ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
Политехнический Университет
Петра Великого

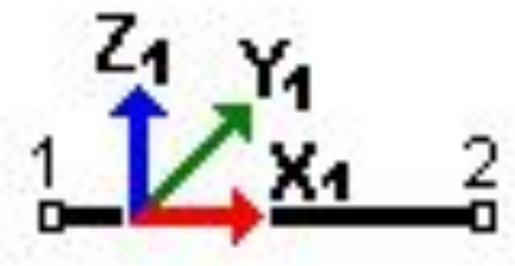
Использование современных программных комплексов в расчете строительных конструкций

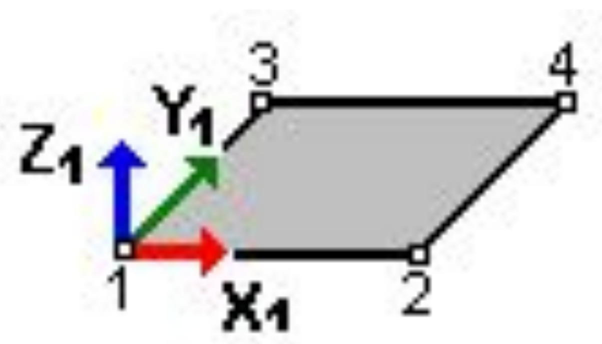
Яваров Александр Валерьевич, к. т.н., доцент СПбПУ (Политех)

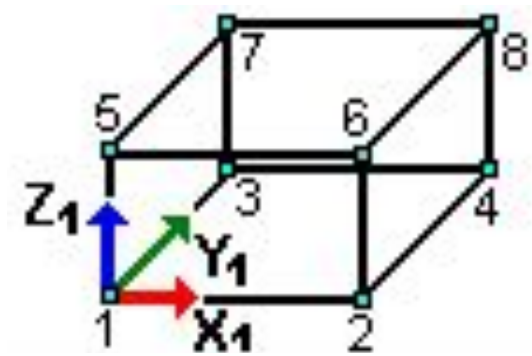
Санкт-Петербург

2017 г.

Конечные элементы:







Стержневой КЭ

Оболочечный КЭ

Объемный КЭ

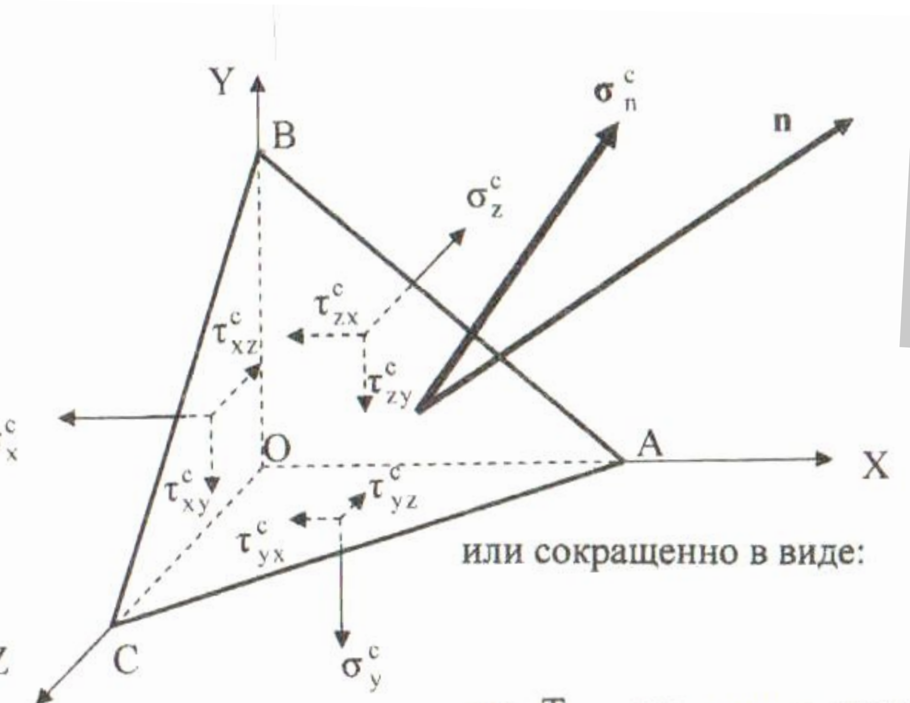
Граничные условия в напряжениях

$$\sigma_{nx} = X_n, \quad \sigma_{ny} = Y_n, \quad \sigma_{nz} = Z_n.$$

В этом случае зависимость (1.4) примет вид:

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z, \\ Y_n &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z, \\ Z_n &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Эти условия равновесия в точках поверхности тела можно записать в матричной форме:



$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

или сокращенно в виде:

$$T^T n = p_n, \tag{1.9}$$

где T – введенная матрица напряжений (1.5), p_n – столбец внешних поверхностных нагрузок и n – столбец компонент **единичной** внешней нормали.

