Интерполяция

и

аппроксимация

функций

Таблично-заданная функция:

X	Y
x_1	y_1
x_2	y_2
…	…
x_i	y_i
…	…
x_n	y_n

Достоинство:

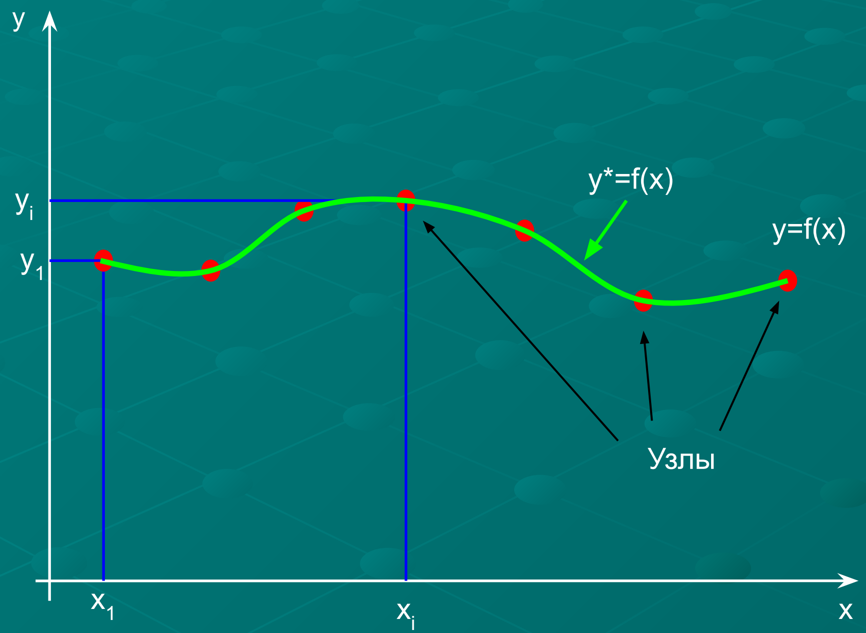
Нет необходимости проводить дополнительные расчеты значения функции.

Недостаток:

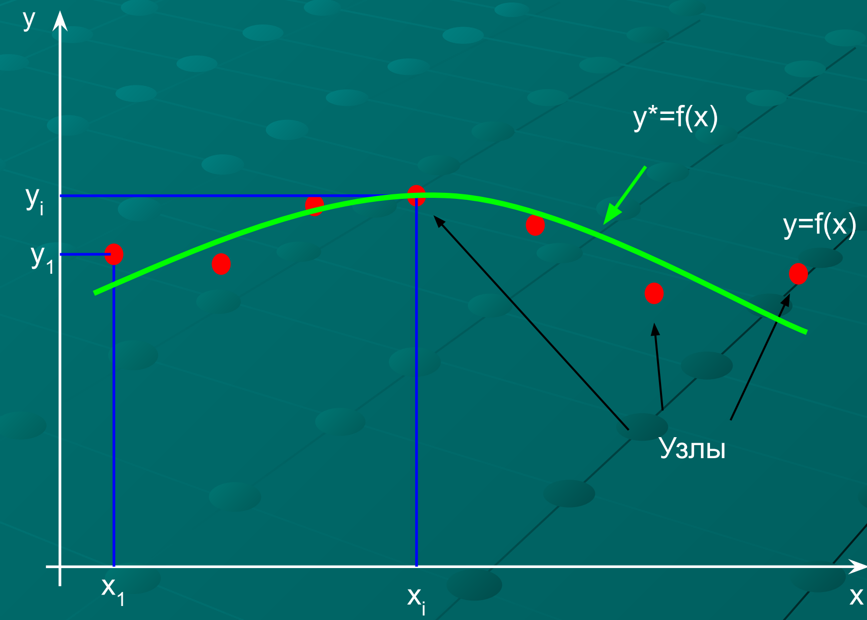
Невозможность определения значений функции при значениях аргумента, отличных от табличных.

