

# Функция. Свойства функции.

# План:

- *Определение функции.*
- *Область определения. Область значений.*
- *Способы задания функции.*
- *Возрастание, убывание функции.*
- *Ограниченность функции.*
- *Наибольшее, наименьшее значения функции.*
- *Выпуклость, вогнутость функции.*
- *Четность, нечетность функции.*
- *Элементарные функции, их свойства и графики.*

# В ДРЕВНЕМ МИРЕ

Понятие функции уходит своими корнями в ту далекую эпоху, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны.



*Чем больше животных удастся  
убить на охоте, тем дольше  
племя будет избавлено от  
голода*

*Чем дольше горит костер,  
тем теплее будет в пещере.*



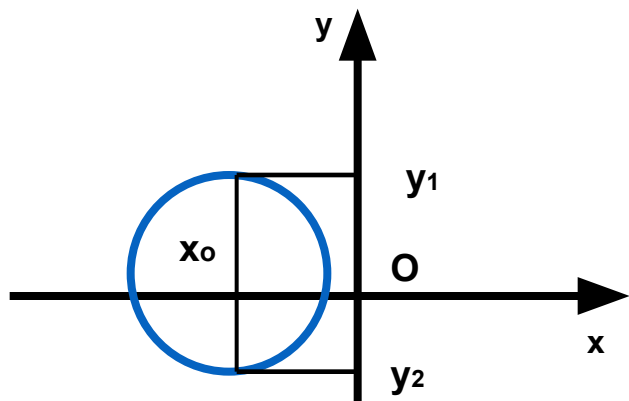
# Определение функции

Зависимость между двумя переменными  $x$  и  $y$ , при котором **каждому** значению переменной  $x$  соответствует **единственное** значение переменной  $y$  называют **функцией**.

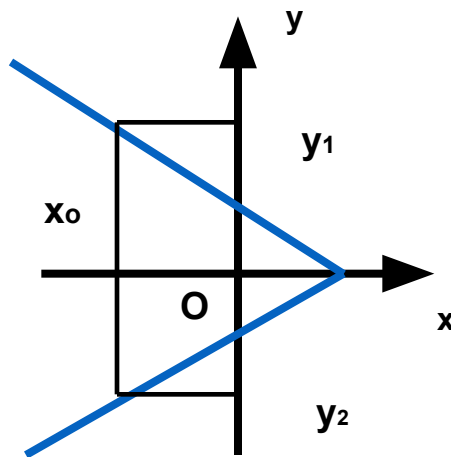
Обозначают  **$y = f(x)$** ,

где  $x$  – независимая переменная (аргумент),

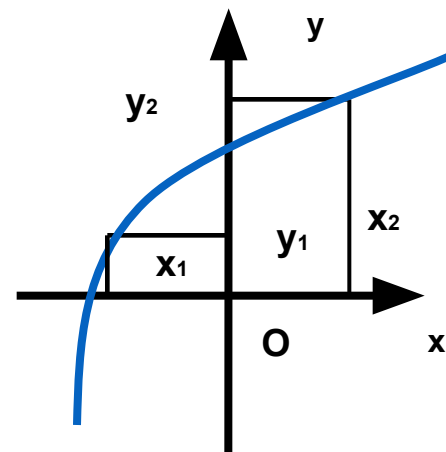
$y = f(x)$  – зависимая переменная (функция).



Не является функцией



Не является функцией

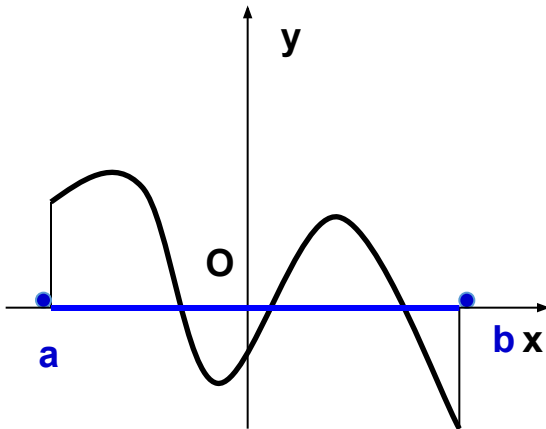


Является функцией

## Область определения функции

Множество всех допустимых значений  $x$  (аргумента, независимой переменной) при которых выражение имеет смысл.

