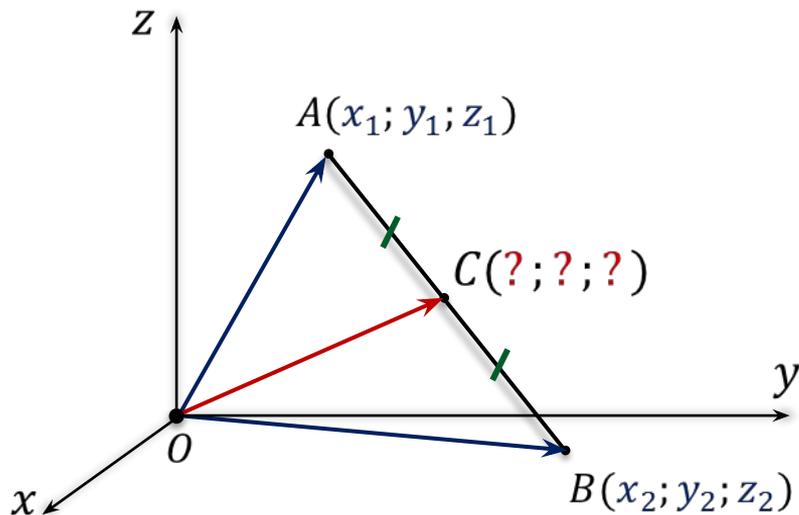


# Простейшие задачи в координатах

## Сегодня на уроке:

- ✓ Вычисление координат середины отрезка.
- ✓ Вычисление длины отрезка по его координатам.
- ✓ Вычисление расстояния между двумя точками.

# 1. Определение координат середины отрезка



$$\vec{OC} \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right\}$$

$$C \left( \frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Каждая координата середины отрезка  
равна полусумме  
соответствующих координат его концов.

**Задача.** Точка  $M$  — середина отрезка  $AB$ .


$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{0 + (-2)}{2} \\ y = \frac{3 + 2}{2} \\ z = \frac{-4 + 0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2,5 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2x - x_1 \\ y_2 = 2y - y_1 \\ z_2 = 2z - z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2 \cdot 3 - 14 \\ y_2 = 2 \cdot (-2) - (-8) \\ z_2 = 2 \cdot (-7) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -8 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = -19 \end{cases}$$

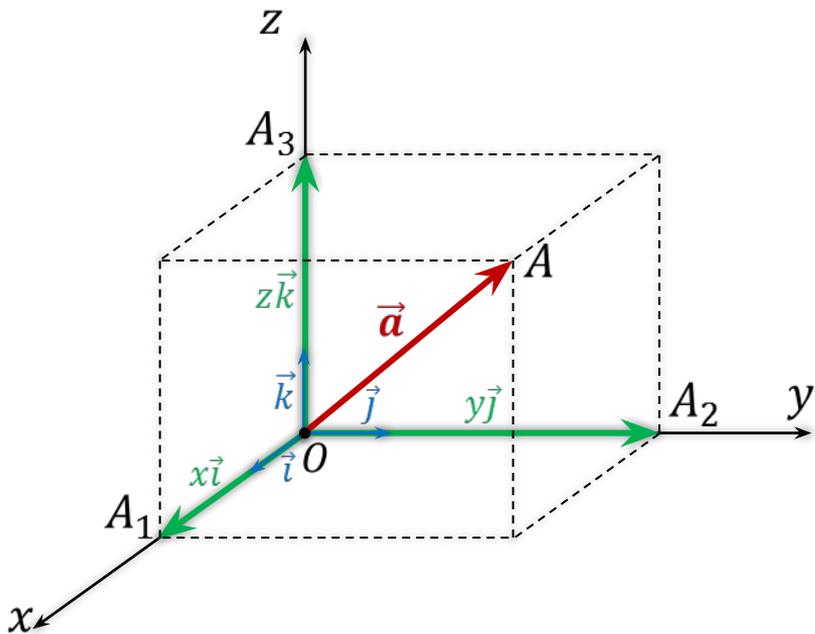
$$\begin{cases} x_1 = 2x - x_2 \\ y_1 = 2y - y_2 \\ z_1 = 2z - z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot (-12) - 0 \\ y_1 = 2 \cdot 3 - 0 \\ z_1 = 2 \cdot 15 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -24 \\ y_1 = 8 \\ z_1 = 28 \end{cases}$$

