



**Дифференциальное
уравнение движения
поезда и его анализ**

Учет всех сил, действующих на поезд, усложнил бы изучение закономерностей движения поезда. Поэтому в дальнейших расчетах принимают следующие допущения. Поезд представляют в виде материальной точки, в которой сосредоточена вся его масса. Из всех перемещений подвижного состава рассматривают только поступательное движение поезда и вращательное движение частей, частота вращения которых зависит от скорости движения поезда. К ним относят колесные пары вагонов, а у электровозов и моторных вагонов — колесные пары, а также якоря тяговых электродвигателей и элементы зубчатой передачи. Остальные перемещения в учет не принимают. Замена распродоточенной массы поезда материальной точкой вносит некоторую погрешность в расчеты при движении на переломах профиля пути. Однако она вполне допустима для обычных расчетов, связанных с движением поезда.

В том же случае, когда рассматривают силы, действующие на поезд как механическую систему, а не материальную точку, все перечисленные силы относят к ободам колесных пар и прикладывают в точке касания колес с рельсами.

Кроме совершения работы по перемещению поезда, электровоз или моторный вагон в режиме тяги затрачивает механическую энергию на повышение скорости движения или, иными словами, на увеличение кинетической энергии, равной половине произведения массы поезда на квадрат скорости, а при движении по подъему — на повышение потенциальной энергии, равной произведению веса поезда на высоту подъема.

В режиме выбега, когда тяговые машины электроподвижного состава отключены от контактной сети, поезд не потребляет электрическую энергию. Он движется за счет запасенной кинетической или потенциальной энергии. Если скорость снижается, уменьшается кинетическая энергия, при движении по спуску с постоянной скоростью расходуется потенциальная энергия. Возможно также преобразование потенциальной энергии в кинетическую при движении по спуску с увеличением скорости, и кинетической в потенциальную при следовании на подъем с уменьшением скорости.

При торможении к силам сопротивления движению прибавляются тормозные силы.

Уравнение движения поезда показывает связь между силами, действующими на поезд, и ускорением его движения. Как известно, связь между силой, ускорением и массой любого тела, движущегося поступательно, в том числе и поезда, можно установить, используя второй закон Ньютона:

$$F_{y_1} = m \frac{dv}{dt}, \quad (1.5)$$

где F_{y_1} — ускоряющая сила, действующая на поезд;

m — масса поезда;

$\frac{dv}{dt}$ — ускорение движения.

Наряду с поступательным движением всех частей поезда колесные пары вагонов и локомотивов, а также якоря тяговых электродвигателей и элементы зубчатых передач электроподвижного состава совершают еще и вращательное движение. С изменением скорости поступательного движения изменяется и частота их вращения. Следовательно, ускоряющая сила поезда вызывает не только ускорение поступательного движения всего поезда, но и угловое ускорение вращающихся частей. В случае снижения скорости движения поезда, вращающиеся части, стремясь сохранить движение, препятствуют действию замедляющих сил.

Таким образом, вращающиеся части уменьшают как ускорение, так и замедление поезда, т.е. вызывают тот же эффект, что и увеличение массы поезда.

Если известен вращающий момент M , который необходим для раскручивания, например, колесной пары, то к ободу должна быть приложена сила F :

$$F = \frac{M}{R},$$

где R — радиус колеса.

Для поезда ускоряющую силу F_{y_2} , вызывающую ускорение вращающихся частей, определяют как сумму сил, прикладываемых в точках касания колеса и рельсами.

$$F_{y_2} = \sum \frac{M_{\text{в}}}{R_{\text{в}}} + \sum \frac{M_{\text{д}}}{R_{\text{д}}} + \sum \frac{M_{\text{я/д}}}{R_{\text{д}}}, \quad (1.6)$$

где $M_{\text{в}}$, $M_{\text{д}}$ — вращающие моменты, затрачиваемые на раскручивание соответственно вагонных и движущих колесных пар;

$R_{\text{в}}$, $R_{\text{д}}$ — радиусы колес вагонов и локомотивов;

$M_{\text{я/д}}$ — вращающий момент, прикладываемый к движущей колесной паре, для раскручивания якоря тягового двигателя (без учета сравнительно малых потерь в передаче), $M_{\text{я/д}} = M_{\text{я}} \cdot \mu$ (здесь $M_{\text{я}}$ — вращающий момент, необходимый для раскручивания якоря, μ — передаточное отношение зубчатой передачи).

