

# Спектральное представление ССП

$$\xi(t) \text{ - ССП, } t \in [0; T] \quad M[\xi(t)] = 0 \quad D[\xi(t)] < +\infty$$

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (X_k \cos \omega_k t + Y_k \sin \omega_k t) \quad (1)$$

$$M(X_k) = M(Y_k) = 0$$

$$M(X_k Y_k) = 0$$

$$D(X_k) = D(Y_k) = D_k$$

$$\omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{T}$$

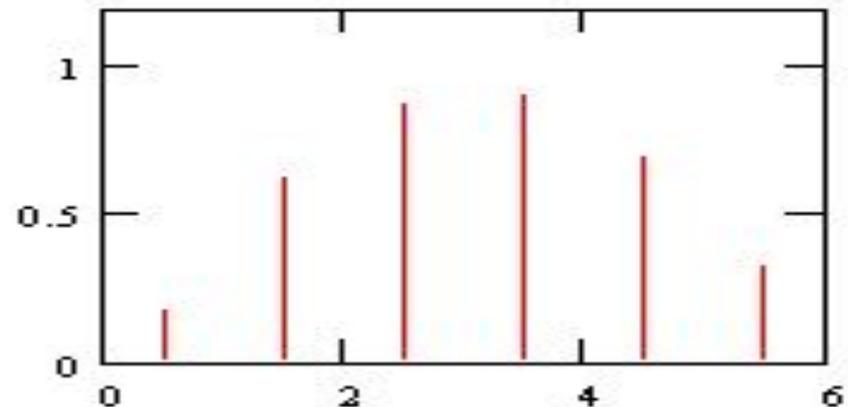
# Спектральное представление ССП

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau \quad (2)$$

$$D_0 = \frac{1}{T} \int_0^T K_x(\tau) d\tau \quad D_k = \frac{2}{T} \int_0^T K_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \quad (3)$$

$$\begin{aligned} D[\xi(t)] &= K_x(0) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k > 0 \end{aligned}$$

Гармонический спектр



# Спектральное представление ССП

$$t \in [0; T] \quad T \rightarrow \infty$$

$$D_k = \frac{2}{T} \int_0^T K_x(\tau) \cos \omega_k \tau \, d\tau \Rightarrow$$

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau \quad (3^1)$$

$$D[\xi(t)] = K_x(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) \, d\omega$$

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau \Rightarrow$$

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega \quad (2^1)$$

# Спектральное представление ССП

## Уравнения Винера-Хинчина

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau \quad (3^1)$$

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega \quad (2^1)$$

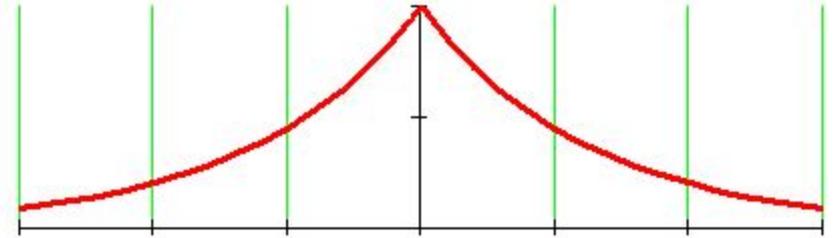
$$\xi(t) = \int_0^{\infty} (X(\omega) \cos \omega t + Y(\omega) \sin \omega t) d\omega \quad (1^1)$$

