# Обработка изображений в системах управления

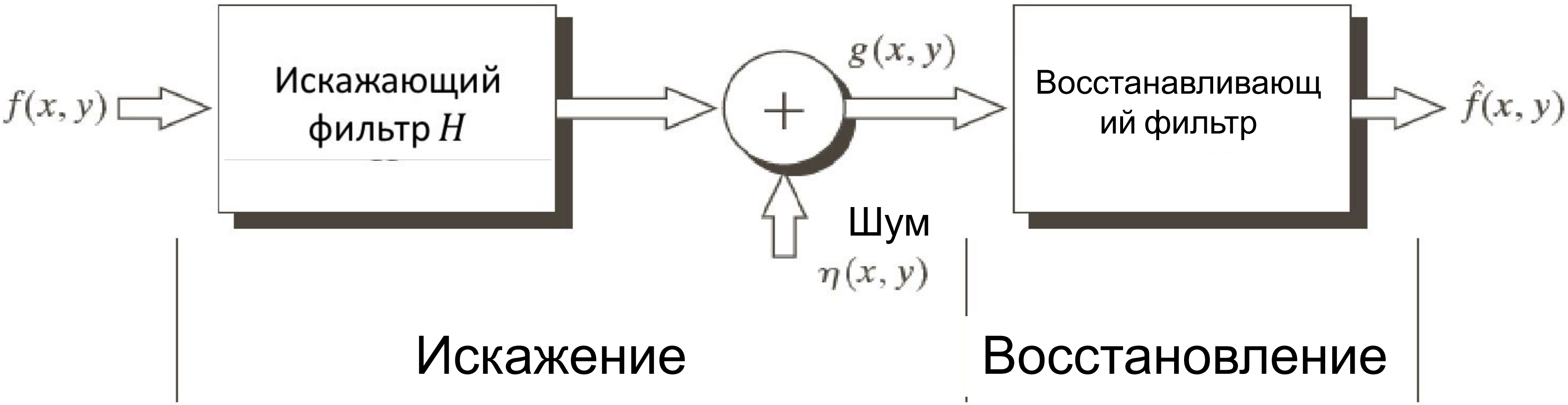
Лекция 7

Методы восстановления изображений

# Восстановление изображений

- В процессе формирования и передачи по каналам связи изображения подвергаются разного рода искажениям (degradation)
- Основные типы искажений:
  - расфокусировка
  - смаз (размытие) в результате движения
  - шумы
- **Задача восстановления изображений** (image restoration, image recovery): по наблюдаемому искаженному изображению построить оценку исходного (неискаженного) изображения
- …причем такая оценка должна быть как можно ближе к оригиналу
- Если известны особенности формирования изображений, на их основе составляют модель искажений, и используют ее в процессе восстановления
- Если модель искажений нельзя составить на основе анализа процессов формирования изображений, то она должна оцениваться косвенным путем

# Модель процессов искажения/восстановления изображений




Искажение (degradation):

- искажающий фильтр (degradation function) $H$
- аддитивный шум $\eta(x, y)$

Восстанавливающий фильтр (restoration function):

- по искаженному зашумленному изображению $g(x, y)$ восстанавливает оценку $\hat{f}(x, y)$ исходного изображения $f(x, y)$

# Модель процессов искажения/восстановления изображений

- Модель искажения:

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

Если $H$ – линейный стационарный фильтр, то процесс искажения в пространственной области описывается выражением

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y),$$

где $h(x, y)$ – двумерная пространственная импульсная характеристика искажающего фильтра; $(*)$ – операция свертки

Пространственная свертка при переходе в частотную область заменяется произведением спектра изображения $F(u, v)$ и частотной характеристики искажающего фильтра $H(u, v)$, поэтому:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v),$$

где

$F(u, v) = \mathcal{F}[f(x, y)]$ – спектр исходного изображения;

$G(u, v) = \mathcal{F}[g(x, y)]$ – спектр искаженного изображения;

$N(u, v)$ – спектральная плотность шума

# Оценка качества восстановления

- Среднеквадратическая отклонение ошибки восстановления(Root Mean Square Error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(\hat{f}(x,y) - f(x,y)\right)^2}$$

- Отношение сигнал шум (Signal-to-Noise Ratio):

$$SNR = \sqrt{\frac{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\hat{f}^2(x,y)}{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(\hat{f}(x,y) - f(x,y)\right)^2}}$$