Графическая интерпретация методов.

Интерполяция



Аппроксимация



1. Интерполяция функций

А) Глобальная интерполяция.

Б) Локальная интерполяция.

Локальная интерполяция

Необходимо определиться с видом интерполирующей функции.

На практике чаще всего использую следующие виды локальной интерполяции:

1. Линейная интерполяция
2. Квадратичная интерполяция
3. Сплайн-интерполяция

Глобальная интерполяция

Необходимо, чтобы одна интерполирующая функция проходила через все узлы таблично заданной функции.

Обычно в этом случае интерполирующую функцию ищут в виде полинома:

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_ix^i+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}$$

Через n точек может проходить только один график функции полинома n-1 порядка.

Интерполяция методом канонических полиномов

В уравнение полиномиальной зависимости подставляются все значения точек x - y (аргумент - функция) табличной зависимости.

Таким образом, получается система линейных уравнений n-го порядка:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \cdots + c_i x_1^i + \cdots + c_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \cdots + c_i x_2^i + \cdots + c_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \cdots + c_i x_i^i + \cdots + c_{n-1} x_i^{n-1} = y_i \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \cdots + c_i x_n^i + \cdots + c_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Решаем полученную СЛАУ одним из известных методов, получаем значения параметров полиномиальной зависимости:

c_0, c_1, c_2,…, c_i,…, c_{n-1}

В полученное уравнение полиномиальной функции с найденными параметрами подставляем значение аргумента $x_ц$ и находим значение функции $y_ц$.

Данный метод удобен в случаях, когда необходимо найти несколько значений функции при нескольких значениях аргумента.

Интерполяция методом полинома Лагранжа

Данный метод удобен в случаях, когда необходимо найти только одно значение функции при одном значении аргумента.

В этом методе полином n-1 степени представляется в виде:

$$y_ц = y_1 l_1 + y_2 l_2 + \ldots + y_i l_i + \ldots + y_n l_n$$

где l_1, l_2, …, l_i, …, l_n - являются также полиномиальными зависимостями.

Данные полиномы рассчитываются по следующим формулам:

$$l_1 = \frac{x_{ц} - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_{ц} - x_3}{x_1 - x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{ц} - x_i}{x_1 - x_i} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{ц} - x_n}{x_1 - x_n}$$