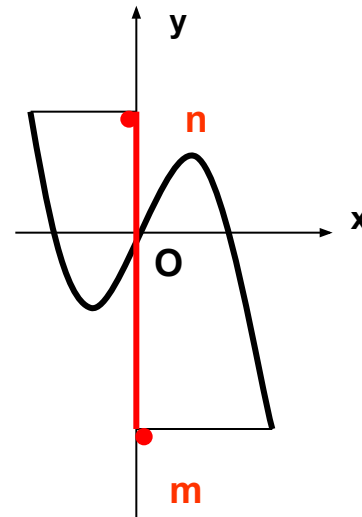
Обозначение:  $D(f) = [a;b]$



## Область значений функции

Множество всех значений функции  $y = f(x)$ , где  $x$  принадлежит  $X$  (области определения).

Обозначение:  $E(f) = [m;n]$



# Способы задания функции

## Аналитический (формулой)

1)  $y = 2x + 5;$

2)  $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < -2; \\ 0,5x + 3, & \text{если } -2 \leq x \leq 2; \\ 7 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

## Описанием (с помощью естественного языка)

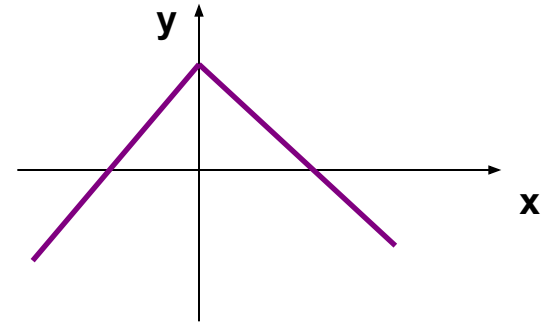
**Например:**

«Каждому отрицательному числу соответствует  $-1$ , нулю – число  $0$ , а каждому положительному – число  $1$ »

## Табличный.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n <sup>2</sup>	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

## Графический

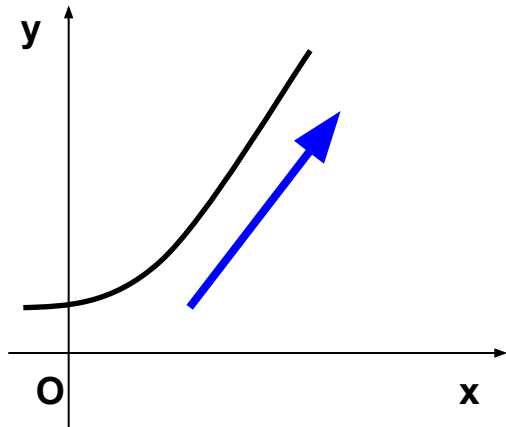


# Свойства функции

## • Возрастание

Функцию  $y = f(x)$  называют **возрастающей** на множестве  $D(f)$ , если для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  области определения, таких, что  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ .

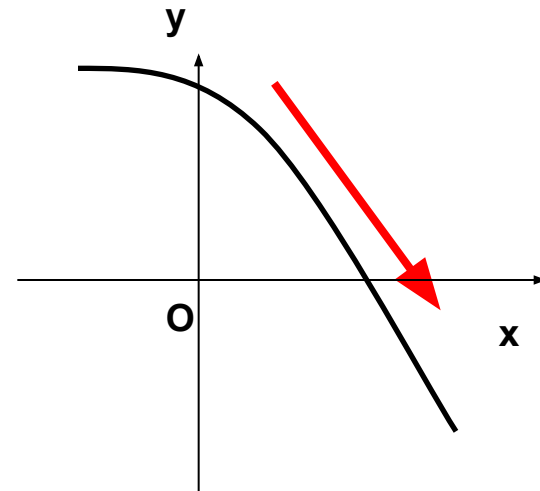
(Если **большему значению** аргумента соответствует **большее значение** функции)



## • Убывание

Функцию  $y = f(x)$  называют **убывающей** на множестве  $D(f)$ , если для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  области определения, таких, что  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ .

(Если **большему значению** аргумента соответствует **меньшее значение** функции)

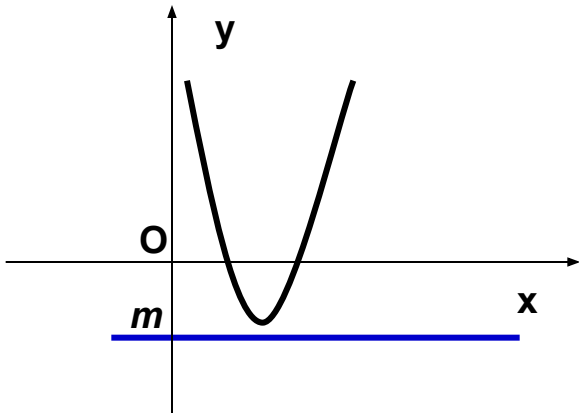


- Термины **«возрастающая»**, **«убывающая»** функция объединяют общим названием **МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ**.

