Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя пересекающимися плоскостями, заданными уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ можно найти, используя формулу

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|},$$

где $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1), \vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ - векторы нормалей. Однако угол между векторами может быть тупым, а угол между плоскостями нет. Поэтому, если косинус угла между векторами получился отрицательным, то в ответе нужно указывать его модуль.

Упражнение 1

Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями:

а) $x = 0, y = 0$;

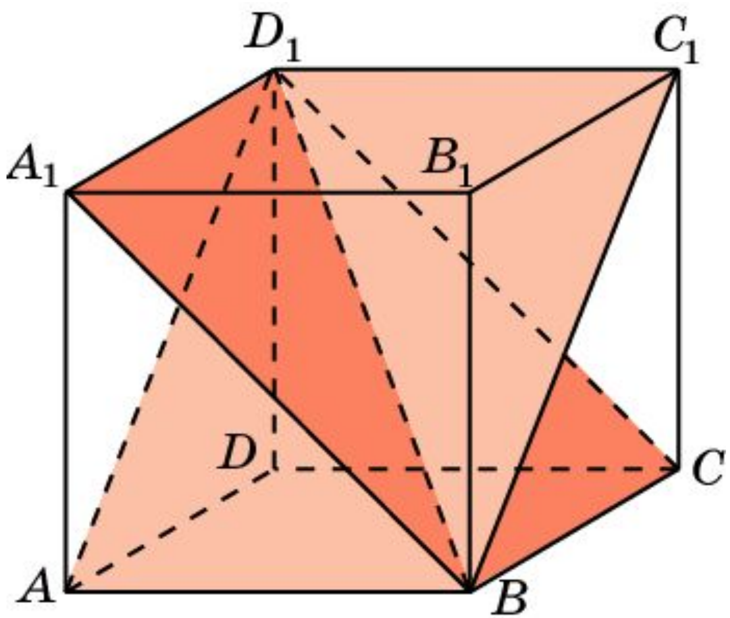
б) $x + y + z + 1 = 0, x + y - z - 1 = 0$;

в) $2x + 3y + 6z - 5 = 0, 4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

Ответ: а) 90°; б) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$; в) $\cos\varphi = \frac{16}{21}$.

Упражнение 2

Найдите угол между плоскостями, проходящими через вершины A, B, C_1 и B, C, D_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Решение. Пусть вершины единичного куба имеют координаты: $D(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $A(0, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$.

Данные плоскости ABC_1 и BCD_1 задаются уравнениями:

$$y + z = 1, x + z = 1.$$

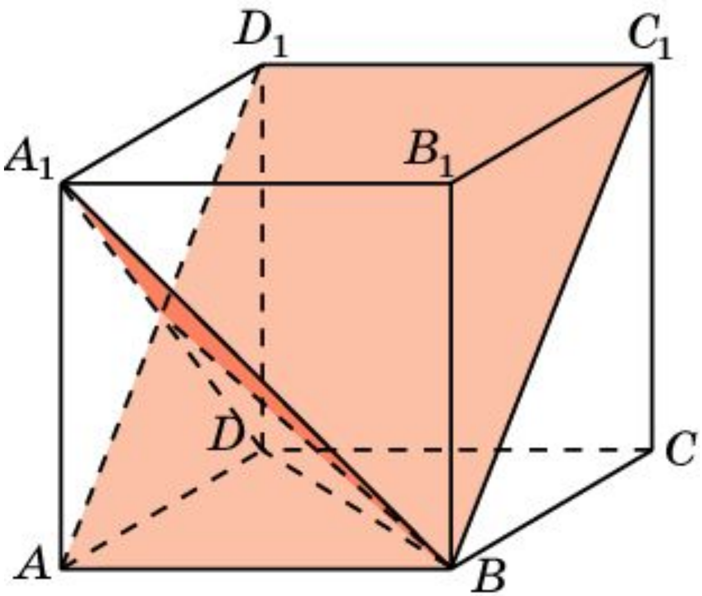
Векторы нормалей имеют координаты (0, 1, 1) и (1, 0, 1).

Косинус угла между этими плоскостями равен 0,5. Искомый угол равен 60°.

Ответ. 60°.

Упражнение 3

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BDA_1.



Решение. Пусть вершины единичного куба имеют координаты: $D(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $A(0, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$.