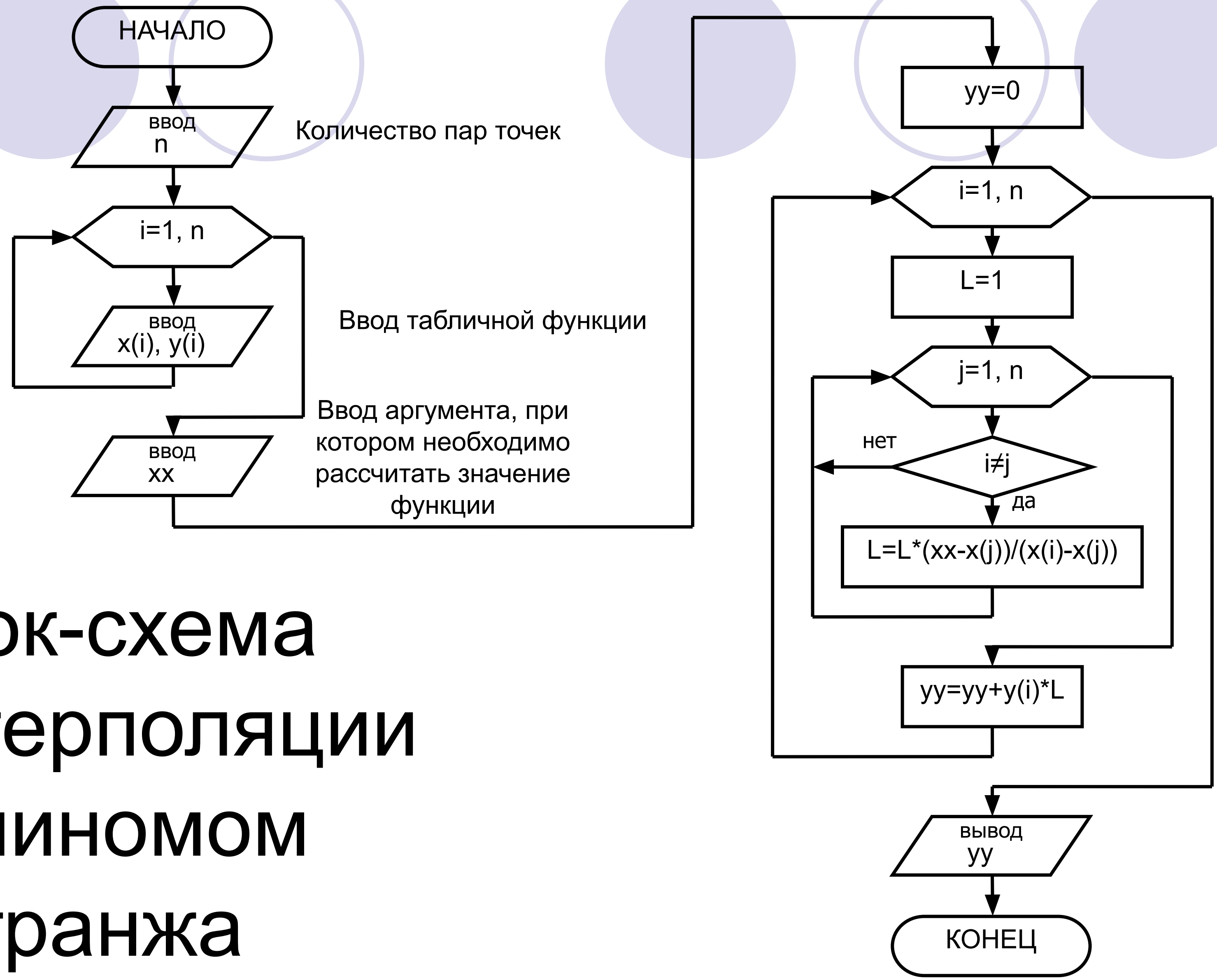
$$l_2 = \frac{x_{ц} - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{ц} - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{ц} - x_i}{x_2 - x_i} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{ц} - x_n}{x_2 - x_n}$$

$$\vdots$$

$$l_i = \frac{x_{ц} - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x_{ц} - x_2}{x_i - x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{ц} - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x_{ц} - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{ц} - x_n}{x_i - x_n}$$

Коэффициент l_i будет равен 1, если $x_{ц}=x_i$, и будет равен 0 (нулю), если $x_{ц}= x_1$, x_2 и так далее.

Блок-схема интерполяции полиномом Лагранжа



Достоинства метода интерполяции:

Если исходная таблично заданная функция не содержит в себе погрешности, то метод интерполяции дает достаточно точные и достоверные результаты.

Недостатки метода интерполяции:

1. В случае локальной интерполяции получается несколько интерполирующих функций, с которыми неудобно работать.
2. В случае глобальной интерполяции при достаточно большом количестве пар точек (узлов) получается достаточно сложная и громоздкая интерполирующая функция.
3. Если исходная таблично заданная функция содержит в себе погрешность, то интерполирующая функция также будет «копировать» эту погрешность и не даст необходимого достоверного результата.

2. Аппроксимация функций

Всех перечисленных недостатков интерполяции лишен метод аппроксимации функций.

Аппроксимирующая функция не проходит через все узлы, а лежит максимально близко к ним.