## 2. Вычисление длины вектора по его координатам

Длина вектора  $\vec{a} \{x; y; z\}$  равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.



$$\vec{a} \{x; y; z\} \Rightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i} \quad \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j} \quad \overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = |\vec{a}| = OA$$

$$OA = \sqrt{OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**Задача.** Вычислить длину вектора  $\overrightarrow{AB}$ .

а)  $A(-1; 0; 2), B(1; -2; 3);$

б)  $A(-35; -17; 20), B(-34; -5; 8).$

$$\vec{a} \{x; y; z\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**Решение.**

а)  $A(-1; 0; 2), B(1; -2; 3)$

$$\overrightarrow{AB} \{1 - (-1); -2 - 0; 3 - 2\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{2; -2; 1\}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 3$$

б)  $A(-35; -17; 20), B(-34; -5; 8)$

$$\overrightarrow{AB} \{-34 - (-35); -5 - (-17); 8 - 20\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{1; 12; -12\}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 12^2 + (-12)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 144 + 144}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{289}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 17$$

**Задача.** Вычислить длины векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  и  $\vec{m}$ .

$$\vec{a} \{5; -1; 7\}$$

$$\vec{b} \{2\sqrt{3}; -6; 1\}$$

$$\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{d} = 2\vec{k}$$

$$\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j}$$

**Решение.**

$$\vec{a} \{5; -1; 7\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 1 + 49} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\vec{b} \{2\sqrt{3}; -6; 1\}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{12 + 36 + 1} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{c} \{1; 1; 1\}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

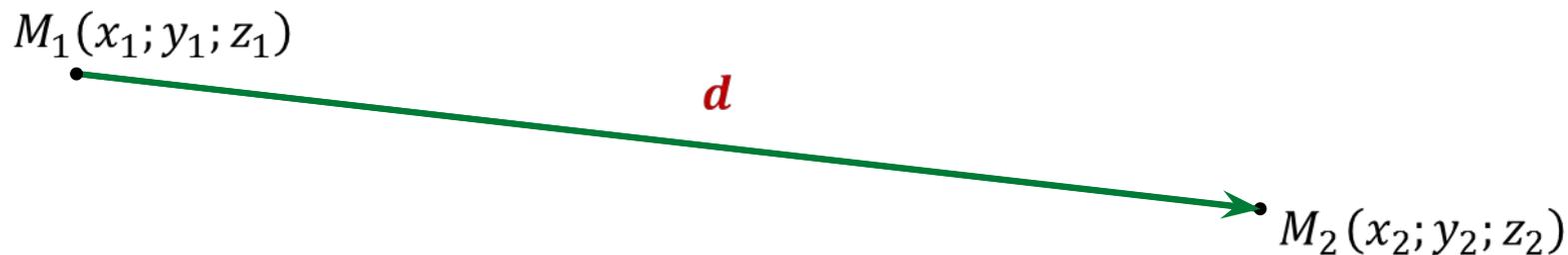
$$\vec{d} = 2\vec{k} \Rightarrow \vec{d} \{0; 0; 2\}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \vec{m} \{1; -2; 0\}$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$$

### 3. Определение расстояния между двумя точками



$$\overrightarrow{M_1M_2} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = M_1M_2 = d$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

