

Обработка изображений в системах управления

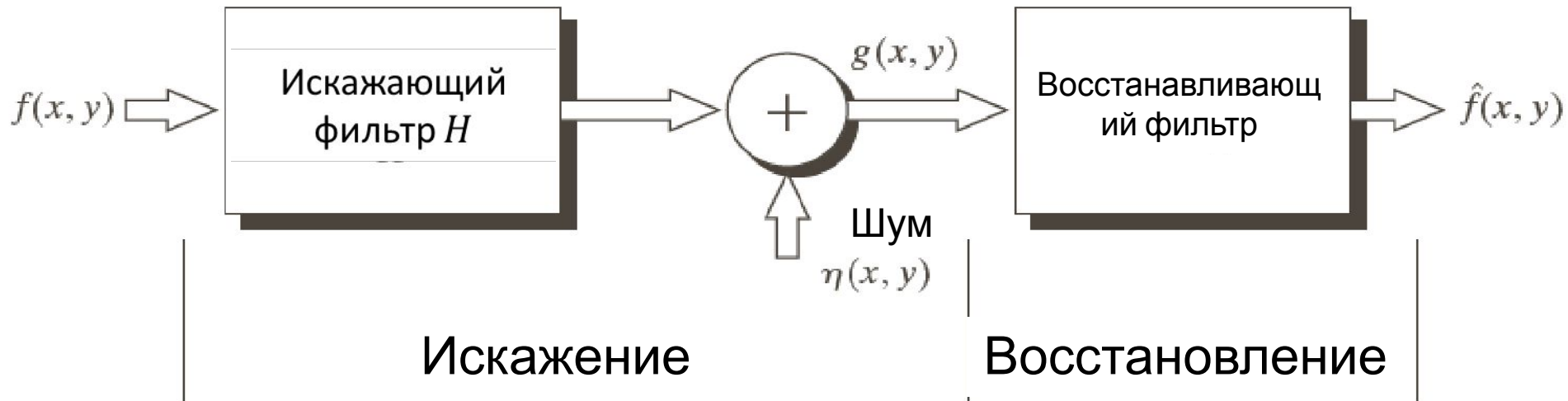
Лекция 7

Методы восстановления изображений

Восстановление изображений

- В процессе формирования и передачи по каналам связи изображения подвергаются разного рода искажениям (degradation)
- Основные типы искажений:
 - расфокусировка
 - смаз (размытие) в результате движения
 - шумы
- **Задача восстановления изображений** (image restoration, image recovery): по наблюдаемому искаженному изображению построить оценку исходного (неискаженного) изображения
- ...причем такая оценка должна быть как можно ближе к оригиналу
- Если известны особенности формирования изображений, на их основе составляют модель искажений, и используют ее в процессе восстановления
- Если модель искажений нельзя составить на основе анализа процессов формирования изображений, то она должна оцениваться косвенным путем

Модель процессов искажения/восстановления изображений



Искажение (degradation):

- искажающий фильтр (degradation function) H
- аддитивный шум $\eta(x, y)$

Восстанавливающий фильтр (restoration function):

- по искаженному зашумленному изображению $g(x, y)$ восстанавливает оценку $\hat{f}(x, y)$ исходного изображения $f(x, y)$

Модель процессов искажения/восстановления изображений

● Модель искажения:

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

Если H – линейный стационарный фильтр, то процесс искажения в пространственной области описывается выражением

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y),$$

где $h(x, y)$ – двумерная пространственная импульсная характеристика искажающего фильтра; $(*)$ – операция свертки

Пространственная свертка при переходе в частотную область заменяется произведением спектра изображения $F(u, v)$ и частотной характеристики искажающего фильтра $H(u, v)$, поэтому:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v),$$

где

$F(u, v) = \mathcal{F}[f(x, y)]$ – спектр исходного изображения;

$G(u, v) = \mathcal{F}[g(x, y)]$ – спектр искаженного изображения;

$N(u, v)$ – спектральная плотность шума

Оценка качества восстановления

- Среднеквадратическая отклонение ошибки восстановления (Root Mean Square Error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (\hat{f}(x, y) - f(x, y))^2}$$

- Отношение сигнал шум (Signal-to-Noise Ratio):

$$SNR = \sqrt{\frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}^2(x, y)}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (\hat{f}(x, y) - f(x, y))^2}}$$