# Напоминание: модели шума

- По способу приложения:
  - аддитивный
  - мультипликативный
  - импульсный
- Распределение вероятности шума:
  - Гауссовское (нормальное)
  - Рэлеевское
  - Равномерное
  - Гамма-распределение
  - и др.
- Белый шум
  - отсутствует корреляция между искажениями разных пикселей изображения
  - отсутствует корреляция между шумом и изображением
  - спектральная плотность шума – константа
  - в случае нормального распределения, отсутствие корреляции равнозначно отсутствию статистической связи
- Периодический/непериодический шум

# Напоминание: нормальный (гауссовский) шум

- Искажение каждого пикселя – случайная величина $z$ с плотностью вероятности:

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\mu$ – математическое ожидание (обычно принимается =0), $\sigma$ – дисперсия с.в. $z$

- с вероятностью $\sim 70\%$ значения с.в. $z$ лежат в диапазоне
$$[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$$
- с вероятностью $\sim 95\%$ значения с.в. $z$ лежат в диапазоне
$$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$$
- с вероятностью $\sim 99{,}7\%$ значения с.в. $z$ лежат в диапазоне
$$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$$

# Фильтрация изображений

- В отсутствии искажений модели формирования изображения имеют вид:

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

(в пространственной области)

и

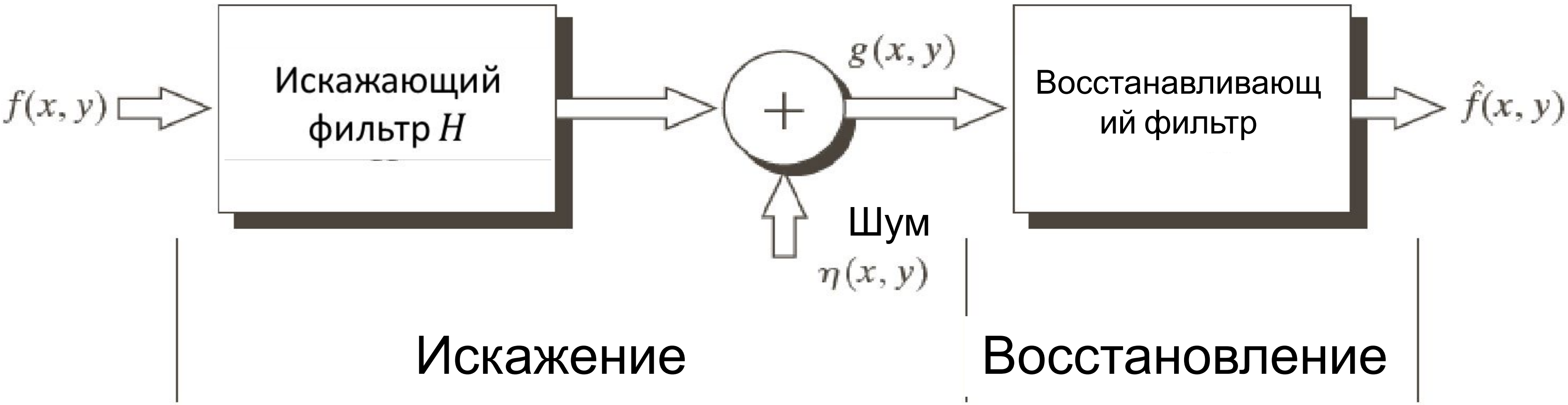
$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

(в частотной области)

Задача восстановления сводится к задаче фильтрации (шумоподавления)

Методы фильтрации изображений в пространственной и частотных областях разбирали на предыдущих лекциях

# Модель процессов искажения/восстановления изображений




$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

Наиболее распространенный случай, когда искажающий фильтр $H$ представляет собой линейный пространственно-инвариантный оператор

# Напоминание: линейный стационарный оператор

- Пусть $H$ – оператор, причем $H[f(x,y)] = g(x,y)$

Оператор $H$ называют линейным, если

$$H[\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y)] = \alpha H[f_1(x,y)] + \beta H[f_2(x,y)],$$

где

$f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ – изображения;

