$ - ССП, $t \in [\,0; T\,]$ $M[\xi(t)] = 0$ $D[\xi(t)] < +\infty$

$$\boxed{\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(X_k \cos \omega_k t + Y_k \sin \omega_k t \right)} \quad (1)$$

$M(X_k) = M(Y_k) = 0$ $M(X_k Y_k) = 0$

$D(X_k) = D(Y_k) = D_k$ $\omega_{k+1} - \omega_k = \dfrac{\pi}{T}$

Спектральное представление ССП

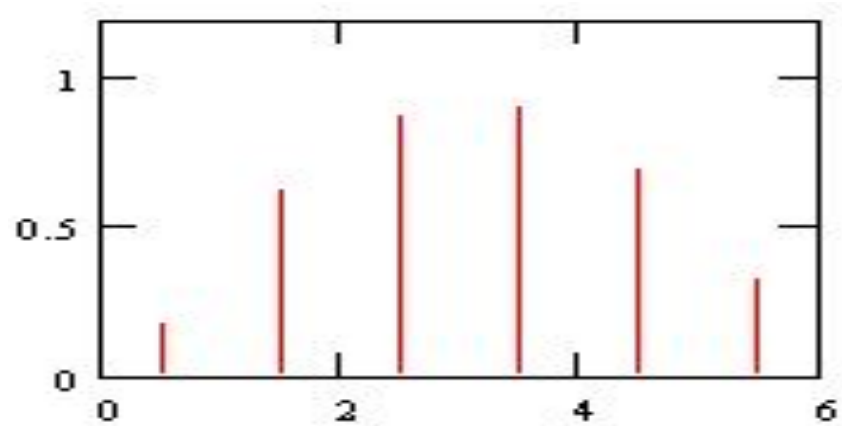
$$\boxed{K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\omega_k \tau} \qquad (2)$$

$$D_0 = \frac{1}{T}\int_0^T K_x(\tau)\,d\tau \qquad D_k = \frac{2}{T}\int_0^T K_x(\tau)\cos\omega_k \tau\, d\tau \qquad (3)$$

$$D[\xi(t)] = K_x(0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} D_k > 0$$

Гармонический спектр



Спектральное представление ССП

$$t \in [\ 0;\ T\ ] \qquad T \to \infty$$

$$D_k = \frac{2}{T}\int_0^T K_x(\tau) cos\,\omega_k \tau\ d\tau \ \Rightarrow$$

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_x(\tau) cos\,\omega\tau\ d\tau$$

(3[1])

$$D[\xi(t)] = K_x(0) \qquad = \int_0^\infty S(\omega)\ d\omega$$

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\omega_k \tau \quad \Rightarrow$$

(2[1])

$$K_x(\tau) = \int_0^\infty S(\omega) cos\,\omega\tau\ d\omega$$

Спектральное представление ССП

Уравнения Винера-Хинчина

$$S(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}K_x(\tau)\cos\omega\tau\ d\tau \qquad (3^1)$$

$$K_x(\tau)=\int_0^{\infty}S(\omega)\cos\omega\tau\ d\omega \qquad (2^1)$$

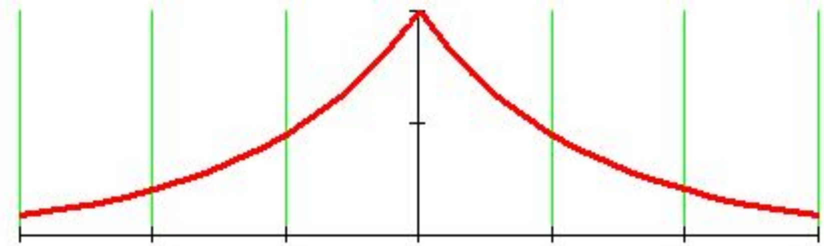
$$\xi(t)=\int_0^{\infty}\left(X(\omega)\cos\omega t+Y(\omega)\sin\omega t\right)d\omega \qquad (1^1)$$