Данные плоскости ABC_1 и BDA_1 задаются уравнениями:

$$y + z = 1, x - y + z = 0.$$

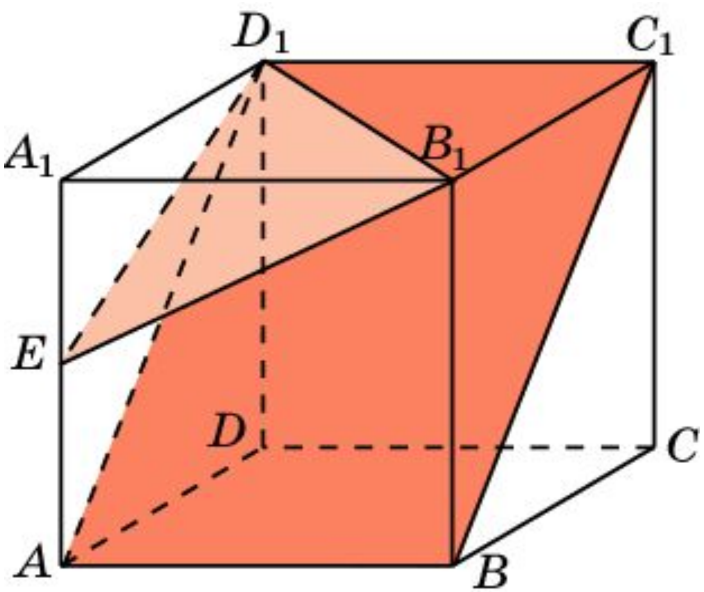
Векторы нормалей имеют координаты (0, 1, 1) и (1, –1, 1).

Их скалярное произведение равно 0. Искомый угол равен 90°.

Ответ. 90°.

Упражнение 4

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра AA_1. Найдите угол φ между плоскостями ABC_1 и B_1D_1E.



Решение. Пусть вершины единичного куба имеют координаты: $D(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $A(0, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$.

Данные плоскости ABC_1 и B_1D_1E задаются уравнениями:

$$y + z = 1, x - y - 2z + 2 = 0.$$

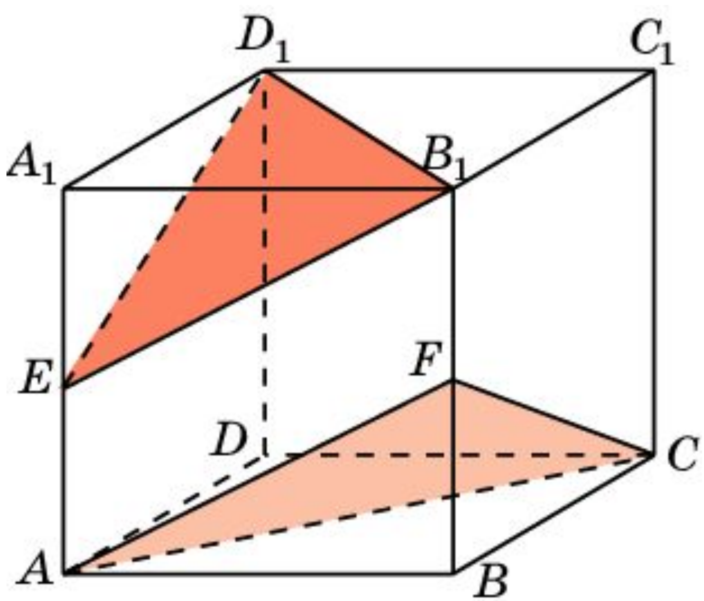
Векторы нормалей имеют координаты $(0, 1, 1)$ и $(1, -1, -2)$.

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = 30^{\circ}.$$

Ответ. 30°.

Упражнение 5

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F – середины ребер AA_1 и BB_1. Найдите косинус угла φ между плоскостями ACF и B_1D_1E.



Решение. Пусть вершины единичного куба имеют координаты: $D(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $A(0, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$.

Данные плоскости ACF и B_1D_1E задаются уравнениями:

$x + y – 2z – 1= 0$, $x – y – 2z + 1 = 0$.