$\alpha$ и $\beta$ – действительные числа

Оператор $H$ называют пространственно-инвариантным, если

$$H[f(x-\alpha, y-\beta)] = g(x-\alpha, y-\beta)$$

для любых $f(x,y)$ и любых $\alpha$ и $\beta$

# Линейная пространственно-инвариантная модель искажений

- В соответствии с фильтрующим свойством двумерной $\delta$-функции

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta$$

Представим на время, что шум отсутствует, т.е. $\eta(x,y) = 0$

$$g(x,y) = H[f(x,y)] = H\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta\right]$$

Если $H$ – линейный пространственно-инвариантный оператор, то его можно поменять местами с оператором интегрирования. Получим

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H[f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)]d\alpha d\beta$$

Оператор $H$ действует только на функции, зависящие от переменных $(x,y)$, поэтому

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)H[\delta(x-\alpha,y-\beta)]d\alpha d\beta$$

Но $H[\delta(x,y)] = h(x,y)$ есть импульсный отклик (импульсная характеристика) оператора $H$. Следовательно результат приложения оператора $H$ к изображению $f(x,y)$ может быть найден как двумерная пространственная свертка изображения с импульсной характеристикой $h(x,y)$:

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta = h(x,y) * f(x,y)$$

# Линейная пространственно-инвариантная модель искажений

- При наличии аддитивного шума ($\eta(x, y) \neq 0$) и при условии, что $H$ – линейный пространственно-инвариантный оператор

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x-\alpha, y-\beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) =$$
$$= h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$

В области пространственных частот свертке соответствует произведение спектров, поэтому:

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v),$$

где

$F(u, v) = \mathcal{F}[f(x, y)]$ – спектр исходного изображения;

$G(u, v) = \mathcal{F}[g(x, y)]$ – спектр искаженного изображения;

$N(u, v)$ – спектральная плотность шума

# Получение модели искажений

Существует два основных подхода к получению модели искажения:

- Экспериментальный
- Математическое моделирование

# Пример: моделирование турбулентности атмосферы

- Наличие турбулентной атмосферы в процессе формирования изображения приводит к искажению, описываемому моделью вида