Напоминание: модели шума

- По способу приложения:
 - аддитивный
 - мультипликативный
 - импульсный
- Распределение вероятности шума:
 - Гауссовское (нормальное)
 - Рэлеевское
 - Равномерное
 - Гамма-распределение
 - и др.
- Белый шум
 - отсутствует корреляция между искажениями разных пикселей изображения
 - отсутствует корреляция между шумом и изображением
 - спектральная плотность шума – константа
 - в случае нормального распределения, отсутствие корреляции равнозначно отсутствию статистической связи
- Периодический/непериодический шум

Напоминание: нормальный (гауссовский) шум

Искажение каждого пикселя – случайная величина z с плотностью вероятности:

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ – математическое ожидание (обычно принимается =0),
 σ – дисперсия с.в. z

- с вероятностью $\sim 70\%$ значения с.в. z лежат в диапазоне $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- с вероятностью $\sim 95\%$ значения с.в. z лежат в диапазоне $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- с вероятностью $\sim 99,7\%$ значения с.в. z лежат в диапазоне $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Фильтрация изображений

В отсутствии искажений модели формирования изображения имеют вид:

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

(в пространственной области)

и

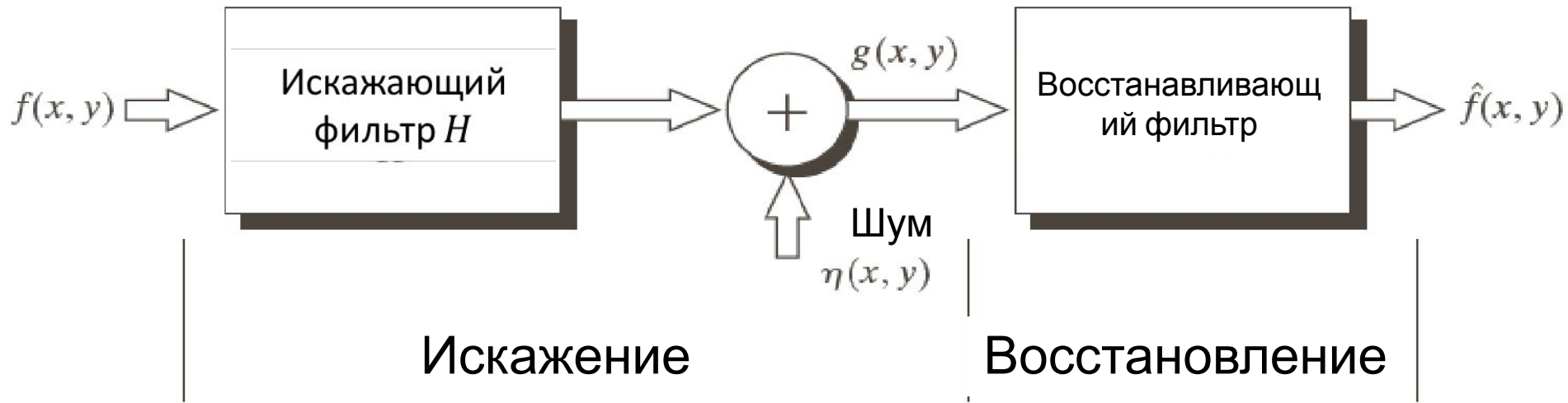
$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

(в частотной области)

Задача восстановления сводится к задаче фильтрации (шумоподавления)

Методы фильтрации изображений в пространственной и частотных областях разбирали на предыдущих лекциях

Модель процессов искажения/восстановления изображений



$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

Наиболее распространенный случай, когда искажающий фильтр H представляет собой линейный пространственно-инвариантный оператор

Напоминание: линейный стационарный оператор

Пусть H – оператор, причем $H[f(x, y)] = g(x, y)$

Оператор H называют линейным, если

$$H[\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)] = \alpha H[f_1(x, y)] + \beta H[f_2(x, y)],$$

где

$f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – изображения;

α и β – действительные числа

Оператор H называют пространственно-инвариантным, если

$$H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$$

для любых $f(x, y)$ и любых α и β

Линейная пространственно-инвариантная модель искажений

В соответствии с фильтрующим свойством двумерной δ -функции

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

Представим на время, что шум отсутствует, т.е. $\eta(x, y) = 0$

$$g(x, y) = H[f(x, y)] = H \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right]$$

Если H – линейный пространственно-инвариантный оператор, то его можно поменять местами с оператором интегрирования. Получим