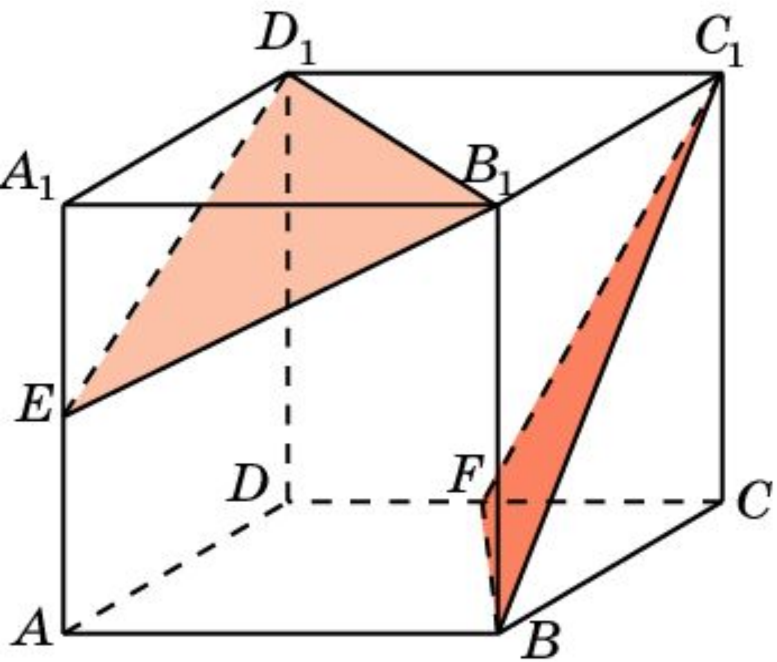
Векторы нормалей имеют координаты (1, 1, –2) и (1, –1, –2).

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}.$$

Ответ. $\cos\varphi = \frac{2}{3}.$

Упражнение 6

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F – середины ребер AA_1 и CD. Найдите косинус угла φ между плоскостями BFC_1 и B_1D_1E.



Решение. Пусть вершины единичного куба имеют координаты: $D(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $A(0, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$.

Данные плоскости BFC_1 и B_1D_1E задаются уравнениями:

$$2x - y - z - 1 = 0, \quad x - y - 2z + 1 = 0.$$

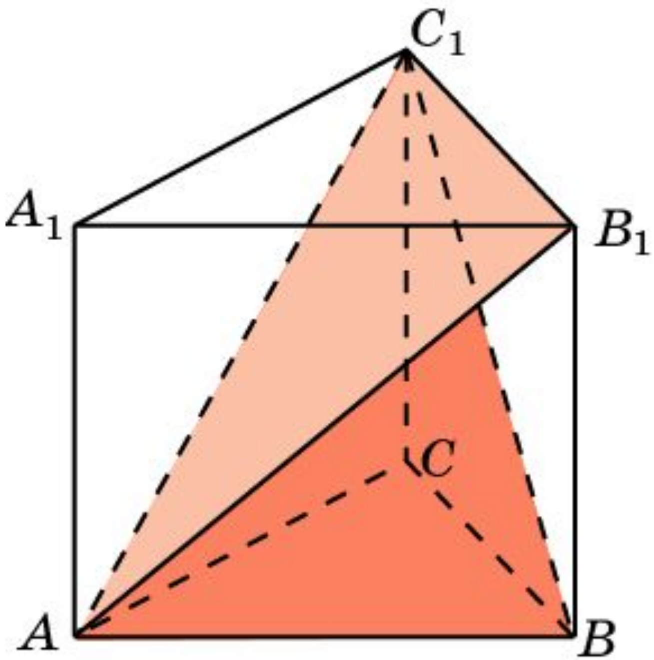
Векторы нормалей имеют координаты (2, –1, –1) и (1, –1, –2).

$$\cos\varphi = \frac{5}{6}.$$

Ответ. $\cos\varphi = \frac{5}{6}.$

Упражнение 7

В правильной 3-й призме $ABCA_1B_1C_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и AB_1C_1.



Решение. Пусть вершины призмы имеют координаты:

$$A(0, 0, 0),\ B(1, 0, 0),\ B_1(1, 0, 1),\ C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$z = \frac{2\sqrt{3}}{3}y, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}}{3}y.$$