$$H(u, v) = e^{-k\left(u^2+v^2\right)^{\frac{5}{6}}},$$

где $k = \mathrm{const}$ – параметр модели

•

a, b

c, d

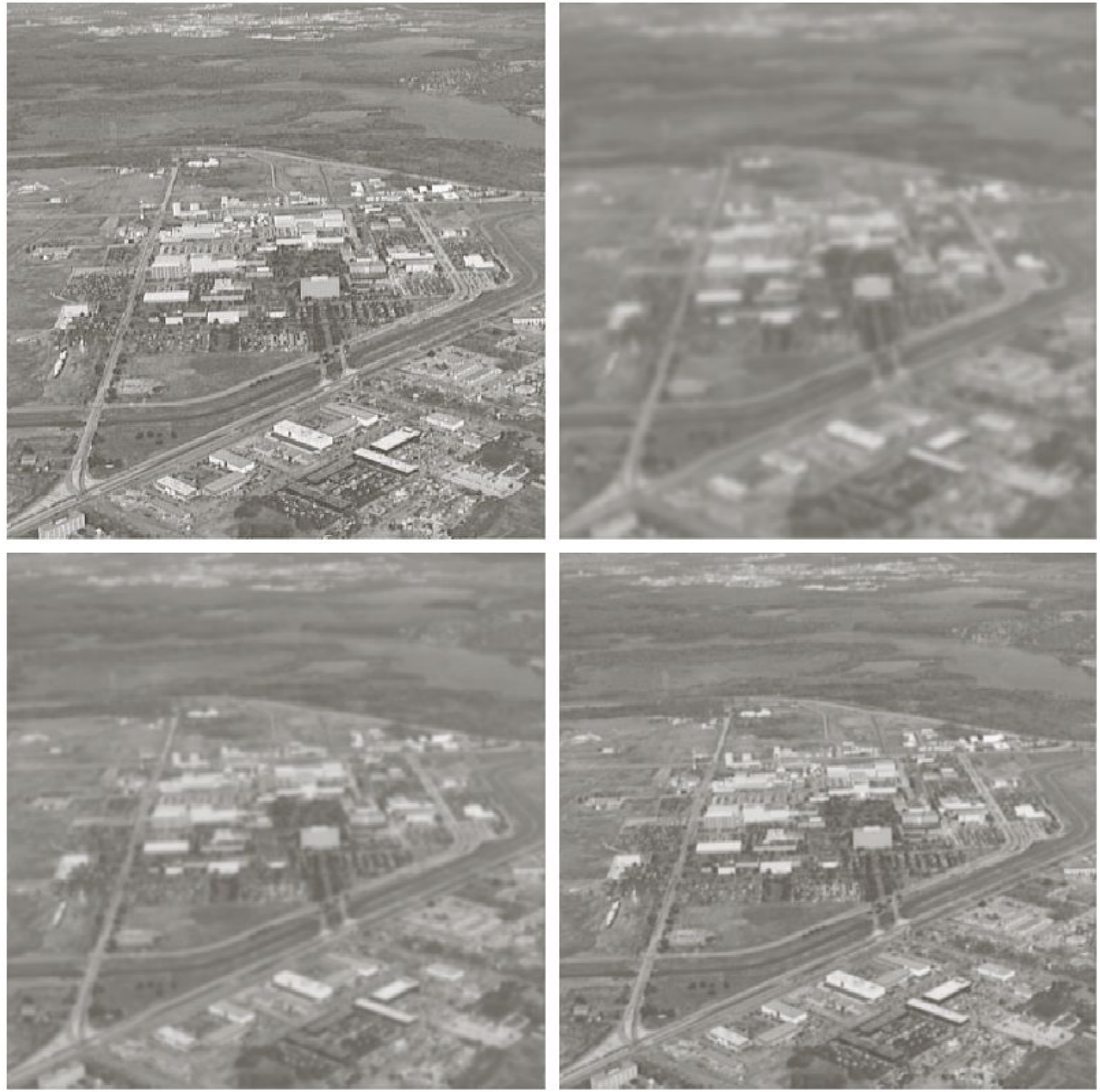


Рис. 1 – Иллюстрация модели турбулентности атмосферы:

(a) турбулентность отсутствует;

(b) сильная турбулентность, $k = 0{,}0025$;

(c) средняя турбулентность, $k = 0{,}001$;

(d) слабая турбулентность, $k = 0{,}00025$.

# Математическая модель размытия (смаза) изображения (1)

- Размытие изображения является следствием движения датчика изображений относительно наблюдаемой сцены в процессе формирования изображения

Пусть датчик изображений движется в плоскости, параллельной плоскости сцены. Обозначим через $x_0(t)$ и $y_0(t)$ переменные компоненты движения по советующим координатным осям $x$ и $y$. Будем считать оптическую систему идеальной. При данных условиях искаженное (размытое) изображение определяется выражением

$$g(x,y) = \int_0^T f\big(x - x_0(t), y - y_0(t)\big)dt,$$

где $T$ – время экспозиции.

# Математическая модель размытия (смаза) изображения (2)

- $g(x, y) = \int_0^T f\big(x - x_0(t), y - y_0(t)\big)dt$

Выполним преобразование Фурье

$$G(u, v) = \mathcal{F}[g(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T f\big(x - x_0(t), y - y_0(t)\big)dt\right]e^{-j2\pi(ux+vy)}dx\,dy$$

$$= \int_0^T\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\big(x - x_0(t), y - y_0(t)\big)e^{-j2\pi(ux+vy)}dx\,dy\right]dt$$

Внутренний интеграл – преобразование Фурье от смещенной по пространственным координатам функции $f\big(x - x_0(t), y - y_0(t)\big)$

# Математическая модель размытия (смаза) изображения (3)

- Свойство преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}[f(x-\alpha, y-\beta)] = \mathcal{F}[f(x,y)]e^{-j2\pi(u\alpha+v\beta)}$$

Следовательно

$$G(u,v) =$$
$$= \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\big(x - x_0(t), y - y_0(t)\big) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx\, dy \right] dt$$
$$= \int_0^T F(u,v) e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt$$
$$= F(u,v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt$$

С другой стороны $G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$, поэтому

$$H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt$$

# Математическая модель размытия (смаза) изображения (4)

- Предположим, что движение датчика относительно плоскости сцены линейное и равномерное, в таком случае