Вращающие моменты $M_{\text{в}}$, $M_{\text{д}}$, $M_{\text{я}}$ рассчитывают исходя из второго закона Ньютона для вращательного движения:

$$M = J \frac{d\omega}{dt},$$

где M — вращающий момент;

J — момент инерции;

$\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение.

Следовательно

$$F_{y_2} = \sum \frac{J_B}{R_B} \frac{d\omega_B}{dt} + \sum \frac{J_D}{R_D} \frac{d\omega_D}{dt} + \sum \frac{J_{я\mu}}{R_D} \frac{d\omega_{я}}{dt}. \quad (1.7)$$

Угловая скорость ω может быть выражена через линейную скорость v по формуле $\omega = \frac{v}{R}$, тогда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt}.$$

Линейное ускорение $\frac{dv}{dt}$ у движущих и вагонных колес при отсутствии проскальзывания одинаковы, а частота якоря в μ раз больше частоты движущей колесной пары. С учетом этого

$$F_{y_2} = \sum \frac{J_B}{R_B^2} \frac{dv}{dt} + \sum \frac{J_D}{R_D^2} \frac{dv}{dt} + \sum \frac{J_{я\mu^2}}{R_D^2} \frac{dv}{dt}. \quad (1.8)$$

Ускоряющая сила поезда F_y , равная сумме $F_{y_1} + F_{y_2}$, после выноса ускорения $\frac{dv}{dt}$ за скобку, равна

$$F_y = \left(m + \sum \frac{J_B}{R_B^2} + \sum \frac{J_D}{R_D^2} + \sum \frac{J_{я}\mu^2}{R_D^2} \right) \frac{dv}{dt}. \quad (1.9)$$

Выражение $\left(\sum \frac{J_B}{R_B^2} + \sum \frac{J_D}{R_D^2} + \sum \frac{J_{я}\mu^2}{R_D^2} \right)$, имеющее размерность

массы, называют *эквивалентной массой* $m_{\text{э}}$, а ее отношение к массе поезда m — *коэффициентом вращающихся частей* γ :

$$\gamma = \frac{m_{\text{э}}}{m}.$$

Тогда уравнение (1.9) принимает вид

$$F_y = m(1 + \gamma) \frac{dv}{dt}. \quad (1.10)$$

Равенство (1.10) называют *уравнением движения поезда* в общем виде, произведение $m(1 + \gamma)$ — *приведенной массой поезда* $m_{\text{п}}$. Коэффициент $(1 + \gamma)$, учитывающий инерцию вращающихся частей, показывает, на сколько нужно увеличить действительную массу поезда при решении уравнения движения поезда.

Для расчета ускорения движения поезда уравнение (1.10) приводят к виду

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_y}{m(1+\gamma)}. \quad (1.11)$$

В международной системе единицей силы является ньютон, Н; массы — килограмм, кг; скорости — м/с; ускорения — м/с². При расчетах, связанных с движением поездов массу поезда измеряют в тоннах. Чтобы преобразовать ее в килограммы, нужно ввести коэффициент 1000 (1 т = 1000 кг). Скорость поезда измеряют в километрах в час. Чтобы выразить скорость в этих единицах, нужно представить ускорение в километрах, деленное на час в квадрате.

Поскольку 1 м = 1/1000 км, а 1 с = 1/3600 ч, получают:

$$1 \text{ м/с}^2 = 3600^2 / 1000 = 12\,960 \text{ км/ч}^2.$$

Тогда из выражения (1.11) ускорение поезда в км/ч² будет иметь вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{12\,960}{1000} \cdot \frac{F_y}{m(1+\gamma)} = 12,96 \frac{F_y}{m(1+\gamma)}. \quad (1.12)$$

Так как из уравнения (1.2) следует, что $f_y = \frac{F_y}{mg}$, то ускорение (км/ч²) при $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ будет определено как

$$\frac{dv}{dt} = \frac{127}{1+\gamma} f_y. \quad (1.13)$$

Выражение (1.13), также являющееся уравнением движения поезда, показывает, что ускорение движения поезда зависит от удельной ускоряющей силы и коэффициента $(1 + \gamma)$. Значения коэффициента $(1 + \gamma)$ различны для разных видов подвижного состава, на величину $(1 + \gamma)$ влияет также его масса. Так, у груженных вагонов значение коэффициента меньше по сравнению с порожними вагонами из-за уменьшения влияния одних и тех же вращающихся частей (колесных пар) на вагон большей массы. У локомотивов этот коэффициент имеет большие значения, чем у вагонов, так как кроме колесных пар в нем учитывается инерция якорей тяговых электродвигателей.