**Задача.** По координатам точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  определить вид  $\triangle ABC$ .

а)  $A(9; 3; -5)$ ,  $B(2; 10; -5)$ ,  $C(2; 3; 2)$

б)  $A(3; 7; -4)$ ,  $B(5; -3; 2)$ ,  $C(1; 3; -10)$

**Решение.**

а)  $A(9; 3; -5)$ ,  $B(2; 10; -5)$ ,  $C(2; 3; 2)$

$$AB = \sqrt{(2 - 9)^2 + (10 - 3)^2 + (-5 - (-5))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 0^2} = 7\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(2 - 2)^2 + (3 - 10)^2 + (2 - (-5))^2} = \sqrt{0^2 + (-7)^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(2 - 9)^2 + (3 - 3)^2 + (2 - (-5))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \triangle ABC$  — правильный

**Задача.** По координатам точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  определить вид  $\triangle ABC$ .

а)  $A(9; 3; -5)$ ,  $B(2; 10; -5)$ ,  $C(2; 3; 2)$

б)  $A(3; 7; -4)$ ,  $B(5; -3; 2)$ ,  $C(1; 3; -10)$

**Решение.**

б)  $A(3; 7; -4)$ ,  $B(5; -3; 2)$ ,  $C(1; 3; -10)$

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (-3-7)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + 6^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$$

$$BC = \sqrt{(1-5)^2 + (3-(-3))^2 + (-10-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-12)^2} = \sqrt{196} = 14$$

$$AC = \sqrt{(1-3)^2 + (3-7)^2 + (-10-(-4))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\sqrt{196}^2 = \sqrt{140}^2 + \sqrt{56}^2$$

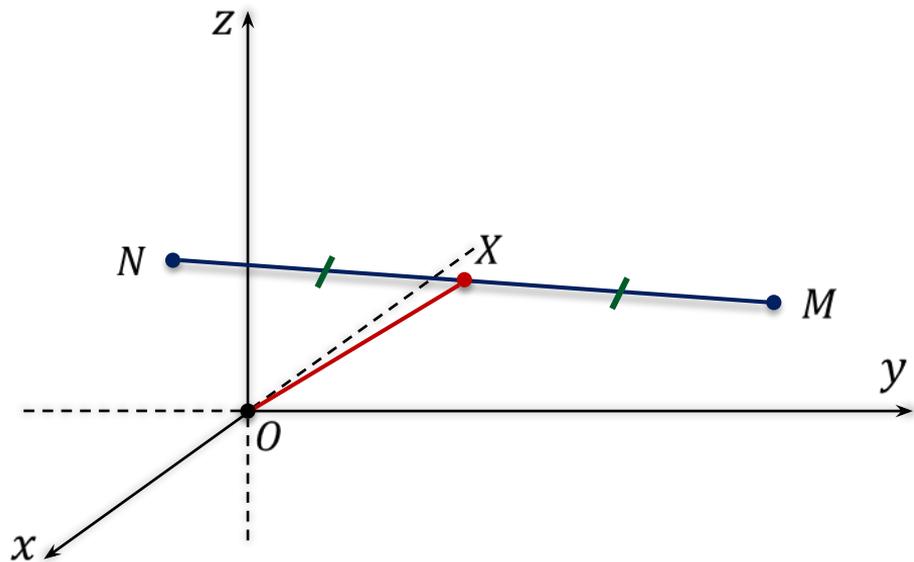
$$196 = 140 + 56$$

$\Rightarrow \triangle ABC$  – прямоугольный, разносторонний

$$196 = 196$$

**Задача.** Найти расстояние от точки начала координат  $O$  до середины отрезка  $MN$ , если  $M(-4; 7; 0)$  и  $N(0; -1; 2)$ .

**Решение.**



$$M(-4; 7; 0) \quad N(0; -1; 2)$$

$X$

$$X(-2; 3; 1) \quad O(0; 0; 0)$$

$$OX = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (1 - 0)^2}$$

$$OX = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}$$

**Ответ:**  $\sqrt{14}$ .

# *Простейшие задачи в координатах*