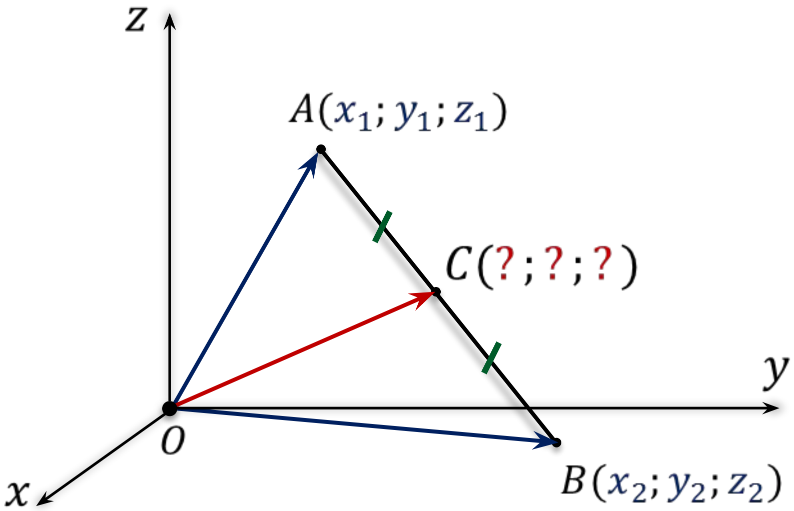
Простейшие задачи
в координатах

Сегодня на уроке:

- ✔ Вычисление координат середины отрезка.
- ✔ Вычисление длины отрезка по его координатам.
- ✔ Вычисление расстояния между двумя точками.

1. Определение координат середины отрезка



$$\overrightarrow{OC}\left\{\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right\}$$

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Задача. Точка M – середина отрезка AB.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}} \\ \boldsymbol{z = \dfrac{y_1 + y_2}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{0 + (-2)}{2} \\ y = \dfrac{3 + 2}{2} \\ z = \dfrac{-4 + 0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2{,}5 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_2 = 2x - x_1} \\ \boldsymbol{y_2 = 2y - y_1} \\ \boldsymbol{z_2 = 2z - z_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2 \cdot 3 - 14 \\ y_2 = 2 \cdot (-2) - (-8) \\ z_2 = 2 \cdot (-7) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -8 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = -19 \end{cases}$$

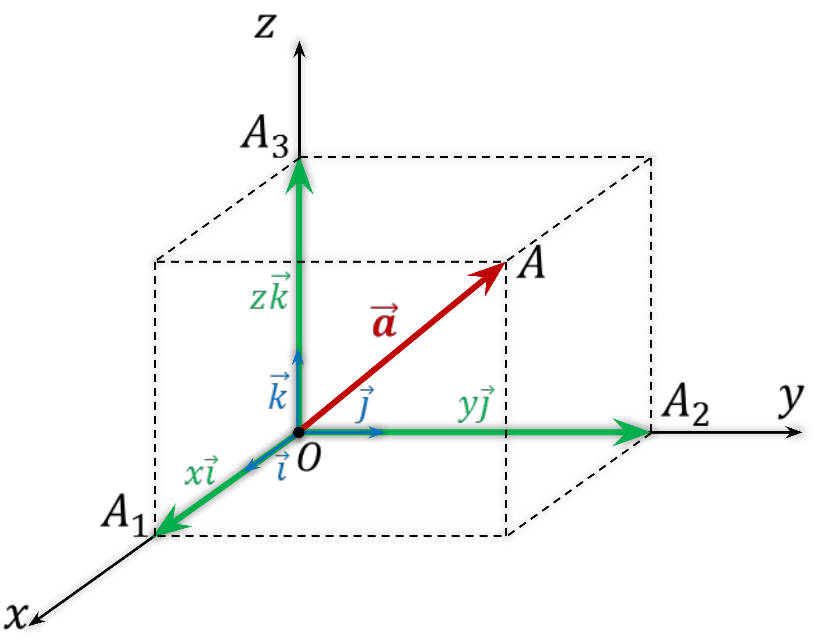
$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 2x - x_2} \\ \boldsymbol{y_1 = 2y - y_2} \\ \boldsymbol{z_1 = 2z - z_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot (-12) - 0 \\ y_1 = 2 \cdot 3 - 0 \\ z_1 = 2 \cdot 15 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -24 \\ y_1 = 8 \\ z_1 = 28 \end{cases}$$

