Elementy Geometrii Analityczne

Prosta w R^2

- Ogóle równanie prostej:

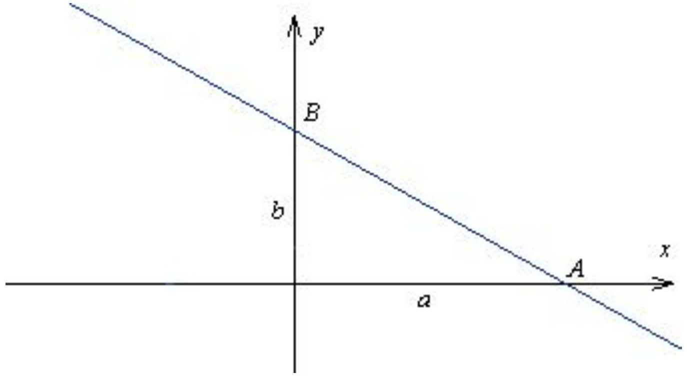
$$Ax + By + C = 0$$

- Równanie kierunkowe prostej

$$y = ax + b$$

- Równanie odcinkowe prostej:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

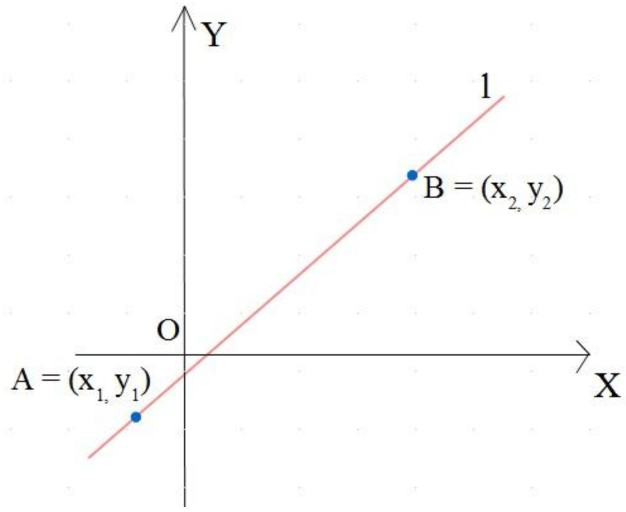


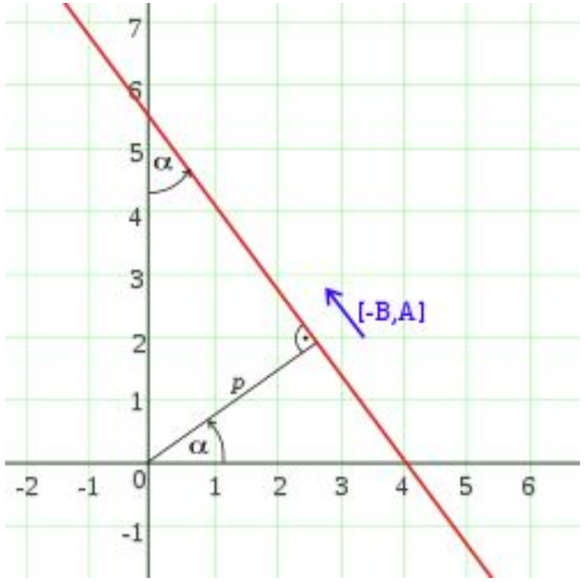
Prosta w R^2

- Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

- Równanie prostej w postaci normalnej (postać Hessego)
- $x cos \alpha + y sin \alpha - p = 0$





