

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю.

Если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система (1) называется *неоднородной*.

Система линейных уравнений называется *квадратной*, если число уравнений равно числу неизвестных.

Решением линейной системы (1) называется такая совокупность n чисел c_1, c_2, \dots, c_n , которая при подстановке в систему (1) на место неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n обращает все уравнения этой системы в тождества.

Система линейных уравнений (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если у нее не существует ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если у нее существует, по крайней мере, два различных решения.

Две системы уравнений называются *равносильными* или *эквивалентными*, если каждое решение одной системы одновременно является решением и другой системы.

Весьма удобно записывать
линейную систему в
матричной форме.

Для этого составим три матрицы.

Матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

которая называется

основной матрицей системы.

Вектор-столбец неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

и вектор-столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

Поскольку число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X , то их произведение есть вектор-столбец:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1).

Теперь систему уравнений (1)

можно записать в виде $AX=B$ (6)

Решением матричного уравнения (6)

называется такой вектор-столбец X ,

который при заданной матрице

коэффициентов A и заданном

вектор-столбце свободных членов B

обращает уравнение (6) в тождество.

Введем в рассмотрение еще одну матрицу. Дополним основную матрицу системы A столбцом свободных членов и получим новую матрицу размера $m \times (n+1)$:

$$A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (7)$$

Эта матрица A_B называется *расширенной матрицей системы*.

Теорема Кронекера-Капелли

**Для того, чтобы система
линейных уравнений (1)
являлась совместной,
необходимо и достаточно,
чтобы ранг расширенной
матрицы этой системы
был равен рангу ее основной
матрицы.**

$$AX = B$$



$$X = A^{-1}B$$

МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

решения систем
n линейных
уравнений с n
неизвестными

Рассмотрим частный случай системы (1), когда число уравнений равно числу неизвестных $m=n$.

Используя матричную форму записи, запишем линейную систему в виде (6): $AX=B$.

Если определитель основной матрицы системы отличен от нуля ($\det A \neq 0$), то матрица A имеет обратную A^{-1} .

Умножим обе части уравнения
слева на матрицу A^{-1} .

Тогда $A^{-1}AX = A^{-1}B$, или $X = A^{-1}B$. (9)

Уравнение (9) представляет собой
решение системы (6).

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1, 2, \dots, n$$

ФОРМУЛЫ
Крамера

Если определитель системы
 n линейных уравнений с n неизвестными
отличен от нуля, то эта система совместна
и имеет единственное решение,
которое находится по формуле Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1, 2, \dots, n, \text{ где}$$

Δ - определитель системы,

Δ_j - определитель,

получающийся из определителя Δ
путем замены в нем j - того столбца
на столбец свободных членов.

Если определитель системы равен нулю,
а хотя бы один из определителей
неизвестных Δ_j отличен от нуля,
то система совместна.

Если равны нулю как
определитель системы,
так и все определители
неизвестных Δ_j ,
то система не определена.