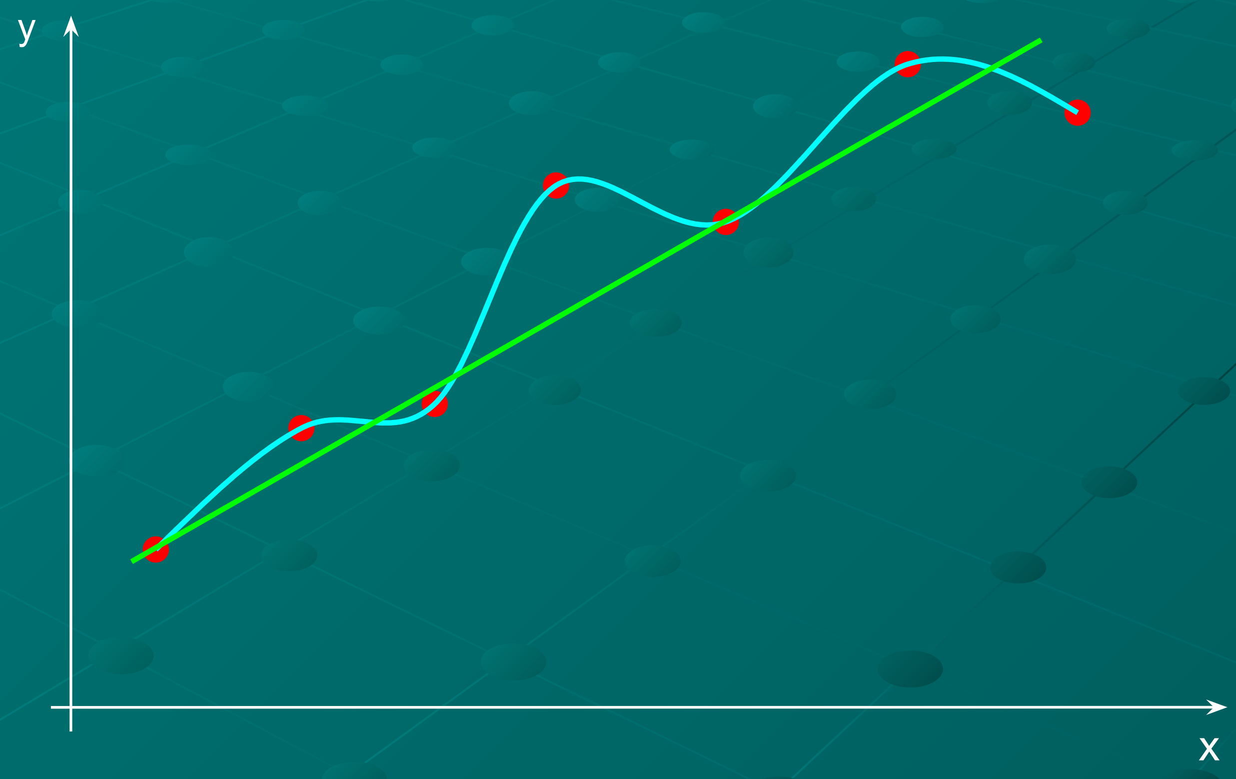
В этом методе в случае флуктуаций (выбросов) точек, аппроксимирующая функция получается достаточно гладкой.

Пример:

Рассматривается линейная функция.

Метод интерполяции в этом случае неприменим.

Применяется метод аппроксимации.