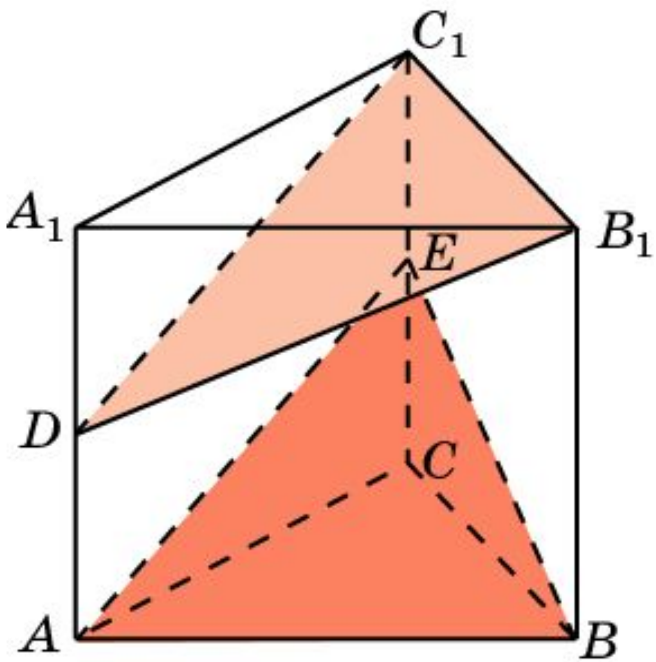
Их векторы нормалей имеют координаты $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -1\right)$, $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$.

Косинус угла между ними равен $\frac{5}{7}$.

Ответ. $\frac{5}{7}$.

Упражнение 8

В правильной 3-й призме $ABCA_1B_1C_1$, ребра которой равны 1, точки D и E – середины ребер AA_1 и CC_1. Найдите косинус угла между плоскостями ABE и DB_1C_1.



Решение. Пусть вершины призмы имеют координаты: $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $A_1(0, 0, 1)$,

$$C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3}y, \quad z = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}.$$

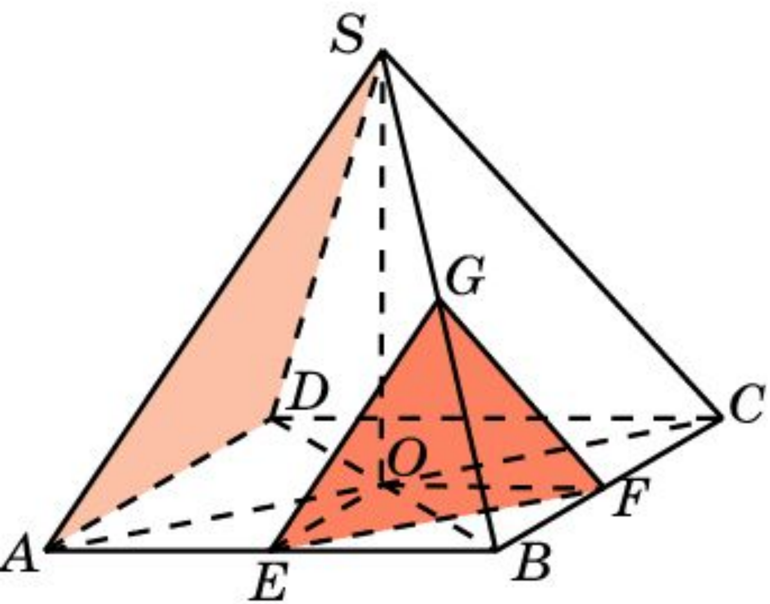
Их векторы нормалей имеют координаты $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -1\right)$.

Косинус угла между ними равен $\frac{7}{8}$.

Ответ. $\frac{7}{8}$.

Упражнение 9

В правильной 4-й пирамиде $SABCD$, ребра которой равны 2, точки E, F и G – середины ребер AB, BC и SC. Найдите косинус угла между плоскостями SAD и EFG.



Решение. Пусть $O(0,\ 0,\ 0)$, $E(0,\ 1,\ 0)$, $F(1, 0, 0)$, $S(0, 0, \sqrt{2})$.

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}, \quad x + y = 1.$$

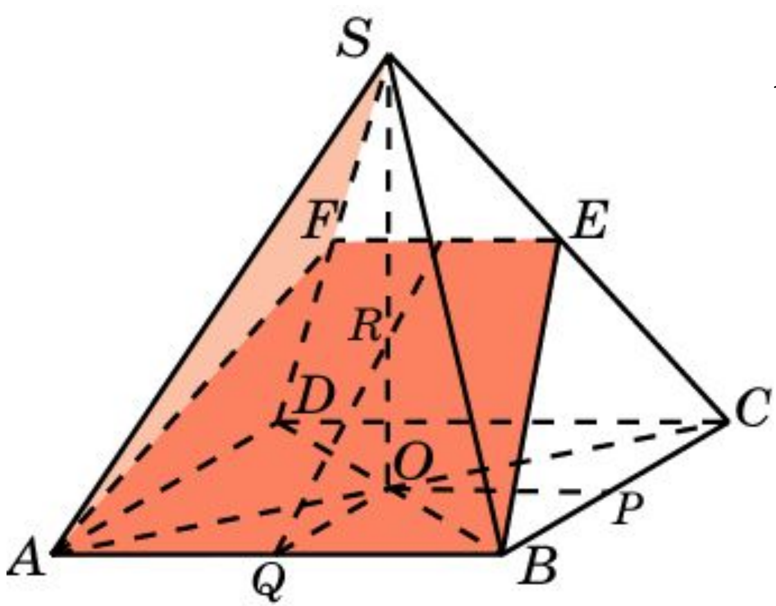
Их векторы нормалей имеют координаты $\left(\sqrt{2}, 0, -1\right)$, $(1, 1, 0)$.