Prosta w R^2

» Równanie parametryczn prostej

Wektor kierunkowy $\vec{\alpha} = [u_1, u_2]$

Punkt na prostej $A = (x_A, y_A)$

$$l = \{A + t\vec{\alpha}: t \in R\}$$

Lub równoważnie

$$\begin{cases} x = x_A + tu_1 \\ y = y_A + tu_1 \end{cases}$$

Odcinek

- Długość odcinka

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

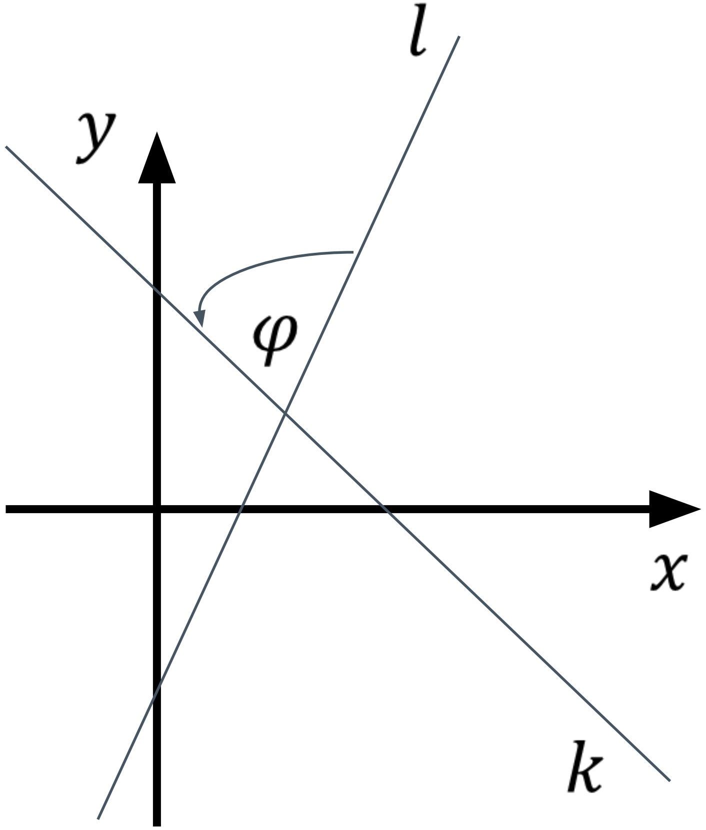
- Współrzędne środka odcinka

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

- Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Kąt pomiędzy prostymi



- $l: y = a_1 x + b_1 \quad k: y = a_2 x + b_2$

$$\tan\varphi = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}\right|$$

Własności prostych

- $l \colon y = a_1 x + b_1 \quad k \colon y = a_2 x + b_2$
- Równoległe gdy $a_1 = a_2$
- Prostopadłe gdy $a_1 a_2 = -1$
- Punkt przecięcia prostych (x,y):

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

Układ współrzędnych biegunowych

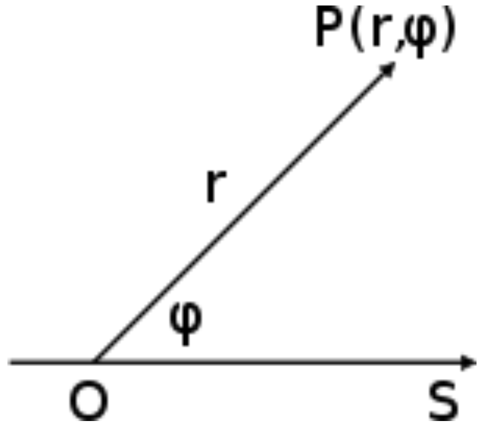
» Każdemu punktowi P płaszczyzny przypisujemy jego **współrzędne biegunowe** jak następuj:

– **promień wodzący (r)** punktu P to jego odległość $|OP|$ od bieguna

– **amplituda punktu** P to wartość kąta skierowanego pomiędzy półprostą OS a wektorem $\overrightarrow{OP}$

– Współrzędne bieguna O są równe (0,0)

– $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



Przejścia

System polarny ----> System kartezjański

$$Dla\ P = (r, \varphi)$$

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

System kartezjański ----> System polarny

$$Dla\ P = (x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),\ x > 0\ i\ y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi,\ x > 0\ i\ y < 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi,\ x < 0 \\ \frac{\pi}{2},\ x = 0\ i\ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2},\ x = 0\ i\ y < 0 \end{cases}$$

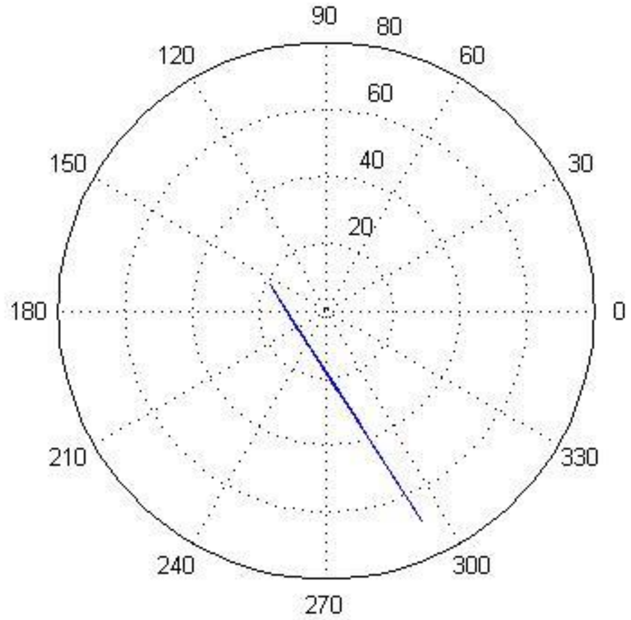
Prosta w układzie biegunowym

- Prosta nie przechodząca przez biegun

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

- Prosta przechodząca przez biegun

$$\varphi = \alpha + k\pi$$



Płaszczyzna w R^3

» Równanie płaszczyzny
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

A, B, C równocześnie nie mogą być zerami

Wektor $[A, B, C]$ jest wektorem normalnym do płaszczyzny

» Równanie normalne
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\alpha = \frac{A}{N} \quad \beta = \frac{B}{N} \gamma = \frac{C}{N} \delta = \frac{D}{N}$$

$$N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Okrąg

Okrąg w układzie kartezjańskim

o środku $S = (a, b)$i
promieniu $r > 0$

Równanie okręgu
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Postać parametryczna:
$$\begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\sin\alpha \end{cases} \quad \alpha \in [0,2\pi)$$