2. Вычисление длины вектора по его координатам

Длина вектора $\vec{a}\,\{x; y; z\}$ равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.



$$\vec{a}\,\{x; y; z\} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i} \qquad \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j} \qquad \overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \Longrightarrow \quad |\overrightarrow{OA}| = |\vec{a}| = OA$$

$$OA = \sqrt{{OA_1}^2 + {OA_2}^2 + {OA_3}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\boldsymbol{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Задача. Вычислить длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

а) $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 3)$;
б) $A(-35; -17; 20)$, $B(-34; -5; 8)$.

$\vec{a}\,\{x; y; z\}$

$|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}$

Решение.

а) $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 3)$

$\overrightarrow{AB}\,\{1 - (-1); -2 - 0; 3 - 2\}$

$\overrightarrow{AB}\,\{2; -2; 1\}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9}$

$|\overrightarrow{AB}| = 3$

б) $A(-35; -17; 20)$, $B(-34; -5; 8)$

$\overrightarrow{AB}\,\{-34 - (-35); -5 - (-17); 8 - 20\}$

$\overrightarrow{AB}\,\{1; 12; -12\}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 12^2 + (-12)^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 144 + 144}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{289}$

$|\overrightarrow{AB}| = 17$

Задача. Вычислить длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{m}$.

$\vec{a}\,\{5; -1; 7\}$ $\quad$ $\vec{b}\,\{2\sqrt{3}; -6; 1\}$ $\quad$ $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\quad$ $\vec{d} = 2\vec{k}$ $\quad$ $\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j}$

Решение.

$\vec{a}\,\{5; -1; 7\}$

$\vec{a} = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 1 + 49} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$\vec{b}\,\{2\sqrt{3}; -6; 1\}$

$\vec{b} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{12 + 36 + 1} = \sqrt{49} = 7$

$\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \vec{c}\,\{1; 1; 1\}$

$\vec{c} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

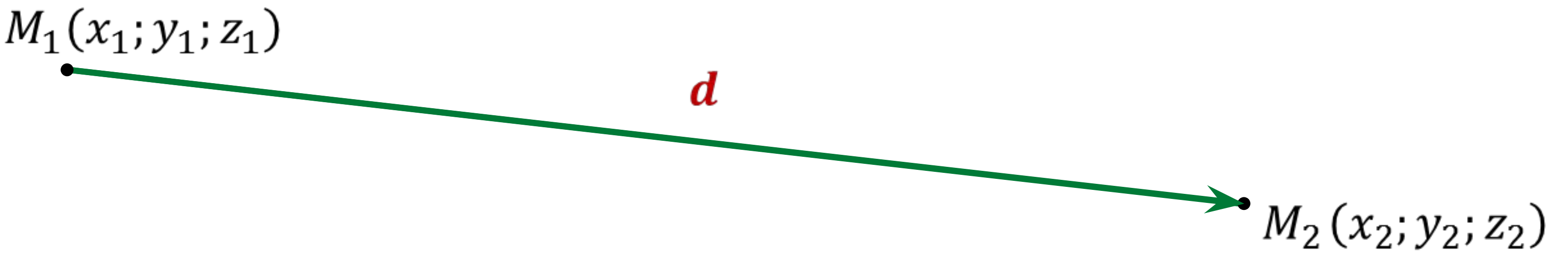
$\vec{d} = 2\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \vec{d}\,\{0; 0; 2\}$

$\vec{d} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

$\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j} \quad \Longrightarrow \quad \vec{c}\,\{1; -2; 0\}$

$\vec{m} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$

3. Определение расстояния между двумя точками



$\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$|\overrightarrow{M_1M_2}| = M_1M_2 = d$

$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$

Задача. По координатам точек A, B и C определить вид ΔABC.

