

# Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя пересекающимися плоскостями, заданными уравнениями  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  можно найти, используя формулу

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|},$$

где  $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ ,  $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$  - векторы нормалей. Однако угол между векторами может быть тупым, а угол между плоскостями нет. Поэтому, если косинус угла между векторами получился отрицательным, то в ответе нужно указывать его модуль.

# Упражнение 1

Найдите угол  $\varphi$  между плоскостями, заданными уравнениями:

а)  $x = 0, y = 0;$

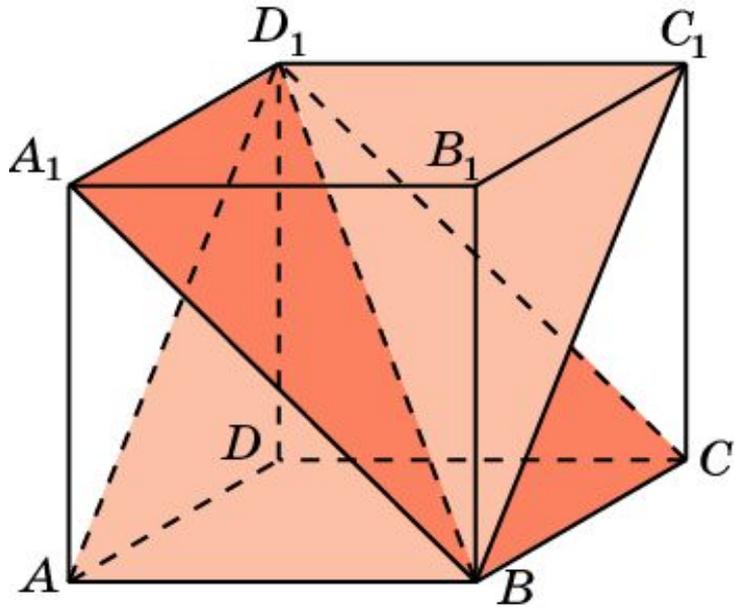
б)  $x + y + z + 1 = 0, x + y - z - 1 = 0;$

в)  $2x + 3y + 6z - 5 = 0, 4x + 4y + 2z - 7 = 0.$

**Ответ:** а)  $90^\circ;$       б)  $\cos \varphi = \frac{1}{3};$       в)  $\cos \varphi = \frac{16}{21}.$

## Упражнение 2

Найдите угол между плоскостями, проходящими через вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$  и  $B$ ,  $C$ ,  $D_1$  единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .



**Решение.** Пусть вершины единичного куба имеют координаты:  $D(0, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 0)$ ,  $A(0, 1, 0)$ ,  $D_1(0, 0, 1)$ .

Данные плоскости  $ABC_1$  и  $BCD_1$  задаются уравнениями:

$$y + z = 1, x + z = 1.$$

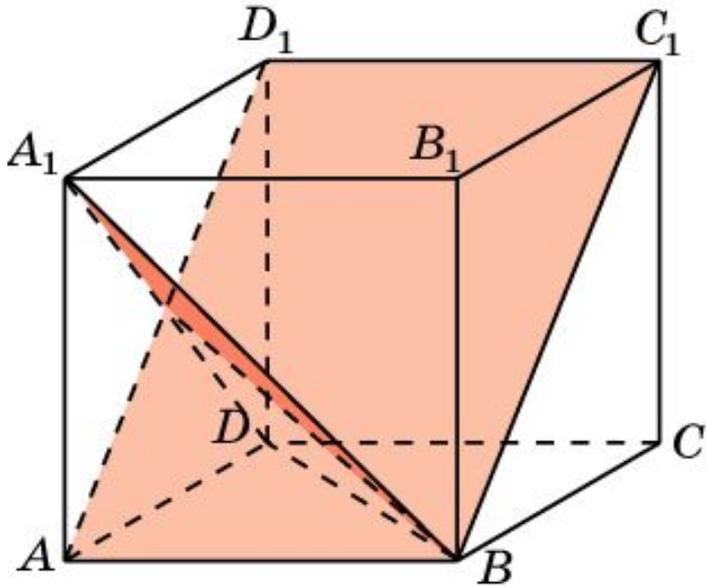
Векторы нормалей имеют координаты  $(0, 1, 1)$  и  $(1, 0, 1)$ .