Граничные условия в напряжениях

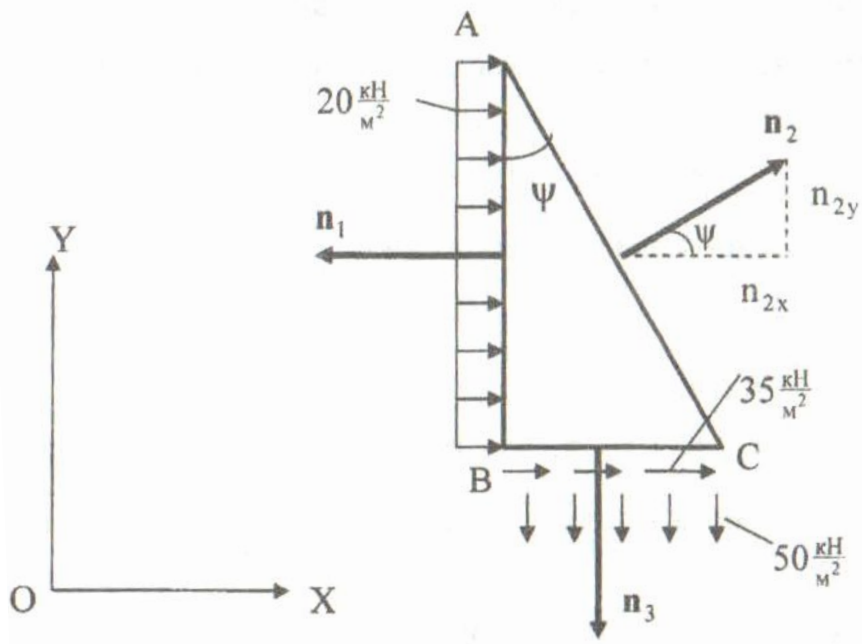


Рис. 1.14

$$n_1 = \begin{vmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\mathbf{n}_1, OX) \\ \cos(\mathbf{n}_1, OY) \\ \cos(\mathbf{n}_1, OZ) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 180^\circ \\ \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$p_n = \begin{vmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$\sigma_x = -20,\ \tau_{xy} = 0,\ \tau_{xz} = 0.$$

$$n_2 = \begin{vmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ n_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{vmatrix}, \quad p_n = \begin{vmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_x = -20,\ \tau_{xy} = 0,\ \tau_{xz} = 0.$$

