



ПОЛИТЕХ

Санкт-Петербургский
Политехнический Университет
Петра Великого

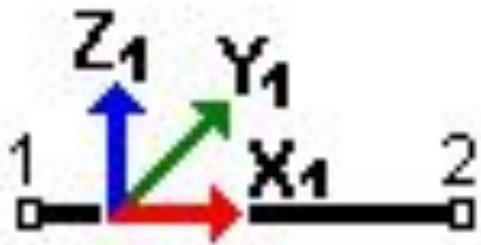
Использование современных программных комплексов в расчете строительных конструкций

*Яваров Александр
Валерьевич, к.
т.н.,
доцент СПбПУ (Политех)*

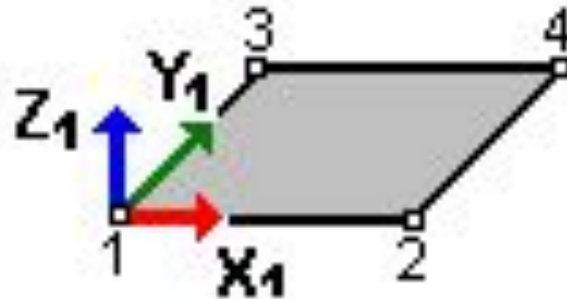
Санкт-Петербург

2017 г.

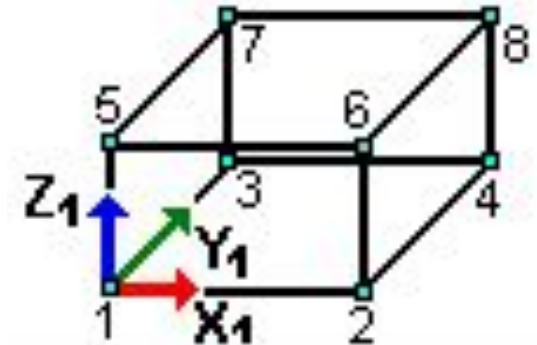
Конечные элементы:



Стержневой КЭ



Оболочечный КЭ



Объемный КЭ

Граничные условия в напряжениях

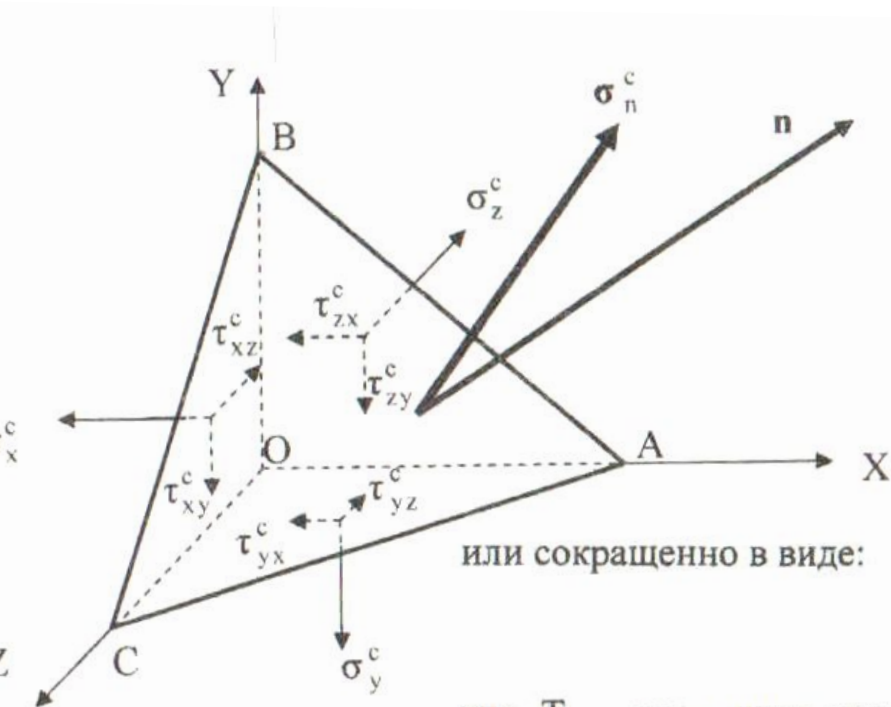
$$\sigma_{nx} = X_n, \quad \sigma_{ny} = Y_n, \quad \sigma_{nz} = Z_n.$$