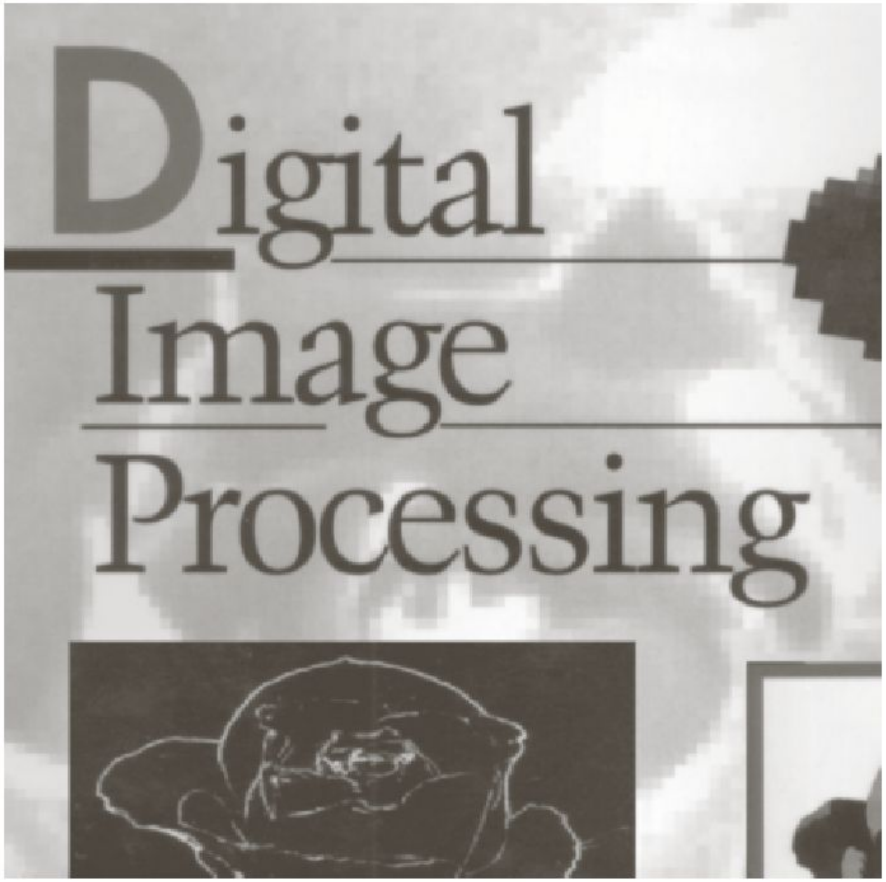
$$x_0(t) = \alpha t/T, y_0(t) = \beta t/T$$

Тогда

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt = \int_0^T e^{-j2\pi[u\alpha+v\beta]t/T}dt =$$

$$= \frac{T\sin\big(\pi(u\alpha + v\beta)\big)}{\pi(u\alpha + v\beta)}e^{-j\pi(u\alpha+v\beta)}$$

# Математическая модель размытия (смаза) изображения (5)




Исходное изображение

Размытие в соответствии с полученной моделью при $a = b = 0{,}1$ и $T = 1$

# Инверсная фильтрация

- В отсутствии шума $G(u,v) = H(u,v) \cdot F(u,v)$, откуда

$$F(u,v) = G(u,v) \cdot H^{-1}(u,v)$$

Восстанавливающий фильтр $H_R(u,v) = H^{-1}(u,v)$ называют инверсным фильтром

При наличии шума

$$\hat{F}(u,v) = G(u,v) \cdot H^{-1}(u,v) =$$

$$= \frac{1}{H(u,v)}[F(u,v) \cdot H(u,v) + N(u,v)] = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

1. С помощью инверсного фильтра нельзя точно восстановить исходное изображение, т.к. спектральная плотность шума $N(u,v)$ не известна
2. Если искажение отсутствует, то отношение $N(u,v)/H(u,v)$ будет преобладать в спектре восстановленного изображения

# Инверсная фильтрация. Пример

- В качестве примера попробуем восстановить изображение рис. 1b. Соответствующая модель искажения:

$$H(u,v) = e^{-k\left[\left(u-\frac{M}{2}\right)^2+\left(v-\frac{N}{2}\right)^2\right]^{5/6}},$$

$$k = 0{,}0025, \qquad M = N = 480$$

# Инверсная фильтрация. Пример

Искаженное изображение рис. 1b

Восстановление с помощью инверсного фильтра

**Инверсная фильтрация не работает?**

# Инверсная фильтрация. Пример

- Инверсный фильтр в данном примере не работает, потому что при определенных значениях $(u, v)$ искажающая функция $H(u, v)$ принимает близкие к нулю значения.

