

**УРОК НА ТЕМУ:
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И
НЕРАВЕНСТВА.**

Что сделать?

1. Просмотрите решение примеров
2. По этому образцу выполните примеры для самостоятельного решения.
3. Прислать только решение примеров для самостоятельной работы

Показательные уравнения.

Определение. Уравнения вида:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

называются показательными уравнениями.

Теорема. Показательное уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x).$$

Показательные уравнения.

Пример. Решить уравне

а) $3^{3x-3} = 27$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+0.2} = \left(\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right)$ $5^{x^2-6x} = 5^{-3x+18}$

Решение.

а) Мы хорошо знаем $27 = 3^3$

Перепишем наше уравнение: $3^{3x-3} = 3^3$

Воспользовавшись теоремой выше, получаем, что наше уравнение сводится к уравнению $3x-3=3$, решив это уравнение, получим $x=2$

Ответ: $x=2$.

б) $\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

Тогда наше уравнение можно переписать: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+0.2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0.2}$
 $2x+0,2=0,2$
 $x=0$

Ответ: $x=0$

в) Исходное уравнение равносильно уравнению:

$$x^2 - 6x = -3x + 18 \quad x^2 - 3x - 18 = 0 \quad (x - 6)(x + 3) = 0 \quad x_1 = 6 \text{ и } x_2 = -3$$

Ответ: $x_1 = 6$ и $x_2 = -3$

Показательные уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$9^x + 3^{x+2} - 36 = 0$$

Решение:

Перепишем наше уравнение:

$$(3^2)^x + 9 \cdot 3^x - 36 = 0$$

$$(3^x)^2 + 9 \cdot 3^x - 36 = 0$$

Давайте сделаем замену переменных пусть

$$a = 3^x$$

В новых переменных уравнение примет вид:

$$a^2 + 9a - 36 = 0$$

$$(a + 12)(a - 3) = 0$$

$$a_1 = -12 \text{ и } a_2 = 3$$

Выполним обратную замену переменных:

$$3^x = -12 \text{ и } 3^x = 3$$

Первое уравнение не имеет решений, так как на прошлом уроке мы узнали, что показательные выражения могут принимать только положительные значения, вспомните график. Во втором уравнении у нас одно решение $x=1$.

Ответ: $x=1$.

Показательные уравнения.

Давайте составим памятку способов решения показательных уравнений:

1. Графический метод. Представляем обе части уравнения в виде функций и строим их графики, находим точки пересечений графиков. (Этим методом мы пользовались на прошлом уроке).

2. Принцип равенства показателей. Принцип основан на том, что два выражения с одинаковыми основаниями равны, тогда и только тогда когда равны степени (показатели) этих оснований.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

3. Метод замены переменных. Данный метод стоит применять когда уравнение при замене переменных упрощает свой вид, и его становится гораздо легче решить.

Показательные неравенства

Перейдем к неравенствам, при решении которых стоит обратить особое внимание на основание степени, тут возможны два варианта развития событий при решении неравенства.

Теорема.

Если $a > 1$, то показательное неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

равносильно неравенству $f(x) < g(x)$. (Знак неравенства меняется на противоположный).

Показательные неравенства.

Пример. Решить неравенство:

$$\text{а) } 3^{2x+3} > 81 \quad \text{б) } \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-4} < \frac{1}{16} \quad 0,3^{x^2+6x} \leq 0,3^{4x+15}$$

Решение.

$$\text{а) } 3^{2x+3} > 81 \quad 3^{2x+3} > 3^4$$

Наше неравенство равносильно неравенству:

$$2x + 3 > 4$$

$$2x > 1$$

$$x > 0,5$$

Ответ: $(0,5; +\infty)$

$$\text{б) } \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-4} < \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Основание при степени, в нашем уравнении, меньше единицы, тогда при замене неравенства на эквивалентное надо не забыть поменять знак.

$$2x - 4 > 2$$

$$x > 3$$

Ответ: $(3; ; +\infty)$

Показательные уравнения и неравенства.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить уравнение

а) $4^{5x-2} = 64$ в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-0.2} = \left(\sqrt[7]{\frac{2}{3}}\right)$ $3^{x^2-6x} = 3^{-7x+6}$

2. Решить уравнение: $\frac{(0,5)^{2x-0.3}}{\sqrt{2}} = 16 \cdot (0.25)^{3x+1}$

3. Решить уравнение $16^x + 4^{x+2} - 80 = 0$

5. Решить неравенство:

а) $2^{5x-8} > 64$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-4} < \frac{1}{81}$ $0,3^{x^2-9x} \geq 0,3^{-7x+35}$

6. Решить неравенство:

$$\frac{2 \cdot 2^x - 5}{2^{x+2} - 1} < 1$$