Уравнения равновесия

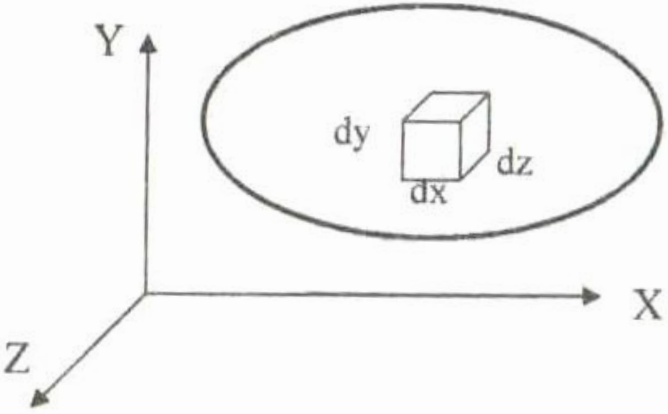
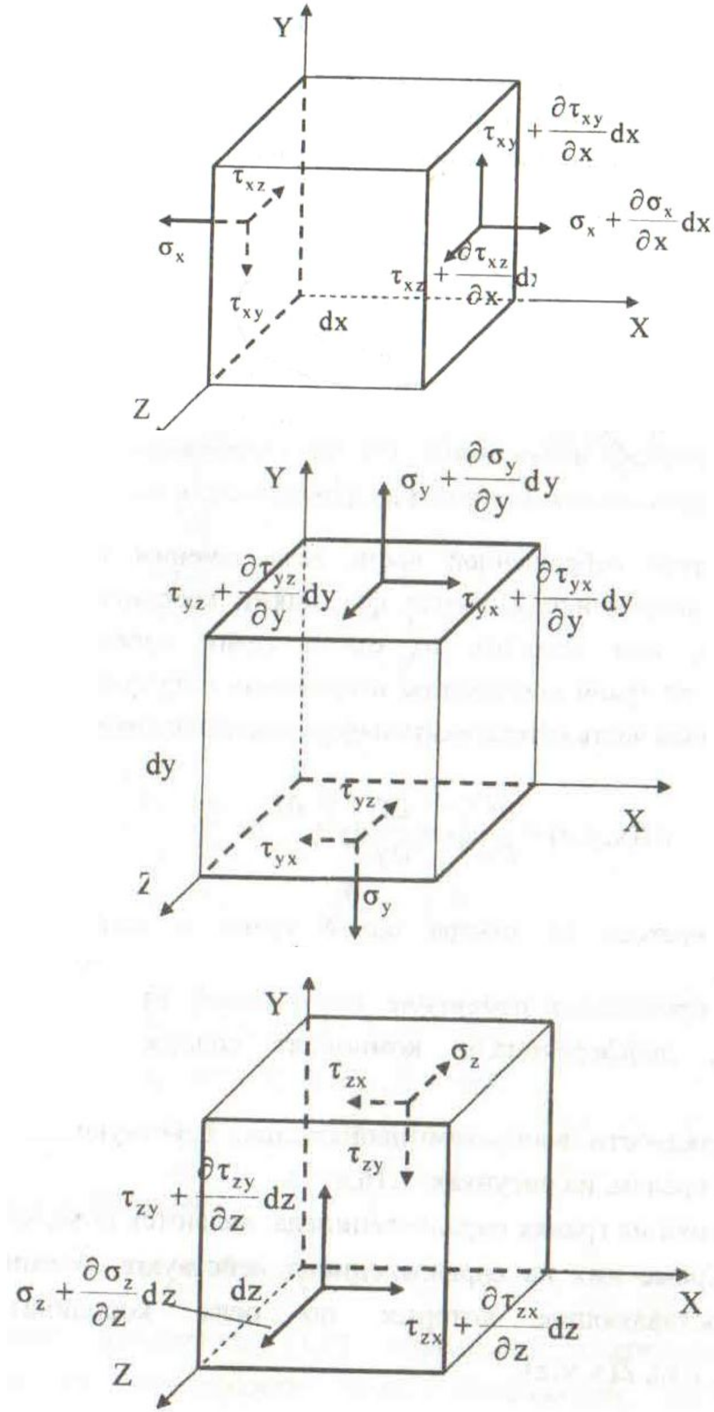


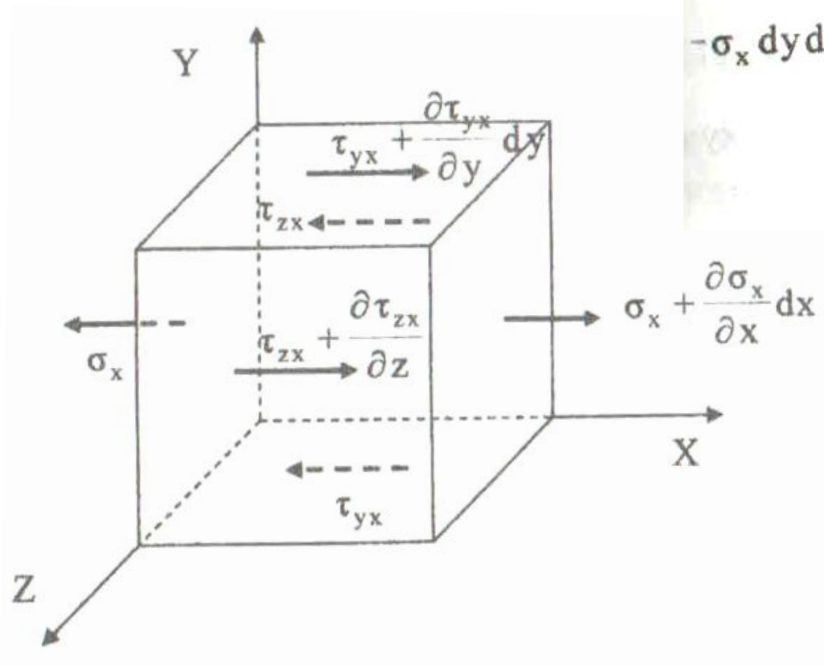
Рис. 1.15

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$X(x,y,z),\ Y(x,y,z),\ Z(x,y,z).$$