В этом случае зависимость (1.4) примет вид:

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z, \\ Y_n &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z, \\ Z_n &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Эти условия равновесия в точках поверхности тела можно записать в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{vmatrix}, \quad (1.8)$$

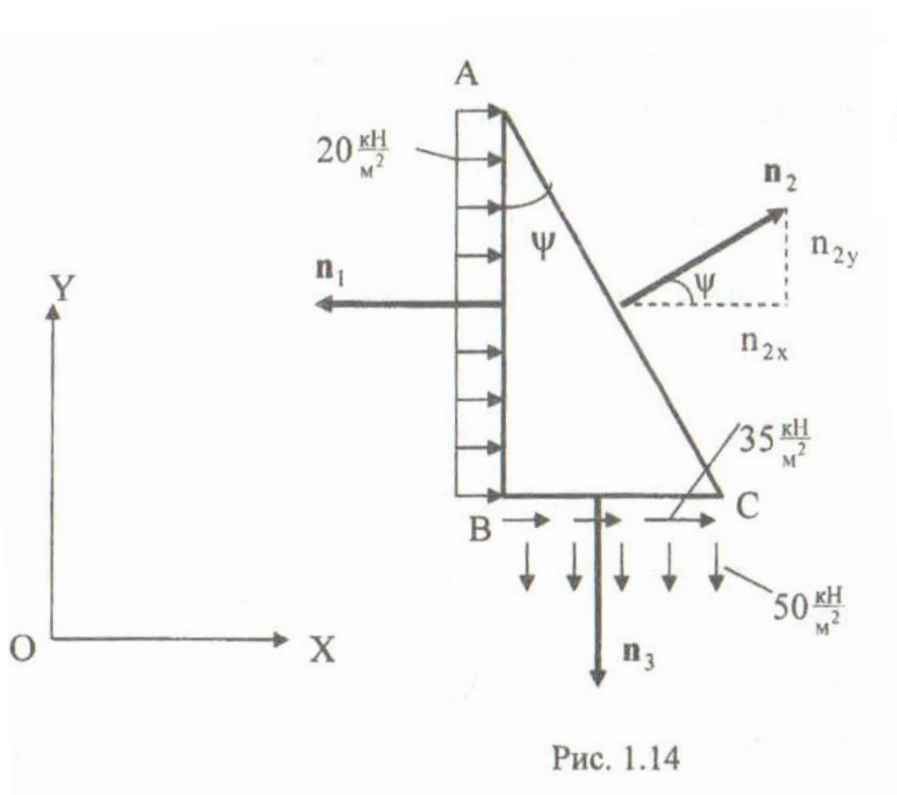


или сокращенно в виде:

$$T^T n = p_n, \quad (1.9)$$

где T – введенная матрица напряжений (1.5), p_n – столбец внешних поверхностных нагрузок и n – столбец компонент **единичной** внешней нормали.

Граничные условия в напряжениях



$$n_1 = \begin{pmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n_1, OX) \\ \cos(n_1, OY) \\ \cos(n_1, OZ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ \\ \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$p_n = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_x = -20, \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = 0.$$

$$n_2 = \begin{pmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ n_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_n = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_x = -20, \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = 0.$$