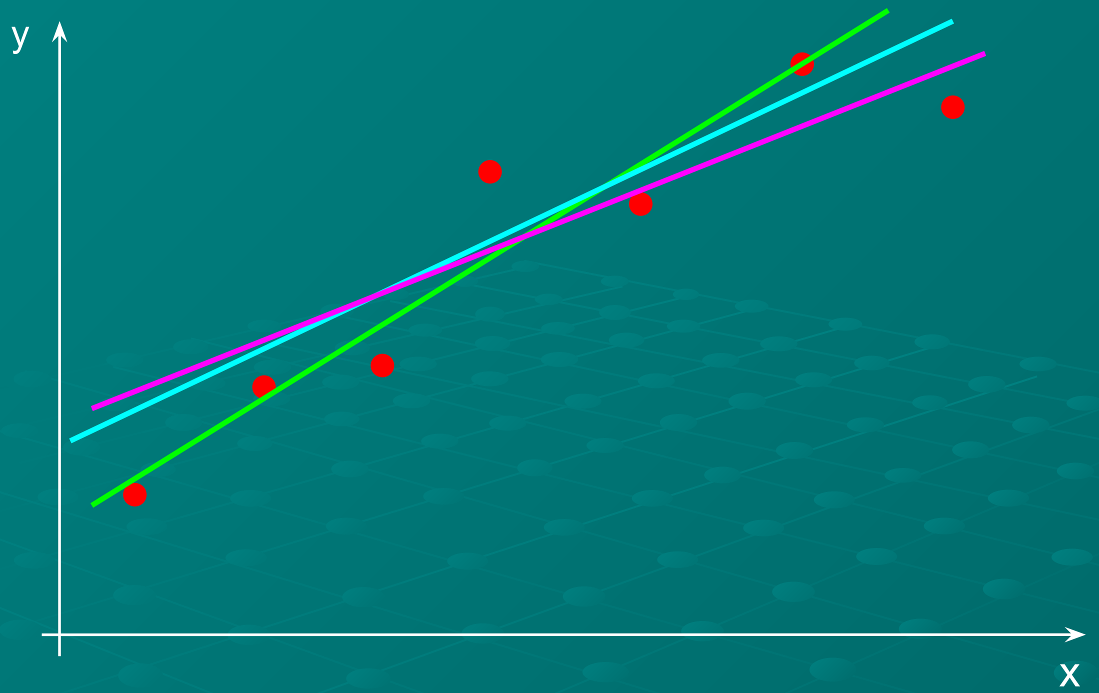


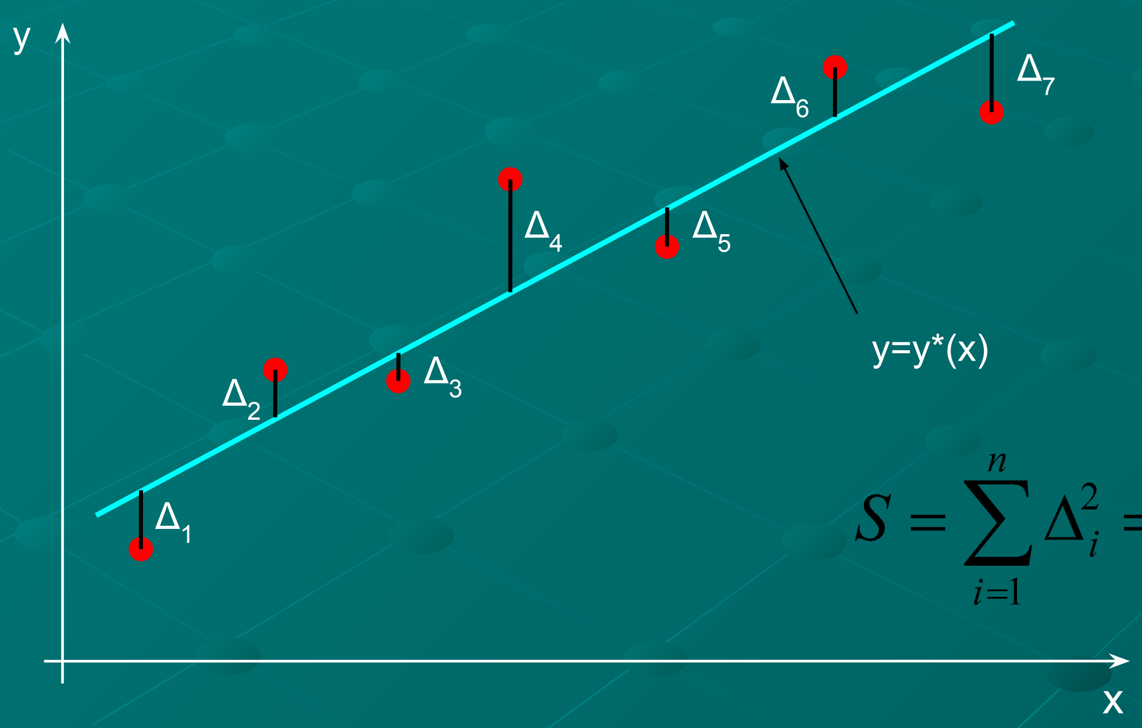
Возникает вопрос:

Каков критерий близости аппроксимирующей функции к исходной таблично заданной?