Уравнения равновесия



$$-\sigma_x dydz+(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx)dydz-\tau_{yx}dxdz+(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy)dxdz-$$

$$-\tau_{zx}dxdy+(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz)dxdy+X\,dxdydz=0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0.
\end{aligned}\qquad(1.10)$$

$$\tau_{yz}dxdz\frac{dy}{2}+(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy)dxdz\frac{dy}{2}-$$

$$-\tau_{zy}dxdy\frac{dz}{2}-(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz)dxdy\frac{dz}{2}=0,$$

где $dy/2$ – плечо силы $\tau_{yz}dxdz$, $dz/2$ – плечо силы $\tau_{zy}dxdy$.

Уравнения равновесия

Сокращая слагаемые на $dx\,dy\,dz$ и пренебрегая бесконечно малыми членами, приходим к равенству: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Условия равновесия моментов относительно осей OY и OZ приводят к аналогичным зависимостям. Окончательно получаем соотношения:

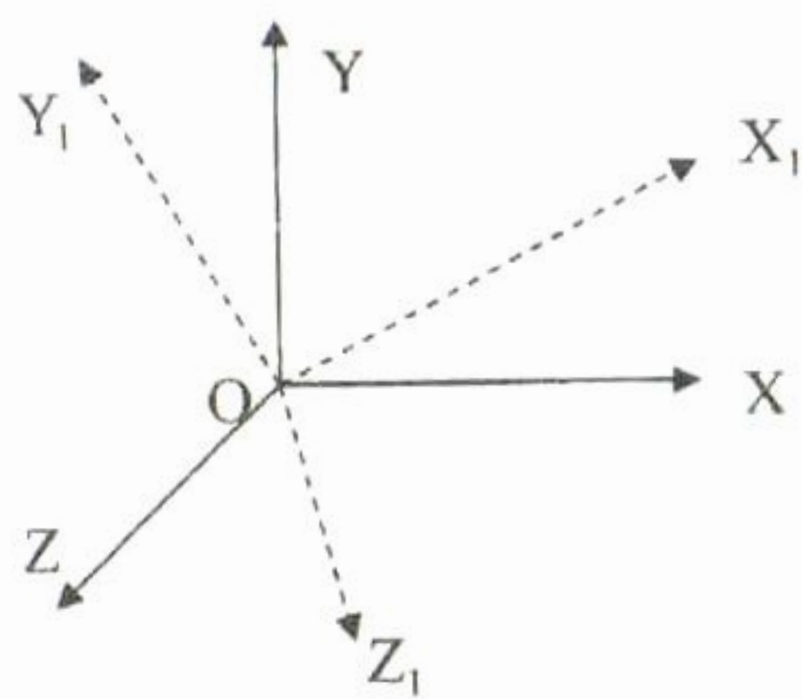
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tag{1.11}$$

называемые **законом парности касательных напряжений**, откуда следует симметричность тензора напряжений T. Это свойство можно записать в виде: $T^T = T$.

Преобразование компонент тензора напряжений при повороте осей координат

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} .$$

$$T_1 = \begin{vmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{x_1 y_1} & \tau_{x_1 z_1} \\ \tau_{x_1 y_1} & \sigma_{y_1} & \tau_{y_1 z_1} \\ \tau_{x_1 z_1} & \tau_{y_1 z_1} & \sigma_{z_1} \end{vmatrix} .$$



Преобразование компонент тензора напряжений при повороте осей координат

Обозначение осей	X	Y	Z
X_1	$\cos(X_1, X)$	$\cos(X_1, Y)$	$\cos(X_1, Z)$
Y_1	$\cos(Y_1, X)$	$\cos(Y_1, Y)$	$\cos(Y_1, Z)$
Z_1	$\cos(Z_1, X)$	$\cos(Z_1, Y)$	$\cos(Z_1, Z)$