Пример1

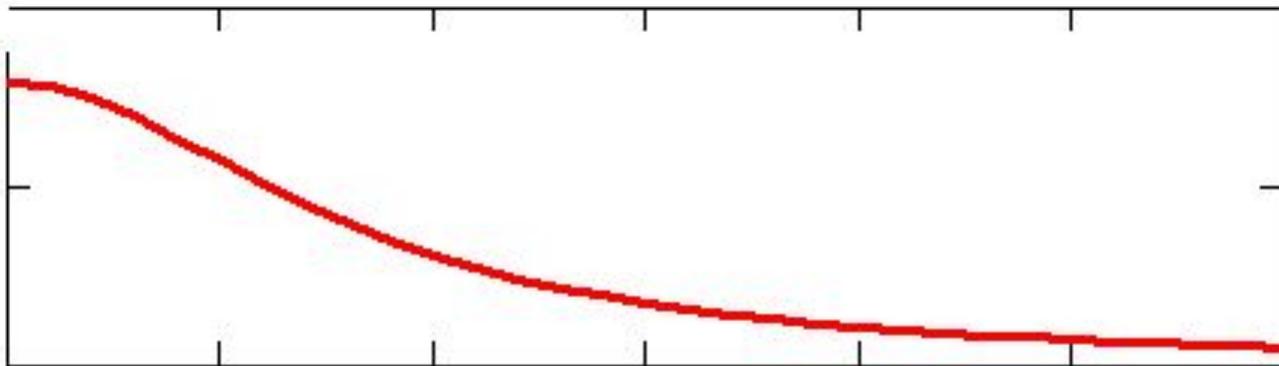
$$K_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|}$$

$$D = 1 \quad \alpha = 0.8$$

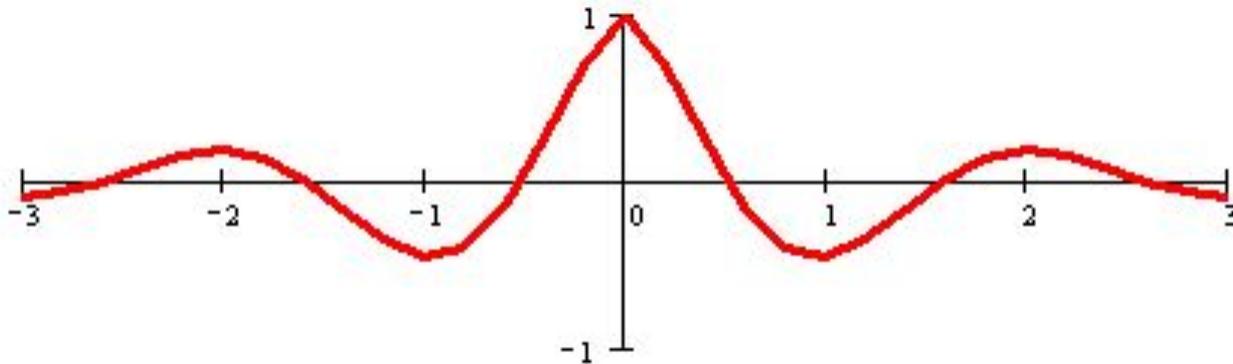
$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau$$



$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} D \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega \tau \, d\tau = \frac{2}{\pi} D \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$



Пример 2  $K_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau$



$$D = 1$$

$$\alpha = 0.8$$

$$\beta = 3$$

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} D \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \beta \tau \cdot \cos \omega \tau \, d\tau$$

$$S(\omega) = \frac{D}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} (\cos(\omega - \beta)\tau + \cos(\omega + \beta)\tau) \, d\tau =$$

