СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

В общем случае система m линейных уравнений с n неизвестными (или линейная система) имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}\right\}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ***неизвестные.***

Число неизвестных не обязательно равно числу уравнений.

Величины $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ называются ***коэффициентами системы,***

а величины $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называют ***свободными членами.***

Система линейных уравнений называется ***однородной***, если все ее свободные члены равны нулю.
Если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система (1) называется ***неоднородной.***

Система линейных уравнений называется ***квадратной***, если число уравнений равно числу неизвестных.

Решением линейной системы (1) называется такая совокупность n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая при подстановке в систему (1) на место неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает все уравнения этой системы в тождества.

Система линейных уравнений (1) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если у нее не существует ни одного решения.

Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если у нее существует, по крайней мере, два различных решения.

Две системы уравнений называются ***равносильными*** или ***эквивалентными,*** если каждое решение одной системы одновременно является решением и другой системы.

МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\}$$

Весьма удобно записывать линейную систему в ***матричной форме.***

Для этого составим три матрицы.

Матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

которая называется
основной матрицей системы.

Вектор-столбец неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

и вектор-столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

Поскольку число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, то их произведение есть вектор-столбец:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1). Теперь систему уравнений (1) **можно записать в виде** $\boldsymbol{AX=B}$ **(6)**

Решением матричного уравнения (6) называется такой вектор-столбец X, который при заданной матрице коэффициентов A и заданном вектор-столбце свободных членов B обращает уравнение (6) в тождество.

Введем в рассмотрение еще одну матрицу. Дополним основную матрицу системы A столбцом свободных членов и получим новую матрицу размера mх$(n+1)$:

$$A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Эта матрица A_B называется ***расширенной матрицей системы.***

Теорема Кронекера-Капелли

Для того, чтобы система линейных уравнений (1) являлась совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы.

$$AX = B$$

$$\Updownarrow$$

$$X = A^{-1}B$$

Метод обратной матрицы

решения систем n линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим частный случай системы (1), когда число уравнений равно числу неизвестных $m=n$. Используя матричную форму записи, запишем линейную систему в виде (6): $AX=B$.

Если определитель основной матрицы системы отличен от нуля ($\det A \neq 0$), то матрица A имеет обратную A^{-1}.

Умножим обе части уравнения слева на матрицу A^{-1}.

Тогда $A^{-1}AX = A^{-1}B$, или $X = A^{-1}B$. (9)

Уравнение (9) представляет собой решение системы (6).

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1, 2, \ldots, n$$

Формулы Крамера

Если определитель системы
n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формуле Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1,2,\ldots,n,$$ где

Δ- определитель системы,

Δ_j - определитель,

получающийся из определителя Δ путем замены в нем j- того столбца на столбец свободных членов.

Если определитель системы равен нулю, а хотя бы один из определителей неизвестных Δ_j отличен от нуля, то система совместна.

Если равны нулю как определитель системы, так и все определители неизвестных Δ_j,

то система не определена.