Okrąg w układzie biegunowym

O środku w $S = (r_0, \varphi_0)$i
promieniu a> 0
$$r^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 = a^2$$

Transformacje geometryczne

» Translacja o wektor

$$P = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

» Skalowanie względem początku układu współrzędnych

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

Obrót

- Wokół osi OX

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

- Wokół osi OY

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}$$

- Wokół osi OZ

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacja o dowolny kąt:

$P'=R_{os}(\theta)\mathrm{P}$

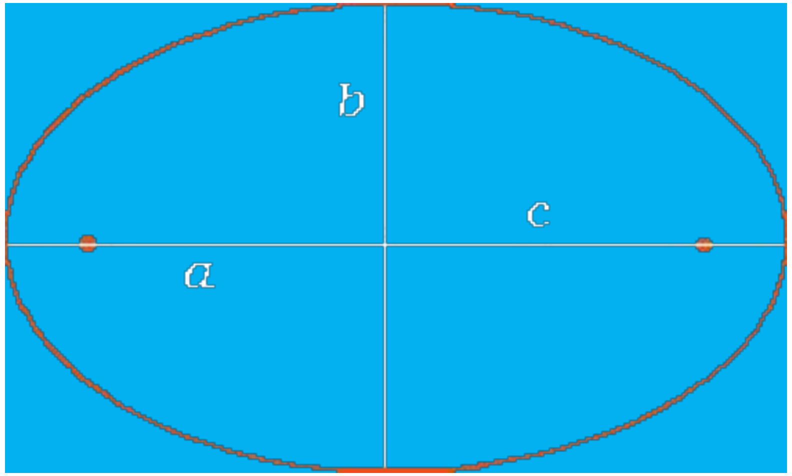
Elipsa

» Równanie elipsy o środku w $O = (x_0, y_0)$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Odległość ogniska od środka symetrii elipsy

$$c^2 = a^2 - b^2$$



Każdy promień wychodzący z jednego ogniska, po odbiciu od elipsy trafia do drugiego ogniska. Dodatkowo, każdy z tych promieni przebywa taką samą drogę, równą *2a*

Hiperbola

- $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Odległość ogniska od środka symetrii elipsy

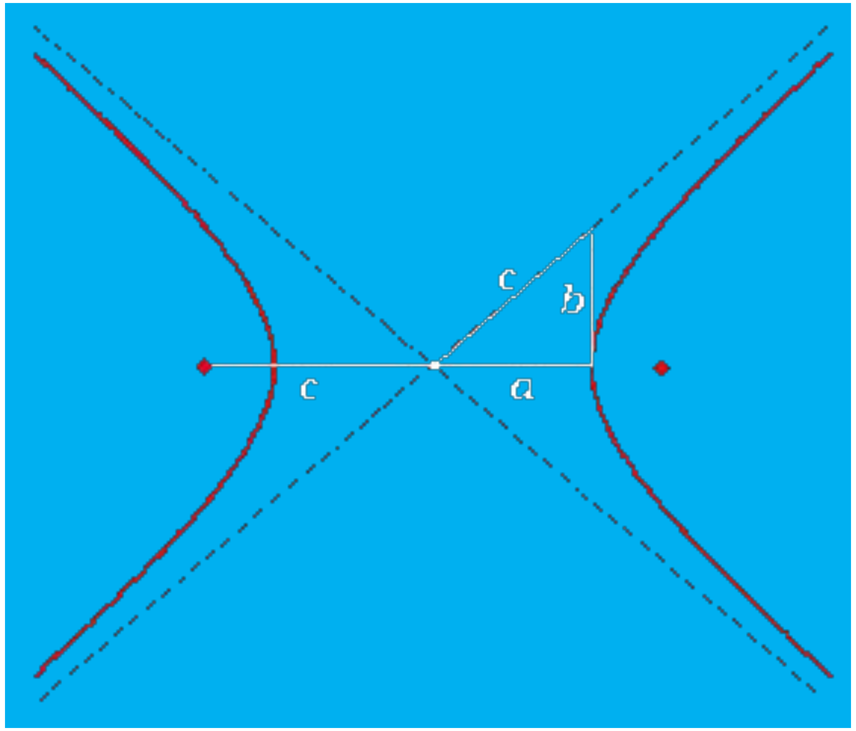
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Asymptoty hiperboli

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

i

$$y - y_0 = -k(x - x_0)$$



Parabola

» Równania Paraboli

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2$$

Lub

$$2p(x - x_0) = (y - y_0)^2$$