Уравнения равновесия

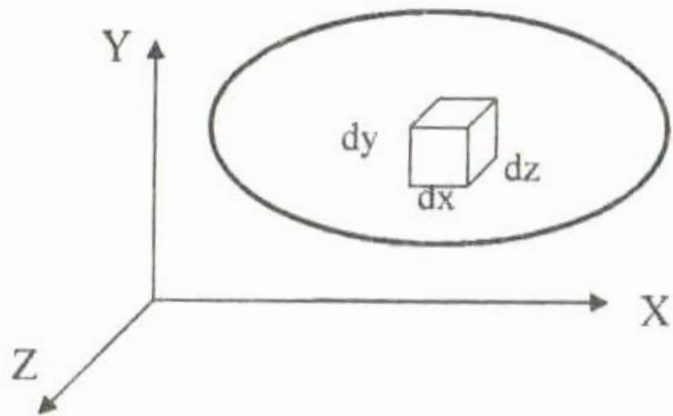
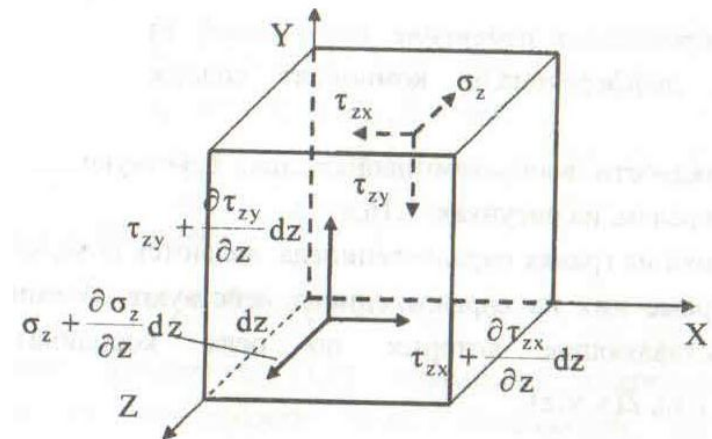
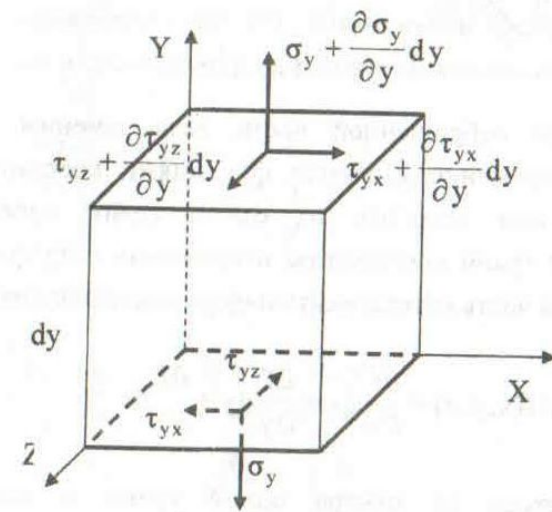
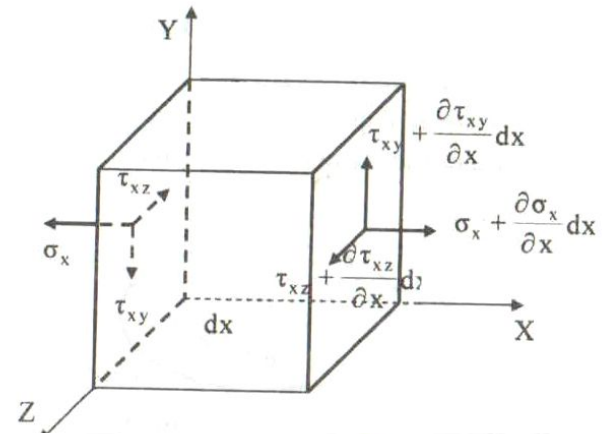


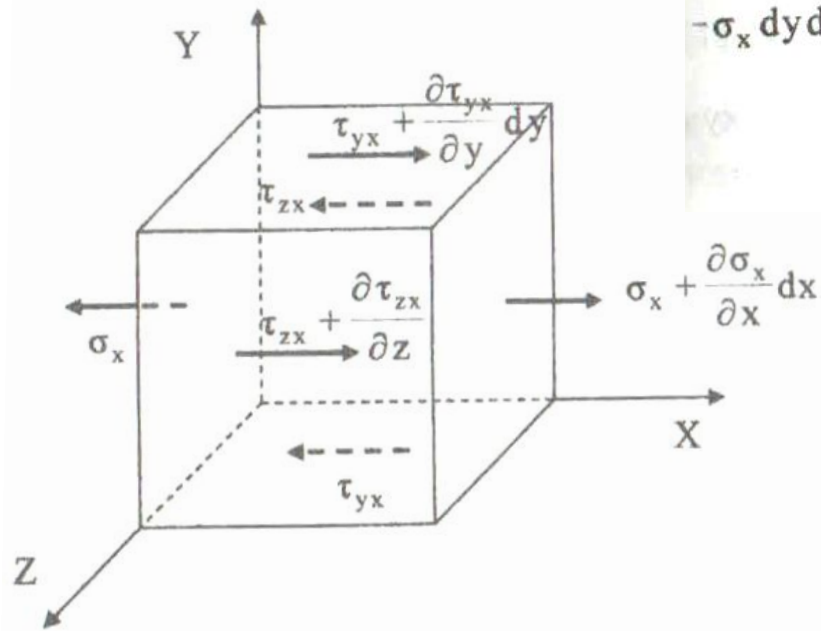
Рис. 1.15



$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z).$$

Уравнения равновесия



$$-\sigma_x dy dz + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz - \tau_{yx} dx dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz -$$