Косинус угла между ними равен $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Упражнение 10

В правильной 4-й пирамиде $SABCD$, ребра которой равны 2, точки E, F – середины ребер SC, SD. Найдите косинус угла между плоскостями SAD и ABE.



Решение. Пусть P, Q – середины ребер AB, BC; $O(0, 0, 0)$, $P(0, 1, 0)$, $Q(1, 0, 0)$, $S(0, 0, \sqrt{2})$. Точка R пересечения прямой SO и плоскости ABE имеет координаты

$$\left(0, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}, \quad y + \frac{3\sqrt{2}}{4}z = 1.$$

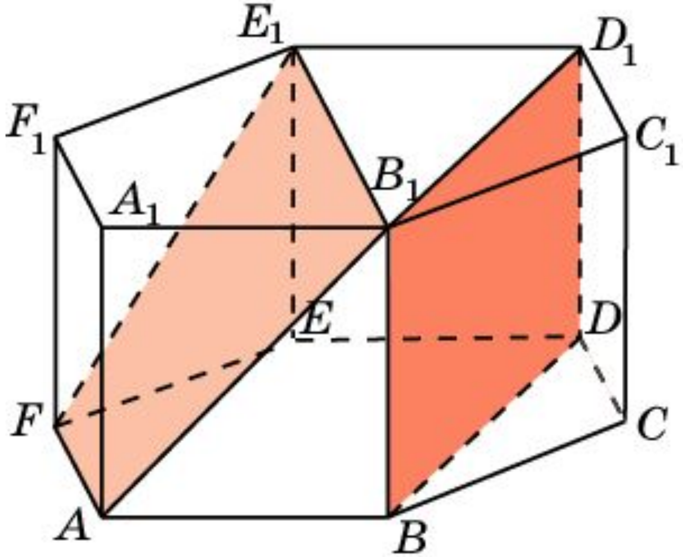
Их векторы нормалей имеют координаты $\left(\sqrt{2}, 0, -1\right)$, $\left(0, 1, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$.

Косинус угла между ними равен $-\frac{3\sqrt{51}}{51}$.

Ответ. $\frac{3\sqrt{51}}{51}$.

Упражнение 11

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями BDD_1 и AFE_1.



Решение. Пусть вершины призмы имеют координаты: $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$,

$D(1, \sqrt{3}, 0)$, $E(0, \sqrt{3}, 0)$, $B_1(1, 0, 1)$, $D_1(1, \sqrt{3}, 1)$.

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$x = 1, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}y}{3}.$$

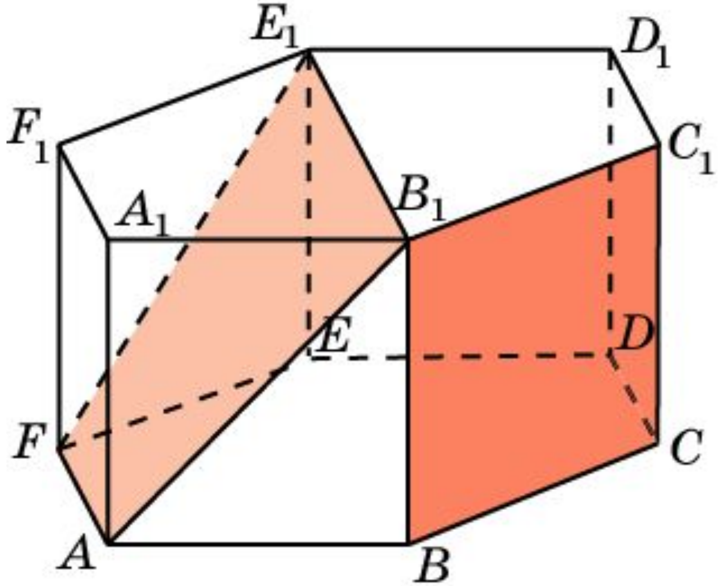
Их векторы нормалей имеют координаты $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$, $(1, 0, 0)$.