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$$

Оператор H действует только на функции, зависящие от переменных (x, y) , поэтому

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$$

Но $H[\delta(x, y)] = h(x, y)$ есть импульсный отклик (импульсная характеристика) оператора H . Следовательно результат приложения оператора H к изображению $f(x, y)$ может быть найден как двумерная пространственная свертка изображения с импульсной характеристикой $h(x, y)$:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta = h(x, y) * f(x, y)$$

Линейная пространственно-инвариантная модель искажений

При наличии аддитивного шума ($\eta(x, y) \neq 0$) и при условии, что H – линейный пространственно-инвариантный оператор

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) = \\ &= h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \end{aligned}$$

В области пространственных частот свертке соответствует произведение спектров, поэтому:

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v),$$

где

$F(u, v) = \mathcal{F}[f(x, y)]$ – спектр исходного изображения;

$G(u, v) = \mathcal{F}[g(x, y)]$ – спектр искаженного изображения;

$N(u, v)$ – спектральная плотность шума

Получение модели искажений

Существует два основных подхода к получению модели искажения:

- Экспериментальный
- Математическое моделирование

Пример: моделирование турбулентности атмосферы

Наличие турбулентной атмосферы в процессе формирования изображения приводит к искажению, описываемому моделью вида

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{\frac{5}{6}}},$$

где $k = \text{const}$ – параметр модели



a, b
c, d

Рис. 1 – Иллюстрация модели турбулентности атмосферы:

(a) турбулентность отсутствует;

(b) сильная турбулентность,
 $k = 0,0025$;

(c) средняя турбулентность,
 $k = 0,001$;

(d) слабая турбулентность,
 $k = 0,00025$.



Математическая модель размытия (смаза) изображения (1)

Размытие изображения является следствием движения датчика изображений относительно наблюдаемой сцены в процессе формирования изображения

Пусть датчик изображений движется в плоскости, параллельной плоскости сцены. Обозначим через $x_0(t)$ и $y_0(t)$ переменные компоненты движения по соответствующим координатным осям x и y . Будем считать оптическую систему идеальной. При данных условиях искаженное (размытое) изображение определяется выражением

$$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt,$$

где T – время экспозиции.

Математическая модель размытия (смаза) изображения (2)

- $$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt$$

Выполним преобразование Фурье

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \mathcal{F}[g(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt \right] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0(t), y - y_0(t)) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right] dt \end{aligned}$$

Внутренний интеграл – преобразование Фурье от смещенной по пространственным координатам функции $f(x - x_0(t), y - y_0(t))$

Математическая модель размытия (смаза) изображения (3)

Свойство преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}[f(x - \alpha, y - \beta)] = \mathcal{F}[f(x, y)]e^{-j2\pi(u\alpha + v\beta)}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \\ &= \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0(t), y - y_0(t)) e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy \right] dt \\ &= \int_0^T F(u, v) e^{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \end{aligned}$$

С другой стороны $G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v)$, поэтому

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt$$

Математическая модель размытия (смаза) изображения (4)

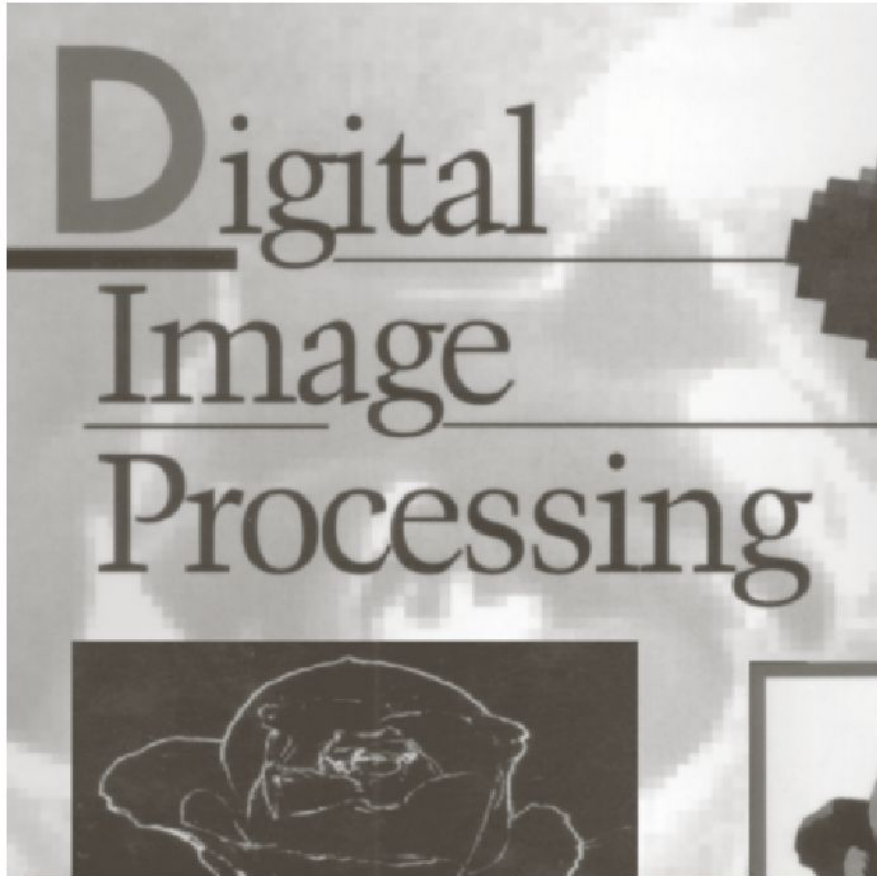
Предположим, что движение датчика относительно плоскости сцены линейное и равномерное, в таком случае