Косинус угла между этими плоскостями равен  $0,5$ . Искомый угол равен  $60^\circ$ .

**Ответ.**  $60^\circ$ .

## Упражнение 3

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между плоскостями  $ABC_1$  и  $BDA_1$ .



**Решение.** Пусть вершины единичного куба имеют координаты:  $D(0, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 0)$ ,  $A(0, 1, 0)$ ,  $D_1(0, 0, 1)$ .

Данные плоскости  $ABC_1$  и  $BDA_1$  задаются уравнениями:

$$y + z = 1, x - y + z = 0.$$

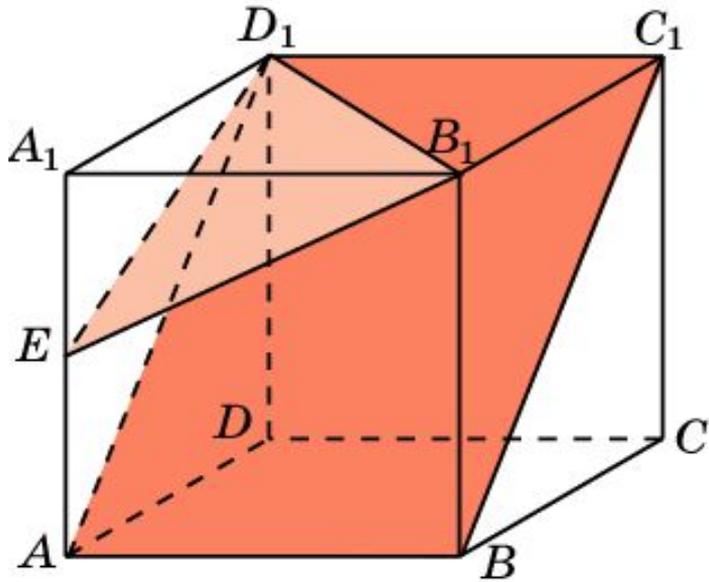
Векторы нормалей имеют координаты  $(0, 1, 1)$  и  $(1, -1, 1)$ .

Их скалярное произведение равно 0. Искомый угол равен  $90^\circ$ .

**Ответ.**  $90^\circ$ .

## Упражнение 4

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $E$  – середина ребра  $AA_1$ . Найдите угол  $\varphi$  между плоскостями  $ABC_1$  и  $B_1 D_1 E$ .



**Решение.** Пусть вершины единичного куба имеют координаты:  $D(0, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 0)$ ,  $A(0, 1, 0)$ ,  $D_1(0, 0, 1)$ .

Данные плоскости  $ABC_1$  и  $B_1 D_1 E$  задаются уравнениями:

$$y + z = 1, \quad x - y - 2z + 2 = 0.$$

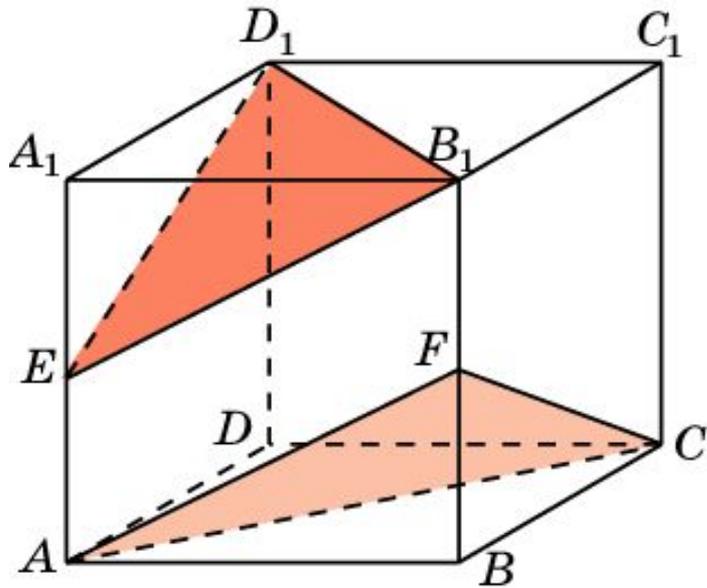
Векторы нормалей имеют координаты  $(0, 1, 1)$  и  $(1, -1, -2)$ .