Косинус угла между ними равен $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Упражнение 12

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями BCC_1 и AFE_1.



Решение. Пусть вершины призмы имеют координаты: $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$,

$$C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ E(0, \sqrt{3}, 0),\ C_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}}{3}y.$$

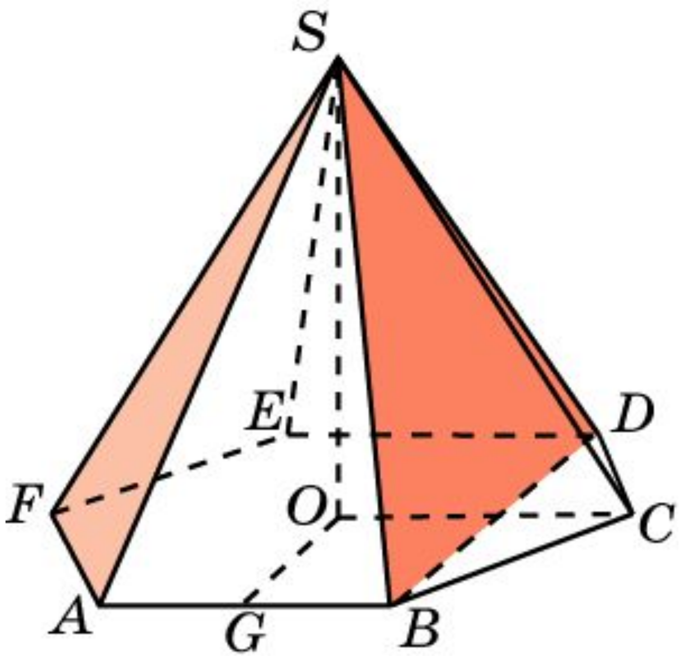
Их векторы нормалей имеют координаты $\left(\sqrt{3}, -1, 0\right)$, $(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1)$.

Косинус угла между ними равен $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Упражнение 13

В правильной 6-й пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SAF и SBD.



Решение. Пусть $O(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $S(0, 0, \sqrt{3})$.

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}}{3}y.$$

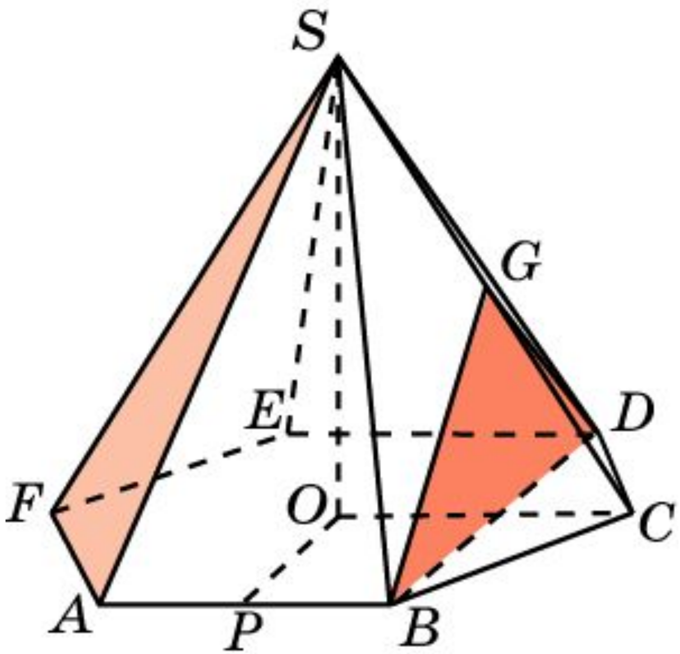
Их векторы нормалей имеют координаты $\left(\sqrt{3}, -1, 0\right)$, $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$.

Косинус угла между ними равен $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Упражнение 14

В правильной 6-й пирамиде *SABCDEF*, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точка *G* – середина ребра *SC*. Найдите косинус угла между плоскостями *SAF* и *SDG*.



Решение. Пусть $O(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $P\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $S(0, 0, \sqrt{3})$.

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}}{3}y.$$

Их векторы нормалей имеют координаты $\left(\sqrt{3}, -1, 0\right)$, $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$.

Косинус угла между ними равен $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{7}}{7}$.