Пример1

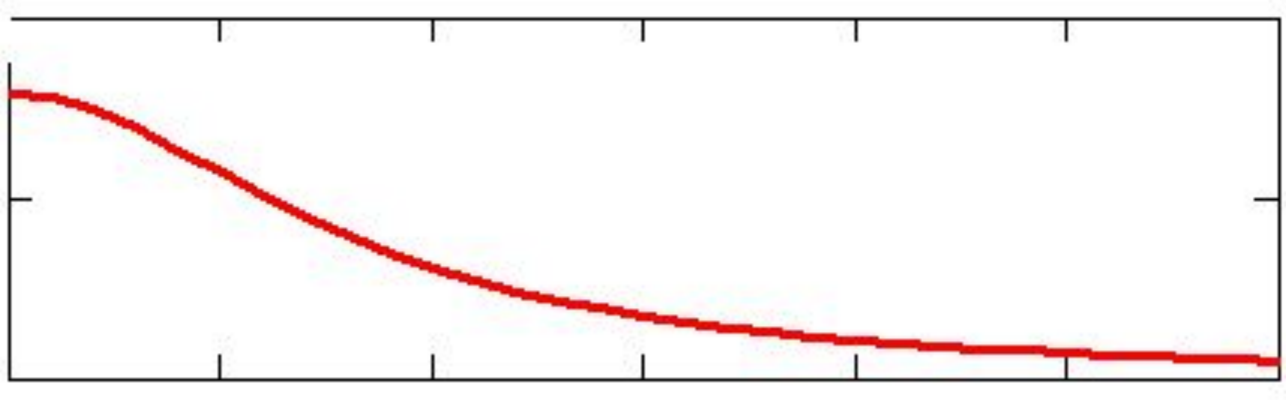
$$K_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$$

$$D = 1 \quad \alpha = 0.8$$

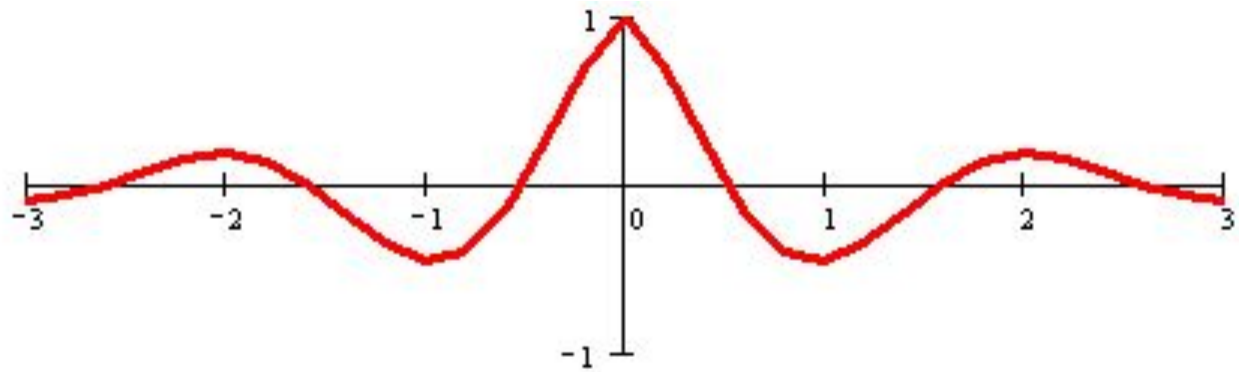
$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K_x(\tau) cos\omega\tau \; d\tau$$



$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} D \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \, cos\omega\tau \; d\tau \qquad = \frac{2}{\pi} D \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$



Пример 2 $K_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$



$D = 1$

$\alpha = 0.8$

$\beta = 3$

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} D \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos\beta\tau \cdot \cos\omega\tau \; d\tau$$

$$S(\omega) = \frac{D}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \left(\cos(\omega - \beta)\tau + \cos(\omega + \beta)\tau \right) d\tau =$$