$$x_0(t) = \alpha t/T, y_0(t) = \beta t/T$$

Тогда

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt = \int_0^T e^{-j2\pi[u\alpha+v\beta]t/T} dt = \\ &= \frac{T \sin(\pi(u\alpha + v\beta))}{\pi(u\alpha + v\beta)} e^{-j\pi(u\alpha+v\beta)} \end{aligned}$$

Математическая модель размытия (смаза) изображения (5)



Исходное изображение



Размытие в соответствии с
полученной моделью
при $a = b = 0,1$ и $T = 1$

Инверсная фильтрация

В отсутствие шума $G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v)$, откуда
$$F(u, v) = G(u, v) \cdot H^{-1}(u, v)$$

Восстанавливающий фильтр $H_R(u, v) = H^{-1}(u, v)$ называют инверсным фильтром

При наличии шума

$$\begin{aligned}\hat{F}(u, v) &= G(u, v) \cdot H^{-1}(u, v) = \\ &= \frac{1}{H(u, v)} [F(u, v) \cdot H(u, v) + N(u, v)] = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}\end{aligned}$$

1. С помощью инверсного фильтра нельзя точно восстановить исходное изображение, т.к. спектральная плотность шума $N(u, v)$ не известна
2. Если искажение отсутствует, то отношение $N(u, v)/H(u, v)$ будет преобладать в спектре восстановленного изображения

Инверсная фильтрация. Пример

В качестве примера попробуем восстановить изображение рис. 1b. Соответствующая модель искажения:

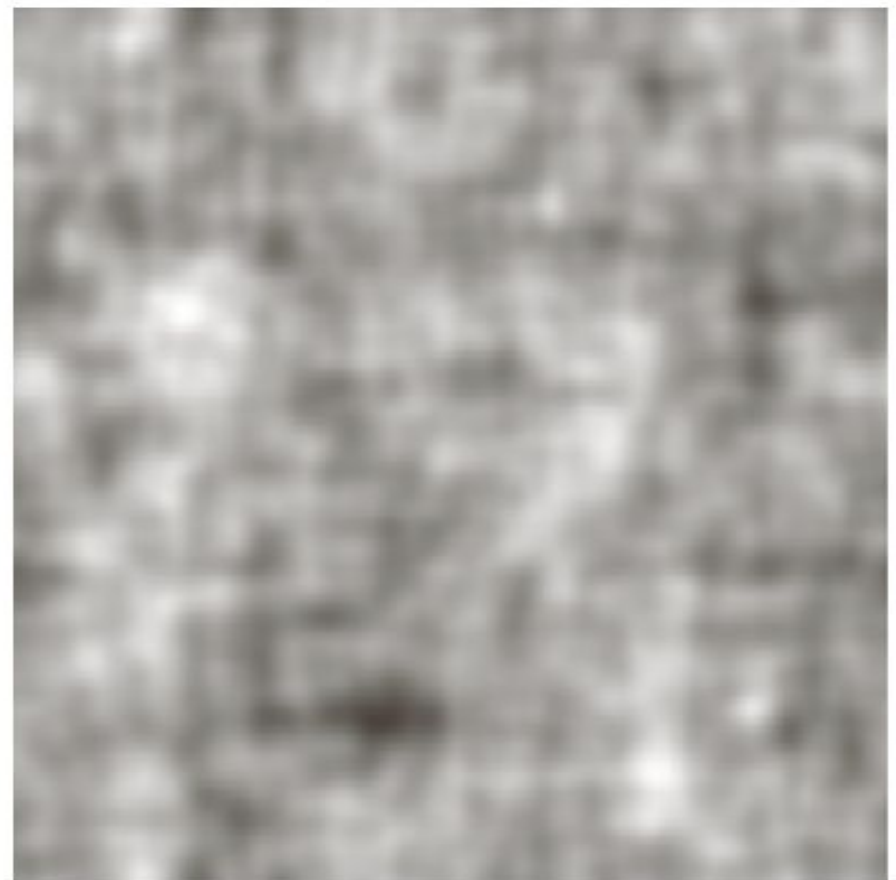
$$H(u, v) = e^{-k \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{5/6}},$$