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = 30^\circ.$$

**Ответ.**  $30^\circ$ .

## Упражнение 5

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $E$  и  $F$  – середины ребер  $AA_1$  и  $BB_1$ . Найдите косинус угла  $\varphi$  между плоскостями  $ACF$  и  $B_1 D_1 E$ .



**Решение.** Пусть вершины единичного куба имеют координаты:  $D(0, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 0)$ ,  $A(0, 1, 0)$ ,  $D_1(0, 0, 1)$ .

Данные плоскости  $ACF$  и  $B_1 D_1 E$  задаются уравнениями:

$$x + y - 2z - 1 = 0, \quad x - y - 2z + 1 = 0.$$

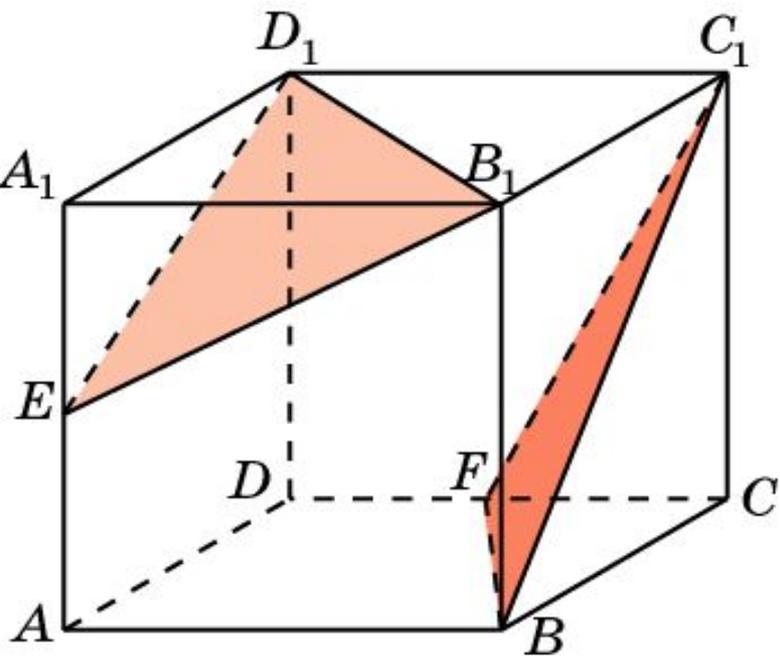
Векторы нормалей имеют координаты  $(1, 1, -2)$  и  $(1, -1, -2)$ .

$$\cos \varphi = \frac{2}{3}.$$

**Ответ.**  $\cos \varphi = \frac{2}{3}.$

## Упражнение 6

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $E$  и  $F$  – середины ребер  $AA_1$  и  $CD$ . Найдите косинус угла  $\varphi$  между плоскостями  $BFC_1$  и  $B_1 D_1 E$ .



**Решение.** Пусть вершины единичного куба имеют координаты:  $D(0, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 0)$ ,  $A(0, 1, 0)$ ,  $D_1(0, 0, 1)$ .

Данные плоскости  $BFC_1$  и  $B_1 D_1 E$  задаются уравнениями:

$$2x - y - z - 1 = 0, \quad x - y - 2z + 1 = 0.$$

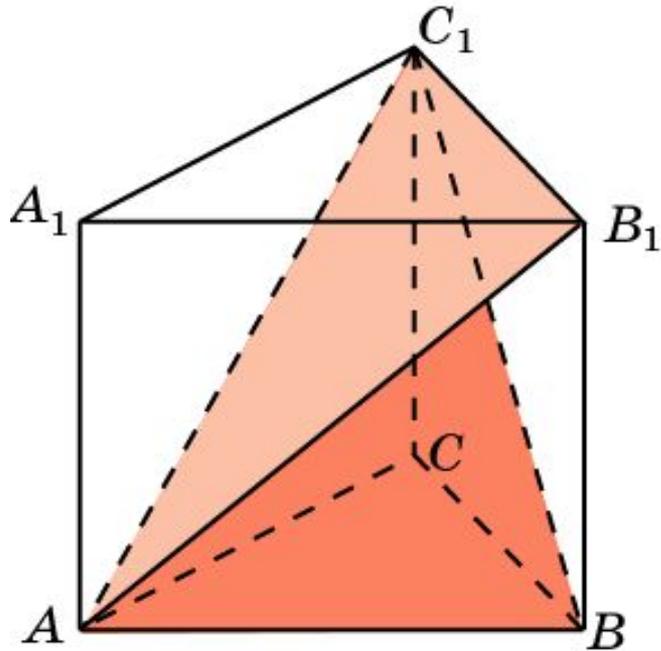
Векторы нормалей имеют координаты  $(2, -1, -1)$  и  $(1, -1, -2)$ .

$$\cos \varphi = \frac{5}{6}.$$

**Ответ.**  $\cos \varphi = \frac{5}{6}$ .

## Упражнение 7

В правильной 3-й призме  $ABCA_1B_1C_1$ , ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями  $ABC_1$  и  $AB_1C_1$ .



**Решение.** Пусть вершины призмы имеют координаты:

$$A(0, 0, 0), \quad B(1, 0, 0), \quad B_1(1, 0, 1), \quad C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$z = \frac{2\sqrt{3}}{3}y, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}}{3}y.$$

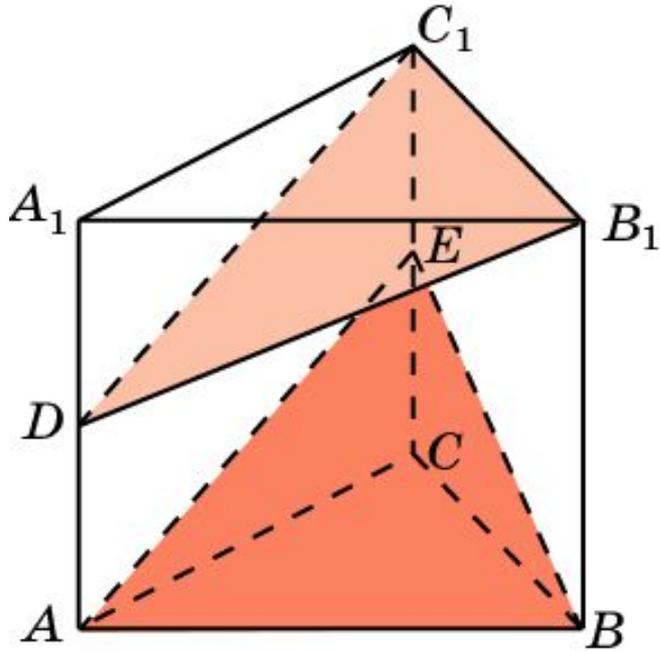
Их векторы нормалей имеют координаты  $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -1\right)$ ,  $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$ .

Косинус угла между ними равен  $\frac{5}{7}$ .

**Ответ.**  $\frac{5}{7}$ .

## Упражнение 8

В правильной 3-й призме  $ABCA_1B_1C_1$ , ребра которой равны 1, точки  $D$  и  $E$  – середины ребер  $AA_1$  и  $CC_1$ . Найдите косинус угла между плоскостями  $ABE$  и  $DB_1C_1$ .



**Решение.** Пусть вершины призмы имеют координаты:  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $A_1(0, 0, 1)$ ,  $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ .

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3}y, \quad z = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}.$$