Коэффициент γ для поезда, состоящего из локомотива и вагонов различного типа, определяют как средневзвешенную величину по формуле

$$\gamma = \frac{m_{\text{л}}\gamma_{\text{л}} + m_{\text{с}_1}\gamma_1 + m_{\text{с}_2}\gamma_2 + \dots}{m}, \quad (1.14)$$

где $m_{\text{л}}$ — масса локомотива в тоннах, имеющего коэффициент $\gamma_{\text{л}}$;

$m_{\text{с}_1}, m_{\text{с}_2}, \dots$ — массы отдельных частей состава в тоннах, имеющих коэффициенты соответственно $\gamma_1, \gamma_2, \dots$;

m — масса поезда, т.

Для различных грузовых и пассажирских поездов коэффициент γ оказывается близким к 0,06.

Обозначив в уравнении (1.13) $\frac{127}{1+\gamma}$ через ζ , получим наиболее простую и удобную для расчетов форму уравнения движения поезда:

$$\frac{dv}{dt} = \zeta f_y, \quad (1.15)$$

где ζ — ускорение поезда в км/ч² при действии удельной ускоряющей силы в 1 Н/кН.

Так как из формулы (1.3) $f_y = f_k - w - b_T$, то

$$\frac{dv}{dt} = \zeta(f_k - w - b_T). \quad (1.16)$$

Значения коэффициента ζ , $\frac{\text{км/ч}^2}{\text{Н/кН}}$, как указано в Правилах тяговых расчетов для поездной работы (ПТР), составляют для:

- грузовых и пассажирских поездов 120;
- одинокое следующего электровоза 107;
- электропоезда 119.

Из выражений (1.15) и (1.16) следует, что ускорение движения поезда зависит от величины и знака удельных ускоряющих сил. В *режиме тяги* при $b_T = 0$ уравнение (1.16) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = \zeta(f_k - w). \quad (1.17)$$

Если $(f_k - w) > 0$, то поезд будет двигаться ускоренно и скорость движения будет возрастать.

В том случае, когда разность $f_k - w$ останется положительной и неизменной по величине, поезд будет двигаться с постоянным ускорением — *равноускоренно*.

В случае равенства сил f_k и w ускоряющая сила и ускорение равны нулю, скорость будет постоянной, а движение *равномерным*.

Если f_k окажется меньше w , $(f_k - w) < 0$, то удельная ускоряющая сила будет отрицательной, что приведет к снижению скорости — *замедленному* движению, а при неизменной величине $(f_k - w)$ — *равнозамедленному* движению.

В *режиме выбега* формула (1.16) при $f_k = 0$ и $b_T = 0$ принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = \zeta(-w). \quad (1.18)$$

При силе сопротивления движению, направленной против движения, поезд будет двигаться *замедленно*. И только на крутых спусках, когда удельные силы сопротивления могут быть направлены по движению поезда, его движение будет *ускоренным*. На спусках сила w может оказаться равной нулю, тогда движение будет *равномерным*.

В *режиме торможения* к силам сопротивления движению добавляется тормозная сила, действующая против движения. Уравнение (1.16) в этом случае выглядит так:

$$\frac{dv}{dt} = \zeta(-w - b_T). \quad (1.19)$$

Движение поезда при этом будет, как правило, *замедленным*. И только при движении по крутому спуску, когда удельная сила сопротивления w направлена по движению поезда и ее значение превышает удельную тормозную силу, движение будет *ускоренным*, а при равенстве этих сил — *равномерным*.

Использованная литература

- 1 Осипов С.И., Осипов С.С., Феоктистов В.П. Теория электрической тяги. – М.: Маршрут, 2006. – 436 с.