$$-\tau_{zx} dx dy + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy + X dx dy dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0.$$

$$\tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} + (\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy) dx dz \frac{dy}{2} -$$

$$-\tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} - (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz) dx dy \frac{dz}{2} = 0,$$

где $dy/2$ – плечо силы $\tau_{yz} dx dz$, $dz/2$ – плечо силы $\tau_{zy} dx dy$.

Уравнения равновесия

Сокращая слагаемые на $dx dy dz$ и пренебрегая бесконечно малыми членами, приходим к равенству: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Условия равновесия моментов относительно осей OY и OZ приводят к аналогичным зависимостям. Окончательно получаем соотношения:

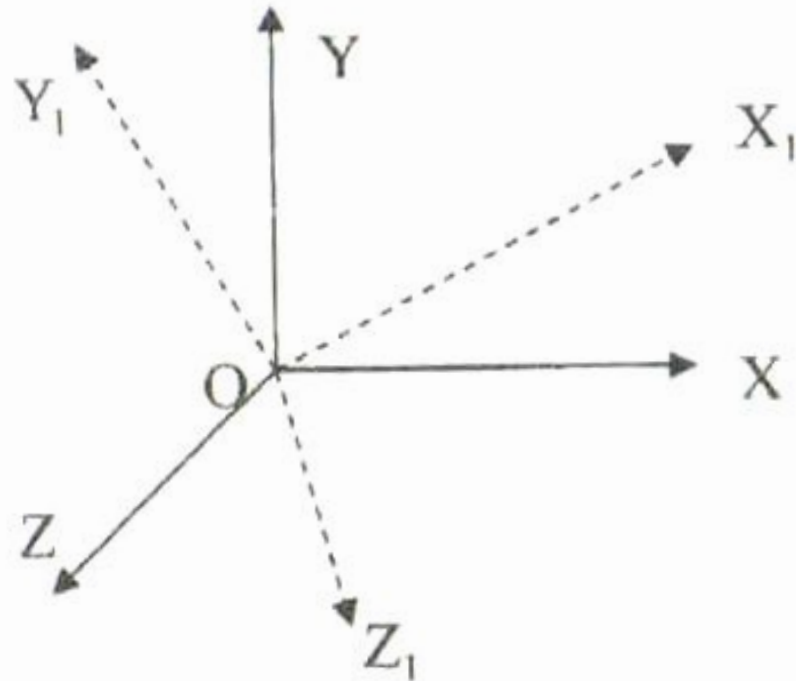
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad (1.11)$$

называемые **законом парности касательных напряжений**, откуда следует симметричность тензора напряжений T . Это свойство можно записать в виде: $T^T = T$.

Преобразование компонент тензора напряжений при повороте осей координат

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} .$$

$$T_1 = \begin{vmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{x_1y_1} & \tau_{x_1z_1} \\ \tau_{x_1y_1} & \sigma_{y_1} & \tau_{y_1z_1} \\ \tau_{x_1z_1} & \tau_{y_1z_1} & \sigma_{z_1} \end{vmatrix} .$$



Преобразование компонент тензора напряжений при повороте осей координат

Обозначение осей	X	Y	Z
X_1	$\cos(X_1, X)$	$\cos(X_1, Y)$	$\cos(X_1, Z)$
Y_1	$\cos(Y_1, X)$	$\cos(Y_1, Y)$	$\cos(Y_1, Z)$
Z_1	$\cos(Z_1, X)$	$\cos(Z_1, Y)$	$\cos(Z_1, Z)$