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК).

Суть: Аппроксимирующая функция должна быть такой, чтобы сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции от исходной таблично заданной была <u>минимальной.</u>





Согласно МНК только одна функция будет лежать максимально близко к исходным узлам.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y^*(x_i))^2 \Rightarrow \min$$

Замечание:

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ не позволяет определить <u>вид</u> аппроксимирующей функции.

МНК позволяет определить только <u>параметры</u> выбранного вида аппроксимирующей функции.

<u>Вид</u> аппроксимирующей функции определяет <u>пользователь</u> исходя из теоретических знаний, логических предпосылок или других разумных соображений.

Аппроксимация линейной функцией

В качестве аппроксимирующей выбирают линейную функцию: $y^*=c_0+c_1x$.

Здесь c_0 и c_1 - параметры функции, которые определим с использованием МНК.

В формулу суммы квадратов отклонений подставим аппроксимирующую линейную функцию, получим:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y^*(x_i))^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-c_0-c_1x_i)^2\Rightarrow\min$$

Находим минимум функции S,приравняв частные производные функции S по параметрам аппроксимирующей функции нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-c_0-c_1x_i)x_i=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_0}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-c_0-c_1x_i)=0$$

Преобразуем полученные выражения:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - c_1 x_i^2 - c_0 x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - c_1 x_i - c_0) = 0$$

В результате получаем СЛАУ, где в качестве неизвестных выступают параметры линейной функции c_0 и c_1:

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c_0 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + c_0 \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