а) $A(9;3;-5)$, $B(2;10;-5)$, $C(2;3;2)$

б) $A(3;7;-4)$, $B(5;-3;2)$, $C(1;3;-10)$

Решение.

а) $A(9;3;-5)$, $B(2;10;-5)$, $C(2;3;2)$

$$AB=\sqrt{(2-9)^2+(10-3)^2+(-5-(-5))^2}=\sqrt{(-7)^2+7^2+0^2}=7\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(2-2)^2+(3-10)^2+(2-(-5))^2}=\sqrt{0^2+(-7)^2+7^2}=7\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(2-9)^2+(3-3)^2+(2-(-5))^2}=\sqrt{(-7)^2+0^2+7^2}=7\sqrt{2}$$

$\Longrightarrow\quad \Delta ABC$ – правильный

Задача. По координатам точек A, B и C определить вид ΔABC.

а) $A(9;3;-5)$, $B(2;10;-5)$, $C(2;3;2)$

б) $A(3;7;-4)$, $B(5;-3;2)$, $C(1;3;-10)$

Решение.

б) $A(3;7;-4)$, $B(5;-3;2)$, $C(1;3;-10)$

$$AB=\sqrt{(5-3)^2+(-3-7)^2+(2-(-4))^2}=\sqrt{2^2+(-10)^2+6^2}=\sqrt{140}=2\sqrt{35}$$

$$BC=\sqrt{(1-5)^2+(3-(-3))^2+(-10-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+6^2+(-12)^2}=\sqrt{196}=14$$

$$AC=\sqrt{(1-3)^2+(3-7)^2+(-10-(-4))^2}=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-6)^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$$

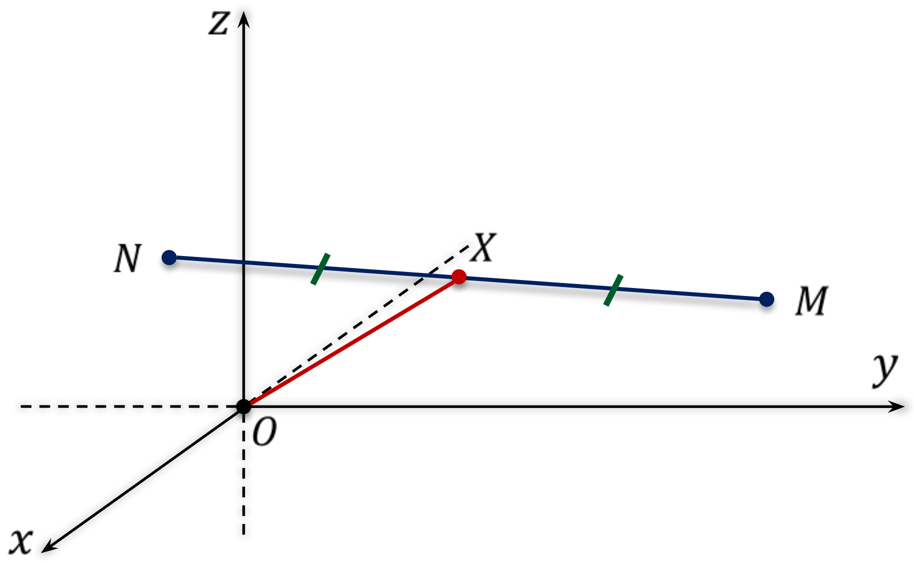
$$\sqrt{196}^2=\sqrt{140}^2+\sqrt{56}^2$$

$196=140+56$ $\quad\Longrightarrow\quad$ ΔABC – прямоугольный, разносторонний

$196=196$

Задача. Найти расстояние от точки начала координат O до середины отрезка MN, если $M(-4; 7; 0)$ и $N(0; -1; 2)$.

Решение.



$M(-4; 7; 0)$ $N(0; -1; 2)$

X

$X(-2; 3; 1)$ $O(0; 0; 0)$

$$OX = \sqrt{(-2-0)^2 + (3-0)^2 + (1-0)^2}$$

$$OX = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}$$

Ответ: $\sqrt{14}$.

Простейшие задачи в координатах