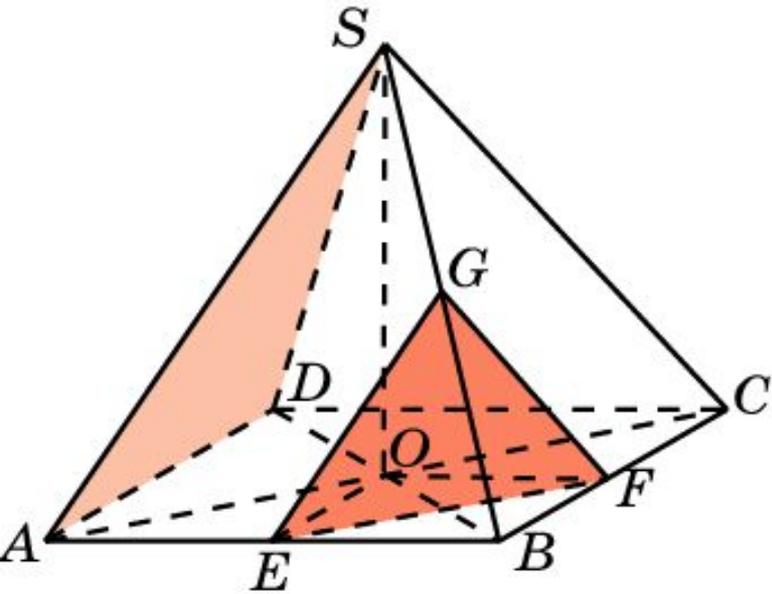
Их векторы нормалей имеют координаты  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -1\right)$ .

Косинус угла между ними равен  $\frac{7}{8}$ .

**Ответ.**  $\frac{7}{8}$ .

## Упражнение 9

В правильной 4-й пирамиде  $SABCD$ , ребра которой равны 2, точки  $E$ ,  $F$  и  $G$  – середины ребер  $AB$ ,  $BC$  и  $SC$ . Найдите косинус угла между плоскостями  $SAD$  и  $EFG$ .



**Решение.** Пусть  $O(0, 0, 0)$ ,  $E(0, 1, 0)$ ,  $F(1, 0, 0)$ ,  $S(0, 0, \sqrt{2})$ .

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}, \quad x + y = 1.$$

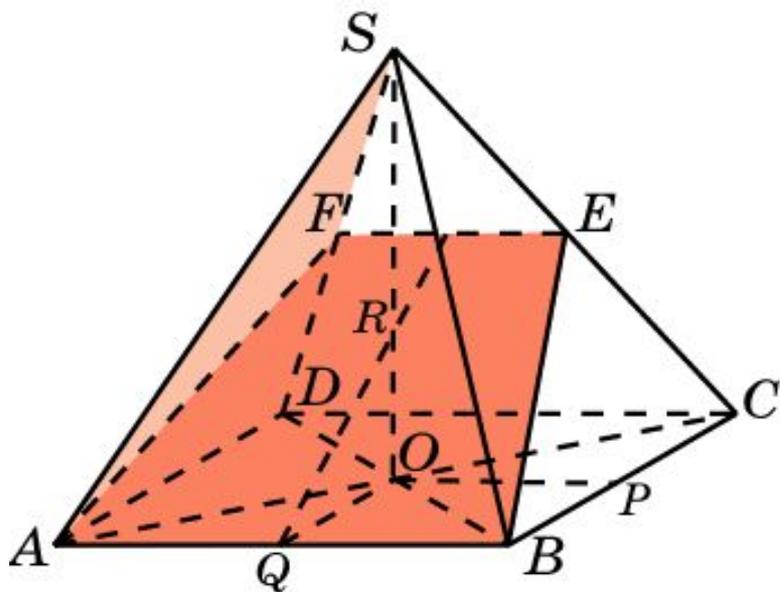
Их векторы нормалей имеют координаты  $(\sqrt{2}, 0, -1)$ ,  $(1, 1, 0)$ .

Косинус угла между ними равен  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Ответ.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

## Упражнение 10

В правильной 4-й пирамиде  $SABCD$ , ребра которой равны 2, точки  $E, F$  – середины ребер  $SC, SD$ . Найдите косинус угла между плоскостями  $SAD$  и  $ABE$ .



**Решение.** Пусть  $P, Q$  – середины ребер  $AB, BC$ ;  $O(0, 0, 0), P(0, 1, 0), Q(1, 0, 0), S(0, 0, \sqrt{2})$ . Точка  $R$  пересечения прямой  $SO$  и плоскости  $ABE$  имеет координаты  $\left(0, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ .

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}, \quad y + \frac{3\sqrt{2}}{4}z = 1.$$

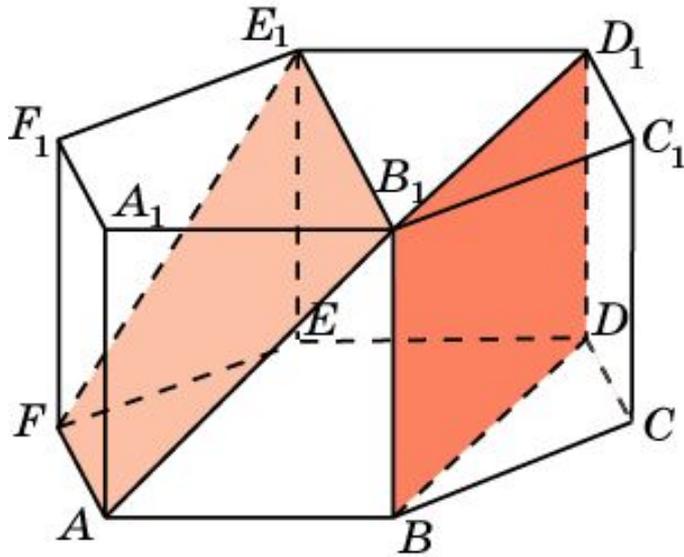
Их векторы нормалей имеют координаты  $\left(\sqrt{2}, 0, -1\right), \left(0, 1, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ .

Косинус угла между ними равен  $-\frac{3\sqrt{51}}{51}$ .

**Ответ.**  $\frac{3\sqrt{51}}{51}$ .

## Упражнение 11

В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями  $BDD_1$  и  $AFE_1$ .



**Решение.** Пусть вершины призмы имеют координаты:  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,

$$D(1, \sqrt{3}, 0), E(0, \sqrt{3}, 0), B_1(1, 0, 1), D_1(1, \sqrt{3}, 1).$$

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$x = 1, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}y}{3}.$$

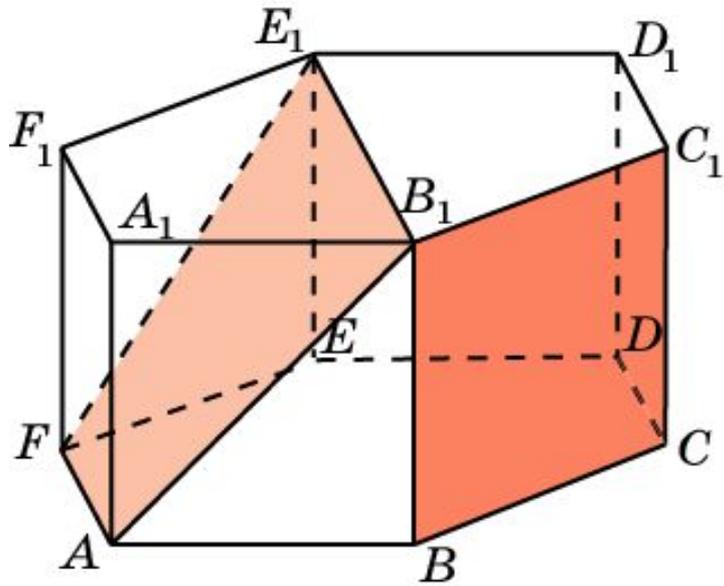
Их векторы нормалей имеют координаты  $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$ ,  $(1, 0, 0)$ .

Косинус угла между ними равен  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

**Ответ.**  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

## Упражнение 12

В правильной 6-й призме  $A\dots F_1$ , ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями  $BCC_1$  и  $AFE_1$ .