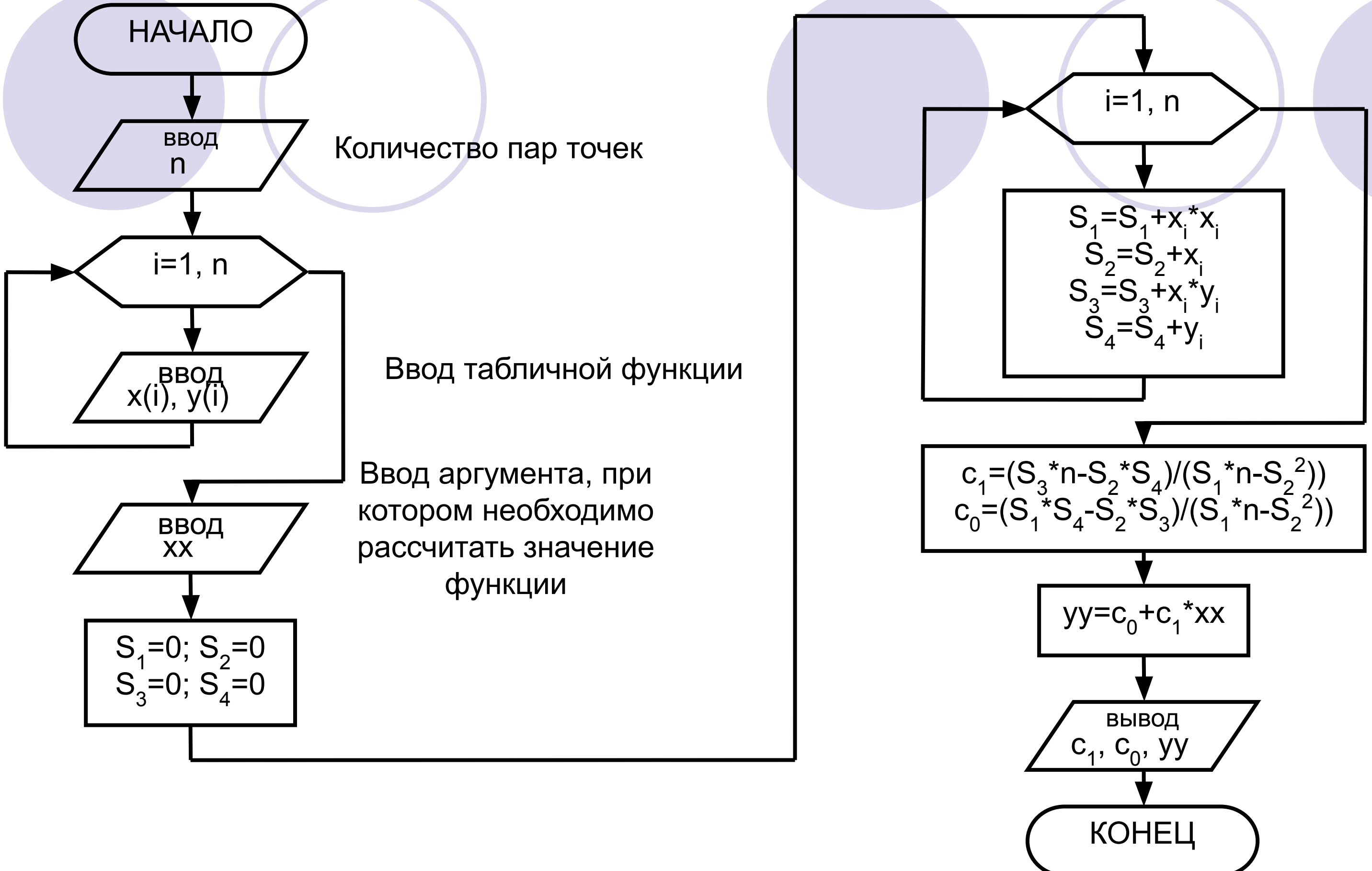
Решаем полученную СЛАУ методом Крамера:

$$c_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot n - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

$$c_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

Таким образом, вычислив параметры c_0 и c_1, мы получаем линейную аппроксимирующую функцию:

$y^*=c_0+c_1x$.



Блок-схема аппроксимации линейной функцией

Аппроксимация квадратичной функцией

В качестве аппроксимирующей выбирают квадратичную функцию: $y^*=c_0+c_1x+c_2x^2$.

Здесь c_0 , c_1 и c_2 - параметры функции, которые определим с использованием МНК.

В формулу суммы квадратов отклонений подставим аппроксимирующую квадратичную функцию, получим:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y^*(x_i))^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-c_0-c_1x_i-c_2x_i^2)^2\Rightarrow\min$$

Для нахождения минимума функции S приравняем частные производные функции S по параметрам аппроксимирующей функции нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial c_2}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-c_0-c_1x_i-c_2x_i^2)x_i^2=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_1}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-c_0-c_1x_i-c_2x_i^2)x_i=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_0}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-c_0-c_1x_i-c_2x_i^2)=0$$

Преобразуем полученные выражения следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 y_i - c_2 x_i^4 - c_1 x_i^3 - c_0 x_i^2) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - c_2 x_i^3 - c_1 x_i^2 - c_0 x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - c_2 x_i^2 - c_1 x_i - c_0) = 0$$

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений, где в качестве неизвестных выступают параметры квадратичной функции c_0 , c_1 и c_2:

$$\begin{cases} c_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ c_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ c_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + c_0 \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Решаем полученную СЛАУ методом Крамера для систем 3-го порядка и вычисляем параметры c_0 , c_1 и c_2.

Таким образом, мы получаем квадратичную аппроксимирующую функцию:

$$y^*=c_0+c_1x+c_2x^2$$

Блок-схема аппроксимации квадратичной функцией