$$k = 0,0025, \quad M = N = 480$$

Инверсная фильтрация. Пример



Искаженное изображение рис. 1b



Восстановление с помощью
инверсного фильтра

Инверсная фильтрация не работает?

Инверсная фильтрация. Пример

Инверсный фильтр в данном примере не работает, потому что при определенных значениях (u, v) искажающая функция $H(u, v)$ принимает близкие к нулю значения.

Один из способов обойти данную проблему состоит в том, чтобы ограничить пространственные частоты фильтра определенным пределом

Значение $H(0,0)$ соответствует среднему значению функции $h(x, y)$ и обычно является наибольшим. Поэтому, ограничиваясь рассмотрением низких частот, лежащих вблизи начала координат, мы уменьшаем вероятность встретить нулевое значение.

a, b
c, d

Рис. 2 – Восстановление с помощью инверсного фильтра:

(a) результат применения полного фильтра;

(b) обрезка спектральной характеристики фильтра вне круга радиусом 40,

(c) обрезка спектральной характеристики фильтра вне круга радиусом 70,

(d) обрезка спектральной характеристики фильтра вне круга радиусом 85



Фильтрация методом минимизации среднеквадратического отклонения (винеровская фильтрация)

Критерий оптимальности

$$e^2 = E \left\{ (f - \hat{f})^2 \right\} \rightarrow \min$$

Оптимальный по этому критерию восстанавливающий фильтр в частотной области имеет вид:

$$H_R(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)}, \hat{F}(u, v) = H_R(u, v) \cdot G(u, v)$$

где

$H(u, v)$ – спектр искажающей функции;

$H^*(u, v)$ – комплексное сопряжение $H(u, v)$;

$|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$;

$S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$ - энергетический спектр шума;

$S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$ - энергетический спектр неискаженного изображения

Фильтрация методом минимизации среднеквадратического отклонения (винеровская фильтрация)

- $$H_R(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)},$$

Если шум отсутствует, то винеровская фильтрация сводится к инверсной фильтрации

На практике спектры шума и неискаженного изображения неизвестны, поэтому вместо оптимального винеровского фильтра используют фильтр вида:

$$H_R(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + K},$$

где K – константное значение, которое подбирается эмпирически

Фильтрация методом минимизации среднеквадратического отклонения (винеровская фильтрация). Пример

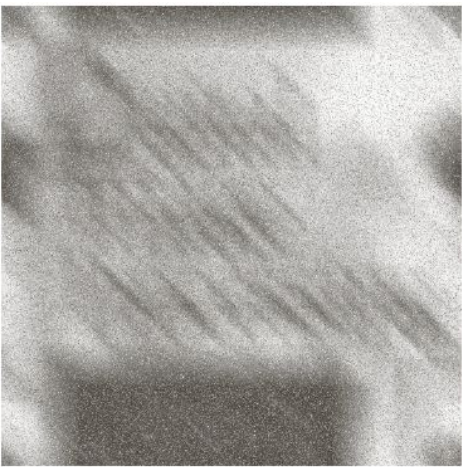


a,b,c

Сравнение инверсной фильтрации и винеровской фильтрации на примере восстановления изображения с рис. 1b:

- (a) Результат восстановления с использованием полного инверсного фильтра;
- (b) Результат восстановления с использованием обрезанного инверсного фильтра;
- (c) Результат восстановления с использованием винеровской фильтрации