Введем матрицу направляющих косинусов:

$$C = \begin{vmatrix} \cos(X_1, X) & \cos(X_1, Y) & \cos(X_1, Z) \\ \cos(Y_1, X) & \cos(Y_1, Y) & \cos(Y_1, Z) \\ \cos(Z_1, X) & \cos(Z_1, Y) & \cos(Z_1, Z) \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

$$T_1 = CTC^{T}. \tag{1.13}$$

Главные напряжения

$$T_{гл} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}, \qquad (1.30)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ J_3 &= \left| T_{гл} \right| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \qquad (1.31)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Теория деформаций

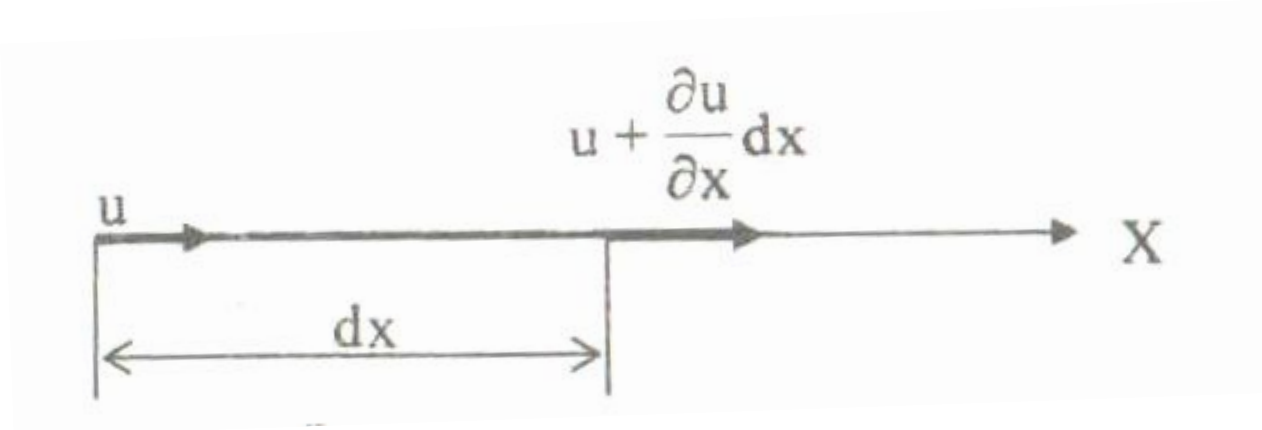
Примем следующее **определение деформаций**: деформации – это величины, на которых совершают работу напряжения:

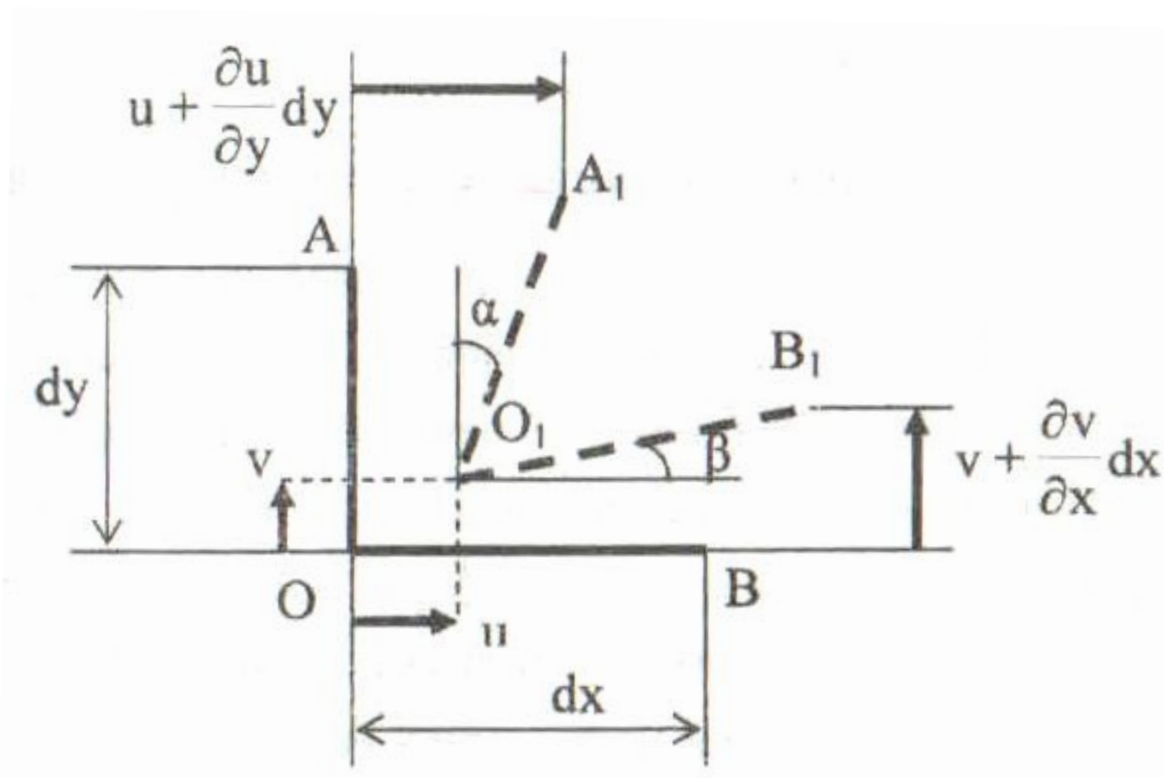
$$A = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_z \varepsilon_z)\,dV.$$