Один из способов обойти данную проблему состоит в том, чтобы ограничить пространственные частоты фильтра определенным пределом

Значение $H(0,0)$ соответствует среднему значению функции $h(x, y)$ и обычно является наибольшим. Поэтому, ограничиваясь рассмотрением низких частот, лежащих вблизи начала координат, мы уменьшаем вероятность встретить нулевое значение.

a, b

c, d

Рис. 2 – Восстановление с помощью инверсного фильтра:

(a) результат применения полного фильтра;

(b) обрезка спектральной характеристики фильтра вне круга радиусом 40,

(c) обрезка спектральной характеристики фильтра вне круга радиусом 70,

(d) обрезка спектральной характеристики фильтра вне круга радиусом 85

# Фильтрация методом минимизации среднеквадратического отклонения (винеровская фильтрация)

- Критерий оптимальности

$$e^2 = E\left\{\left(f - \hat{f}\right)^2\right\} \to \min$$

Оптимальный по этому критерию воостанавливающий фильтр в частотной области имеет вид:

$$H_R(u,v) = \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)\,|^2 + S_\eta(u,v)/S_f(u,v)}, \hat{F}(u,v) = H_R(u,v) \cdot G(u,v)$$

где

$H(u,v)$ – спектр искажающей функции;

$H^*(u,v)$ – комплексное сопряжение $H(u,v)$;

$|H(u,v)|^2 = H^*(u,v)H(u,v)$;

$S_\eta(u,v) = |N(u,v)|^2$ - энергетический спектр шума;

$S_f(u,v) = |F(u,v)|^2$ - энергетический спектр неискаженного изображения

# Фильтрация методом минимизации среднеквадратического отклонения (винеровская фильтрация)

- $$H_R(u,v) = \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)^2| + S_\eta(u,v)/S_f(u,v)},$$

Если шум отсутствует, то винеровская фильтрация сводится к инверсной фильтрации

На практике спектры шума и неискаженного изображения неизвестны, поэтому вместо оптимального винеровского фильтра используют фильтр вида:

$$H_R(u,v) = \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)^2| + K},$$

где $K$ – константное значение, которое подбирается эмпирически

# Фильтрация методом минимизации среднеквадратического отклонения (винеровская фильтрация). Пример

a,b,c
Сравнение инверсной фильтрации и винеровской фильтрации на примере восстановления изображения с рис. 1b:
(a) Результат восстановления с использованием полного инверсного фильтра;
(b) Результат восстановления с использованием обрезанного инверсного фильтра;
(c) Результат восстановления с использованием винеровской фильтрации

Слева искаженное изображение

В центре инверсная фильтрация

Справа винеровская фильтрация


Уменьшение дисперсии шума

# Наложение связи в методе минимизации среднеквадратического отклонения

- Наложение связи (ограничения) при минимизации среднеквадратического отклонения ошибки восстановления и применение регуляризации по Тихонову дают следующую оценку для восстанавливающего фильтра:

$$H_R(u,v) = \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma |P(u,v)|}, \qquad \hat{F}(u,v) = H_R(u,v) \cdot G(u,v),$$