Введем матрицу направляющих косинусов:

$$C = \begin{vmatrix} \cos(X_1, X) & \cos(X_1, Y) & \cos(X_1, Z) \\ \cos(Y_1, X) & \cos(Y_1, Y) & \cos(Y_1, Z) \\ \cos(Z_1, X) & \cos(Z_1, Y) & \cos(Z_1, Z) \end{vmatrix}. \quad (1.12)$$

$$T_1 = CTC^T. \quad (1.13)$$

Главные напряжения

$$T_{\text{гл}} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}, \quad (1.30)$$

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3,$$

$$J_3 = |T_{\text{гл}}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

(1.31)

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Теория деформаций

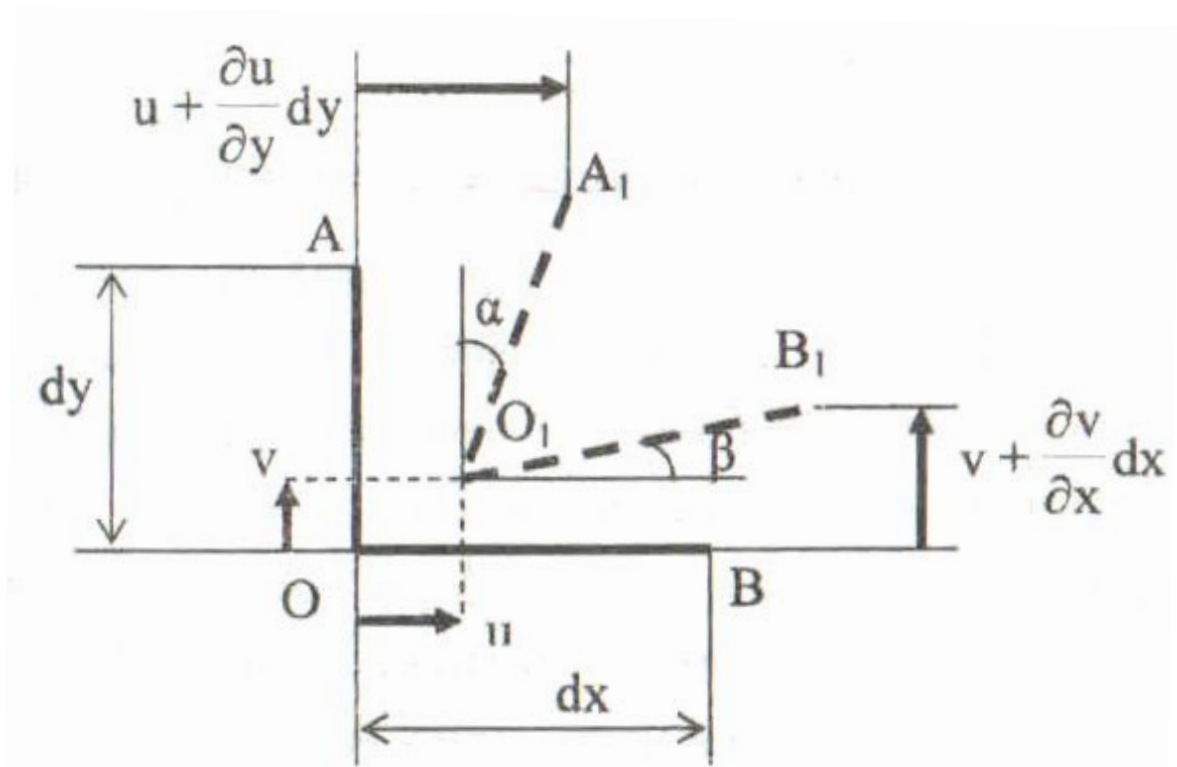
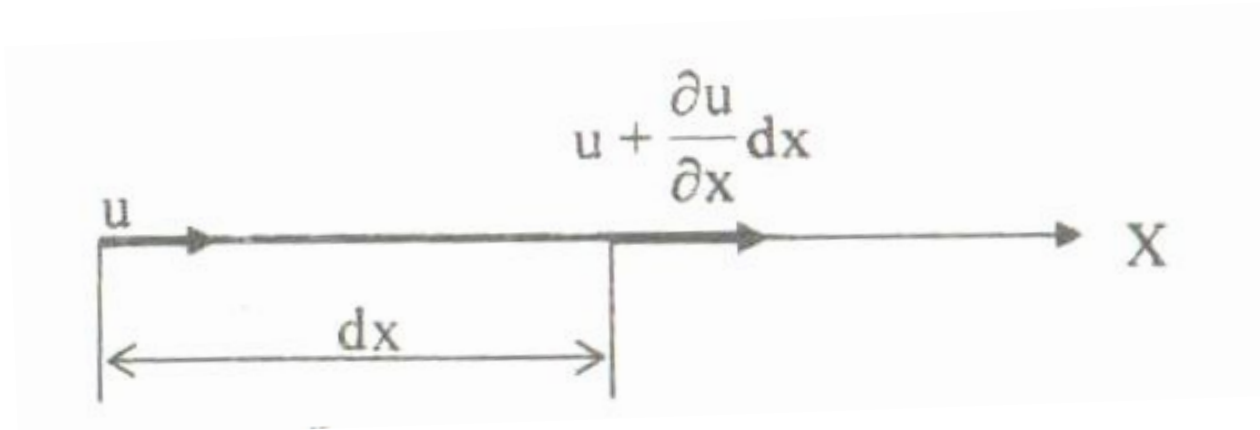
Примем следующее **определение деформаций**: деформации – это величины, на которых совершают работу напряжения:

$$A = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_z \varepsilon_z) dV.$$

$$A = \int_V \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} \right] dV. \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.5)$$

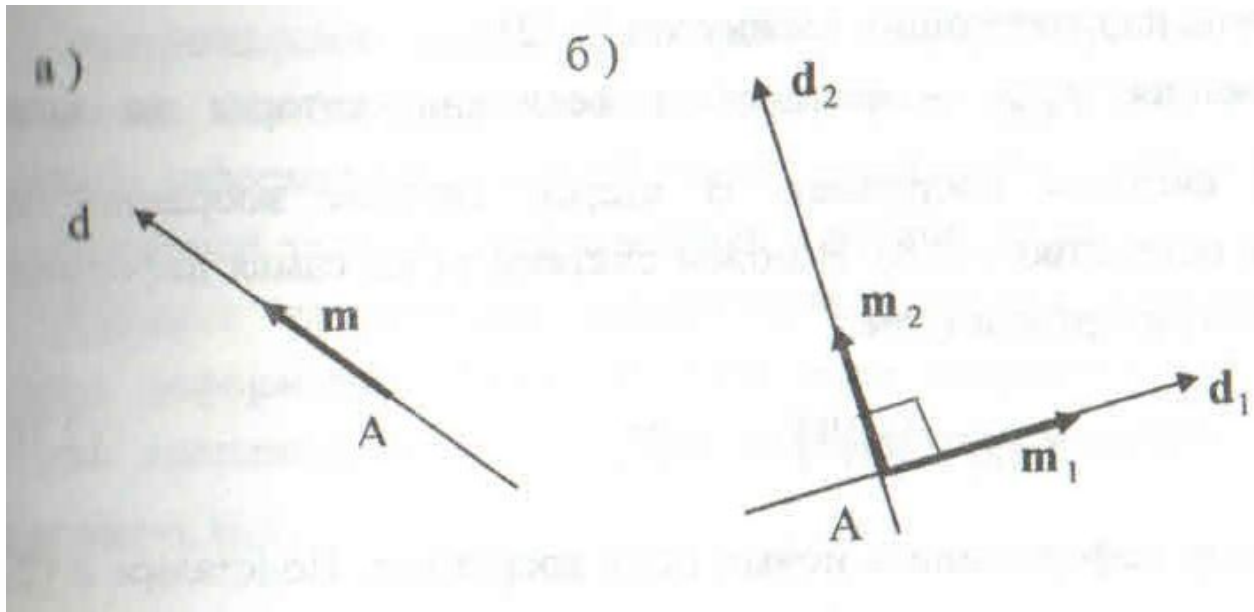
Теория деформаций



Тензор деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_d = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m}, \quad (2.7)$$



$$\gamma_{d_1 d_2} = \mathbf{m}_1^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m}_2, \quad (2.8)$$

Напряжения на произвольно ориентированной площадке

$$\varepsilon_1 = C \varepsilon C^T . \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{\text{гл}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} .$$

$$J_{1\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad J_{2\varepsilon} = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3, \quad J_{3\varepsilon} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 .$$

Спасибо за внимание!