$$= \frac{2D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2}$$

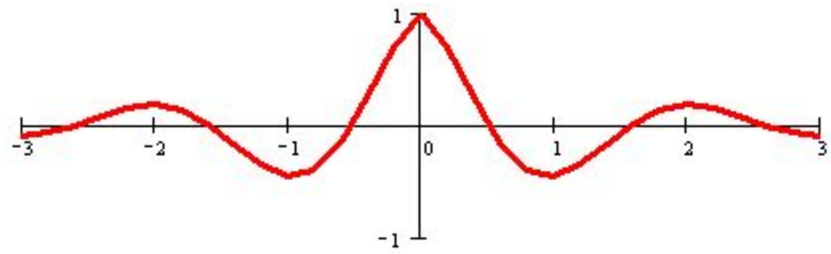
Пример2

$$K_x(\tau) = De^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau$$

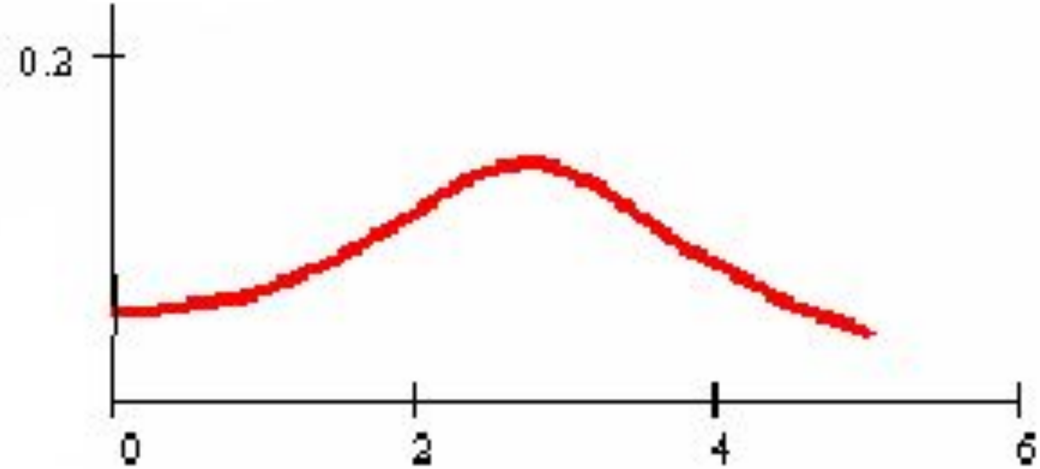
$D = 1$

$\alpha = 0.8$

$\beta = 3$



$$S(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{\omega^4+2\omega^2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}$$

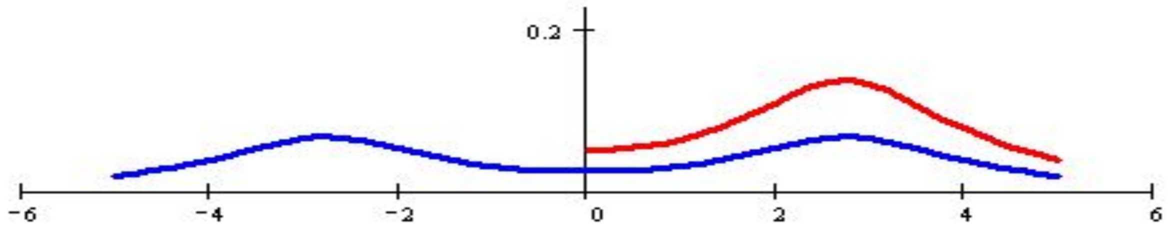


Комплексная форма представления ССП

$$\cos\omega\tau = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}\right) \qquad \sin\omega\tau = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}\right)$$

$$\boxed{\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega)\cdot e^{i\omega t}\, d\omega} \qquad (1^2)$$

$$S^*(\omega) = \begin{cases} S(\omega)/2, & \omega \geq 0 \\ S(-\omega)/2, & \omega < 0 \end{cases}$$



Комплексная форма представления ССП

$$\boxed{\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega} \qquad (1^2)$$

Уравнения Винера-Хинчина

$$K(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) \cdot e^{i\omega\tau}\, d\omega \qquad (2^2)$$

$$S^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau}\, d\tau \qquad (3^2)$$

Дискретизация ССП по времени

$$\Delta t = ?$$

<u>Теорема Котельникова</u>. Если в спектре временной функции ***x(t)*** нет частот выше *B*, то она полностью определяется своими мгновенными отсчетами в моменты, отстоящие друг от друга на величину

$$\Delta t = \frac{1}{2B}$$

(частота Найквиста)

$$t_k = \frac{k}{2B} \Rightarrow$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(t_k) \frac{\sin 2\pi B(t - t_k)}{2\pi B(t - t_k)}$$

Дискретизация ССП по времени

$$\Delta t = \frac{1}{2B}$$

Эффективная ширина спектра

$$B = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega)\,d\omega}{2S^*_{\max}}$$

$$B = \frac{\int_{0}^{+\infty} S^*(\omega)\,d\omega}{S^*_{\max}}$$