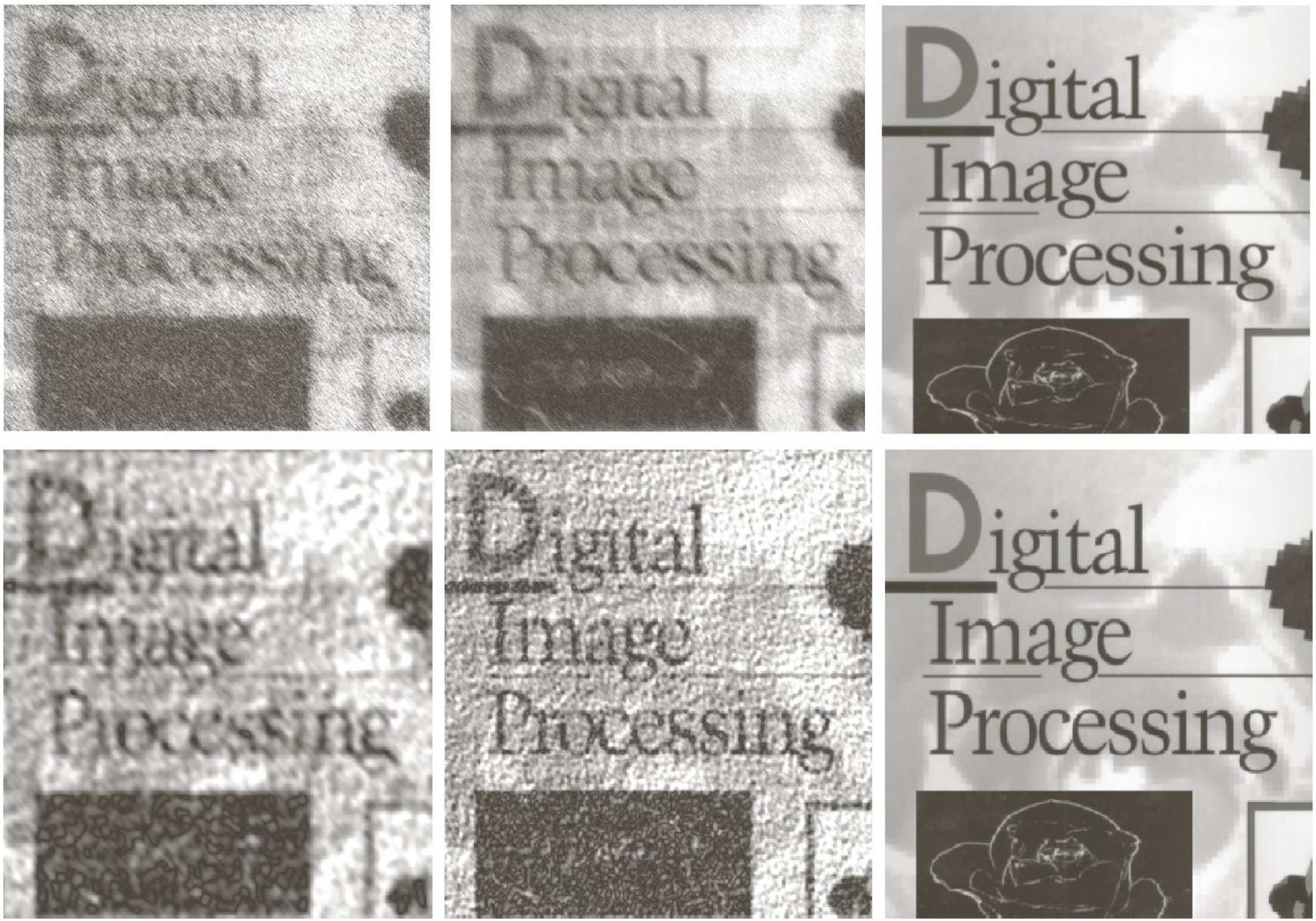
где

$P(u,v)$ преобразование Фурье Лапласиана $p(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\gamma$ – числовой параметр.

При подборе параметра $\gamma$ в данном методе можно добиться лучших результатов по отношению к винеровской фильтрации, т.к. $\gamma$ – это истинное число, а параметр $K$ в методе винеровской фильтрации есть приближение константой отношения двух неизвестных функций

Восстановление изображений из предыдущего примера. Вверху винеровская фильтрация, внизу подход на основе регуляризации



# Среднегеометрический фильтр

- Обобщение формулы винеровской фильтрации:

$$H_R(u,v) = \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2}\right]^{\alpha} \left[\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + \beta\left[S_\eta(u,v)/S_f(u,v)\right]}\right]^{1-\alpha}$$

$\alpha, \beta$ – положительные вещественные числа.

Данная модель удобна потому, что описывает целое семейство различных фильтров:

- При $\alpha = 1$ – инверсный фильтр
- При $\alpha = 0$ – параметрический винеровский фильтр
  (при $\beta = 1$ $-$ получим обычный винеровский фильтр)
- При $\alpha = 1/2$ и $\beta = 1$ – фильтр выравнивания (эквализации) спектров (среднегеометрический фильтр)