$$A = \int_V \Big[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big) + \tau_{xz}\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz}\Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z}\Big]dV. \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.5)$$

Теория деформаций

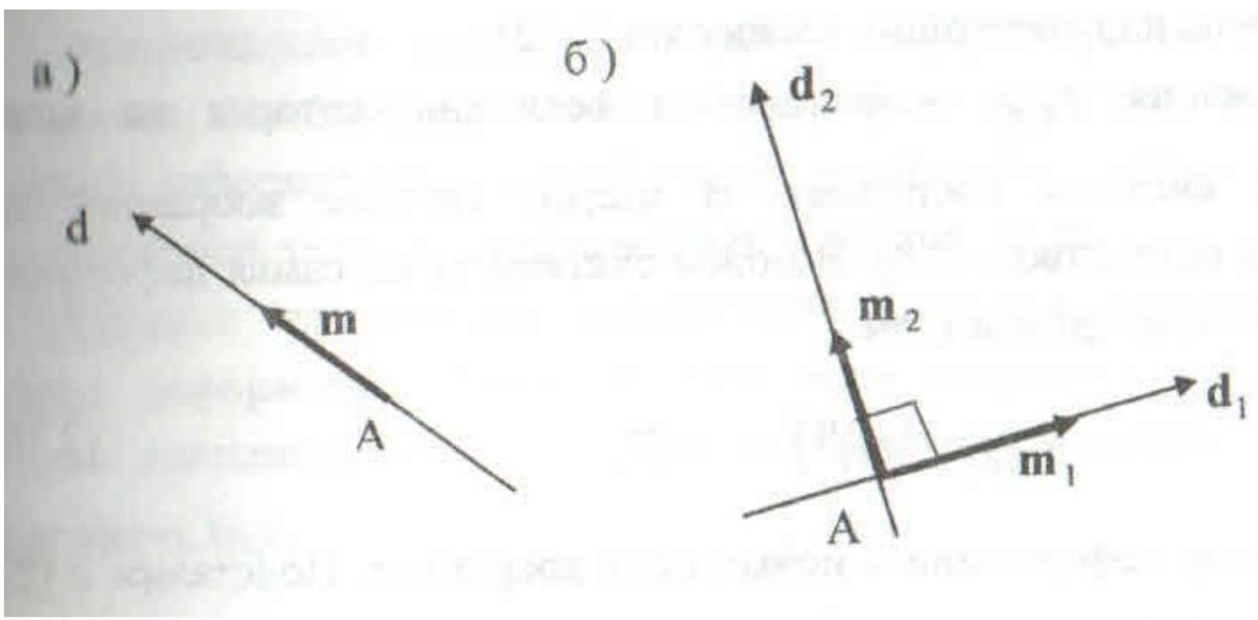




Тензор деформаций

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \qquad (2.6)$$

$$\varepsilon_d = \mathbf{m}^T \varepsilon\, \mathbf{m}, \qquad (2.7)$$



$$\gamma_{d_1 d_2} = \mathbf{m}_1^T \varepsilon\, \mathbf{m}_2, \qquad (2.8)$$

Напряжения на произвольно ориентированной площадке

$$\varepsilon_1 = C\,\varepsilon\,C^T \quad . \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_{\text{гл}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} .$$

$$J_{1\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 , \qquad J_{2\varepsilon} = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 , \qquad J_{3\varepsilon} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 .$$

Спасибо за внимание!