$$= \frac{2D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

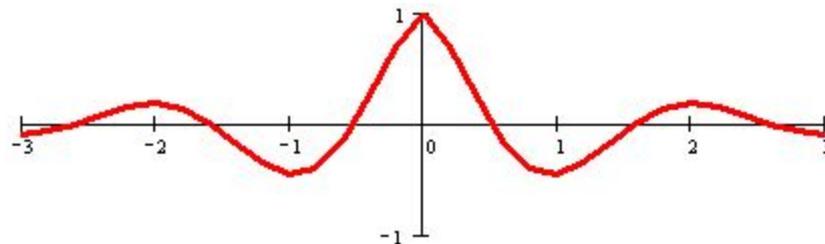
## Пример2

$$K_x(\tau) = D e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau$$

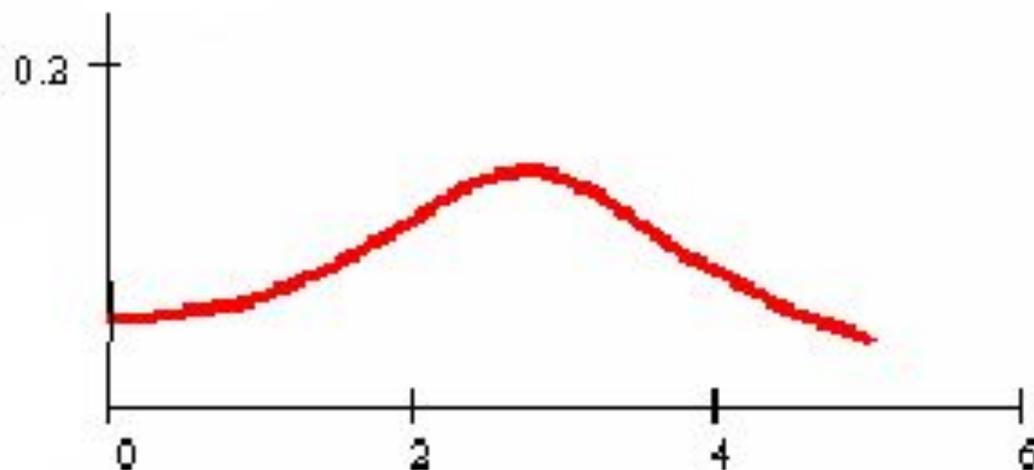
$$D = 1$$

$$\alpha = 0.8$$

$$\beta = 3$$



$$S(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

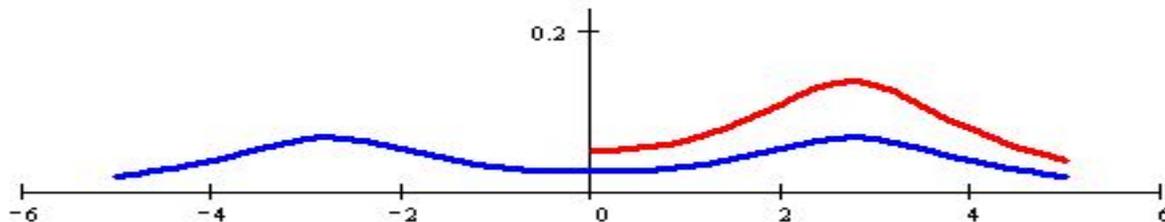


# Комплексная форма представления ССП

$$\cos \omega \tau = \frac{1}{2} \left( e^{i\omega \tau} + e^{-i\omega \tau} \right) \quad \sin \omega \tau = \frac{1}{2i} \left( e^{i\omega \tau} - e^{-i\omega \tau} \right)$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (1^2)$$

$$S^*(\omega) = \begin{cases} S(\omega)/2, & \omega \geq 0 \\ S(-\omega)/2, & \omega < 0 \end{cases}$$



# Комплексная форма представления ССП

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (1^2)$$

Уравнения Винера-Хинчина

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2^2)$$

$$S^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3^2)$$

# Дискретизация ССП по времени

$$\Delta t = ?$$

Теорема Котельникова. Если в спектре временной функции  $x(t)$  нет частот выше  $B$ , то она полностью определяется своими мгновенными отсчетами в моменты, отстоящие друг от друга на величину

$$\Delta t = \frac{1}{2B}$$

(частота Найквиста)

$$t_k = \frac{k}{2B} \Rightarrow$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(t_k) \frac{\sin 2\pi B(t - t_k)}{2\pi B(t - t_k)}$$

# Дискретизация ССП по времени

$$\Delta t = \frac{1}{2B}$$

Эффективная ширина спектра

$$B = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) d\omega}{2S_{\max}^*}$$

$$B = \frac{\int_0^{+\infty} S^*(\omega) d\omega}{S_{\max}^*}$$