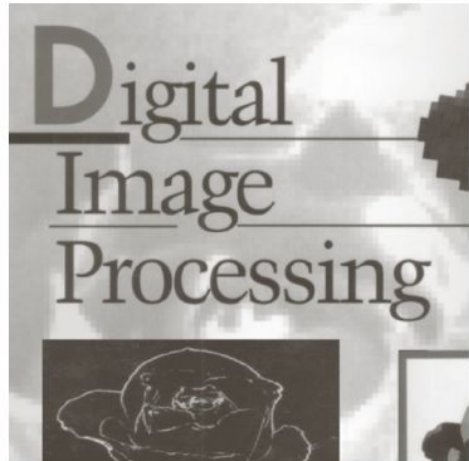
Слева
искаженное
изображени
е



В центре
инверсная
фильтрац
ия



Справа
винеровска
я
фильтраци
я



шум

Уменьшение
дисперсии

Наложение связи в методе минимизации среднеквадратического отклонения

Наложение связи (ограничения) при минимизации среднеквадратического отклонения ошибки восстановления и применение регуляризации по Тихонову дают следующую оценку для восстанавливающего фильтра:

$$H_R(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma|P(u, v)|}, \quad \hat{F}(u, v) = H_R(u, v) \cdot G(u, v),$$

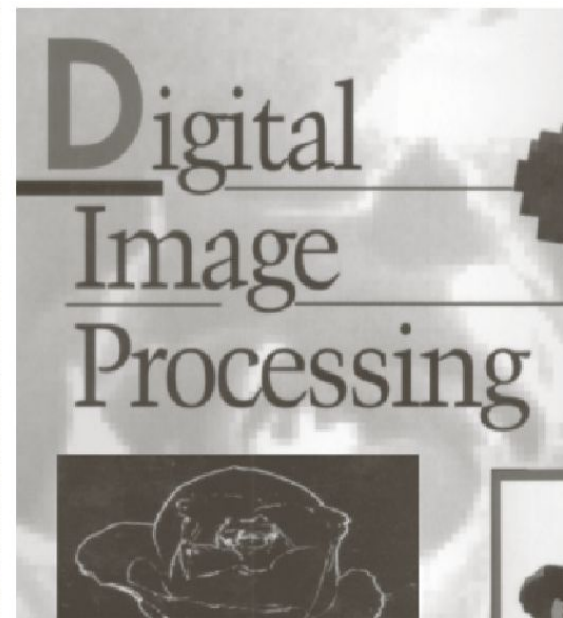
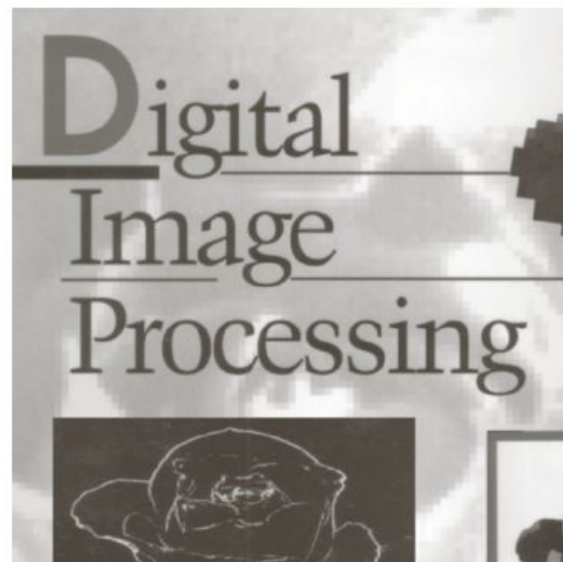
где

$$P(u, v) \text{ преобразование Фурье Лапласиана } p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

γ – числовой параметр.

При подборе параметра γ в данном методе можно добиться лучших результатов по отношению к винеровской фильтрации, т.к. γ – это истинное число, а параметр K в методе винеровской фильтрации есть приближение константой отношения двух неизвестных функций

Восстановление изображений из предыдущего примера. Вверху винеровская фильтрация, внизу подход на основе регуляризации



Среднегеометрический фильтр

Обобщение формулы винеровской фильтрации:

$$H_R(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2} \right]^\alpha \left[\frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \beta [S_\eta(u, v)/S_f(u, v)]} \right]^{1-\alpha}$$

α, β – положительные вещественные числа.

Данная модель удобна потому, что описывает целое семейство различных фильтров:

- При $\alpha = 1$ – инверсный фильтр
- При $\alpha = 0$ – параметрический винеровский фильтр
(при $\beta = 1$ – получим обычный винеровский фильтр)
- При $\alpha = 1/2$ и $\beta = 1$ – фильтр выравнивания (эквализации) спектров (среднегеометрический фильтр)