**Решение.** Пусть вершины призмы имеют координаты:  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,

$$C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), E(0, \sqrt{3}, 0), C_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}}{3}y.$$

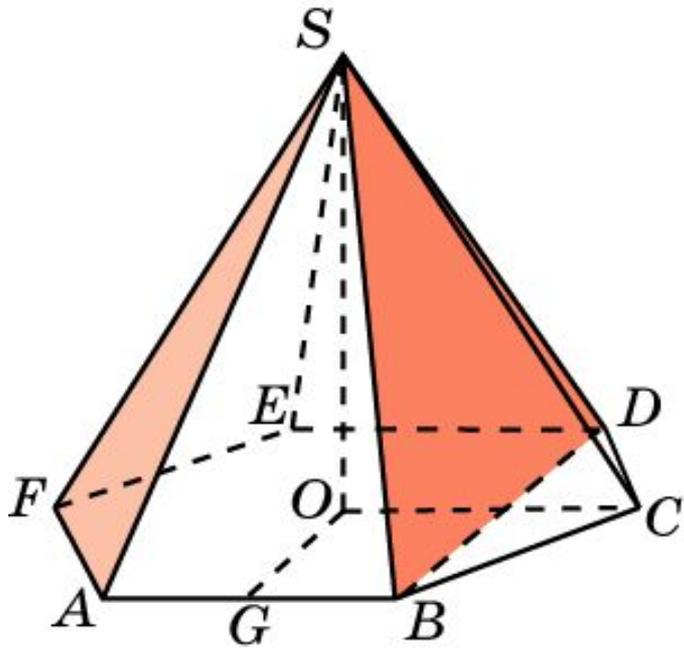
Их векторы нормалей имеют координаты  $(\sqrt{3}, -1, 0)$ ,  $(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1)$ .

Косинус угла между ними равен  $\frac{\sqrt{7}}{7}$ .

**Ответ.**  $\frac{\sqrt{7}}{7}$ .

## Упражнение 13

В правильной 6-й пирамиде  $SAB CDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями  $SAF$  и  $SBD$ .



**Решение.** Пусть  $O(0, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 0)$ ,  
 $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ,  $S(0, 0, \sqrt{3})$ .

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}}{3}y.$$

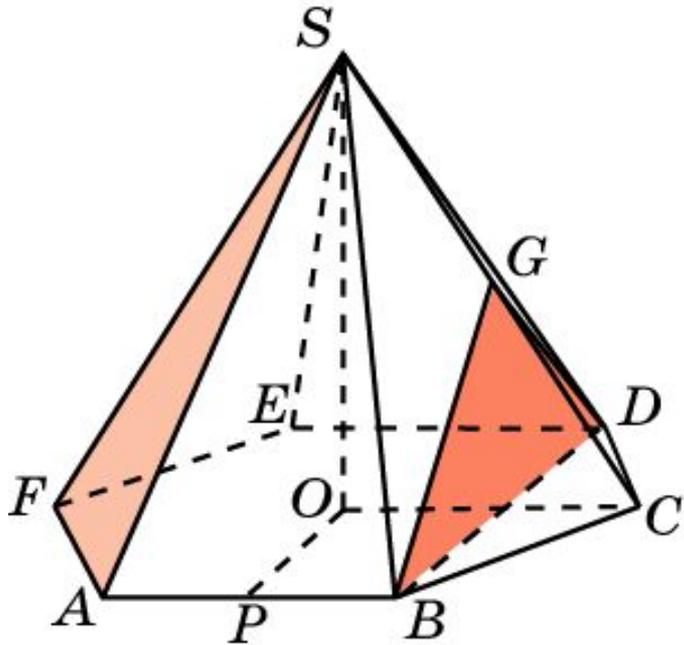
Их векторы нормалей имеют координаты  $(\sqrt{3}, -1, 0)$ ,  $(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1)$ .

Косинус угла между ними равен  $\frac{\sqrt{7}}{7}$ .

**Ответ.**  $\frac{\sqrt{7}}{7}$ .

## Упражнение 14

В правильной 6-й пирамиде  $SAB CDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точка  $G$  – середина ребра  $SC$ . Найдите косинус угла между плоскостями  $SAF$  и  $SDG$ .



**Решение.** Пусть  $O(0, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 0)$ ,  
 $P\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ,  $S(0, 0, \sqrt{3})$ .

Данные плоскости задаются уравнениями:

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}, \quad z = x + \frac{\sqrt{3}}{3}y.$$

Их векторы нормалей имеют координаты  $(\sqrt{3}, -1, 0)$ ,  $(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1)$ .

Косинус угла между ними равен  $\frac{\sqrt{7}}{7}$ .

**Ответ.**  $\frac{\sqrt{7}}{7}$ .