# Ограниченность функции

- Функцию  $y = f(x)$  называют **ограниченной снизу** на множестве  $D(f)$ , если все значения функции на области определения **больше** некоторого числа.

(Если существует число  $m$  такое, что для любого значения  $x$  области определения выполняется неравенство  $f(x) > m$ .)

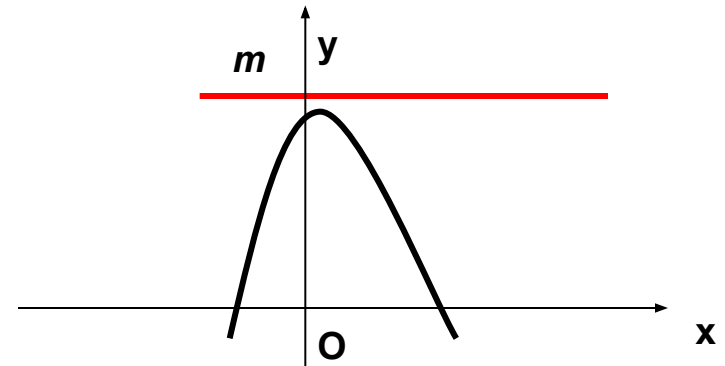


- Если функция **ограничена снизу**, то ее **график** целиком **расположен выше** некоторой горизонтальной **прямой**  $y = m$ .

- Если функция **ограничена и сверху и снизу**, то ее называют **ограниченной**.

- Функцию  $y = f(x)$  называют **ограниченной сверху** на множестве  $D(f)$ , если все значения функции на области определения **меньше** некоторого числа.

(Если существует число  $m$  такое, что для любого значения  $x$  области определения выполняется неравенство  $f(x) < m$ .)



- Если функция **ограничена сверху**, то ее **график** целиком **расположен ниже** некоторой горизонтальной **прямой**  $y = m$ .

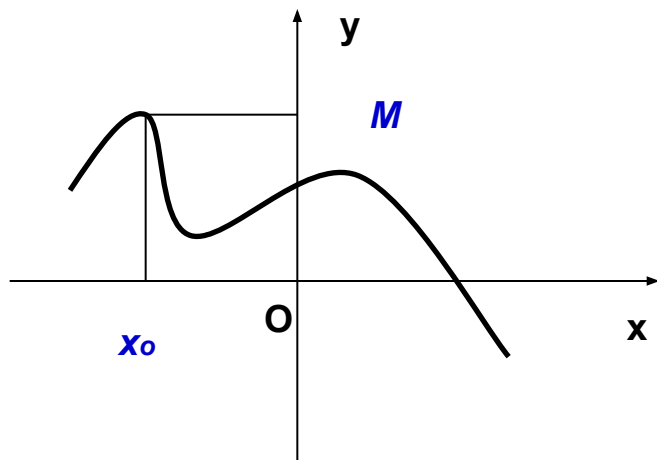


# Наибольшее (наименьшее) значения функции

• Число  $M$  называют **наибольшим** значением функции  $y = f(x)$  на множестве  $D(f)$ , если:

- 1) в области определения существует такая точка  $x_0$ , что  $f(x_0) = M$ ;
- 2) для всех  $x$  из области определения выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$ .

Обозначение:  $y_{\text{наиб.}} = y(x_0) = M$ .

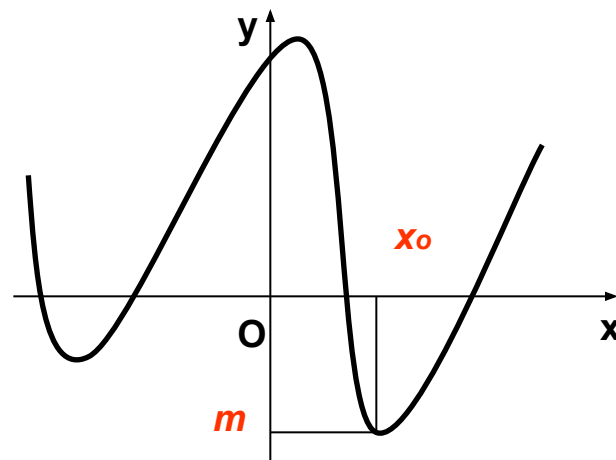


- Если у функции **существует  $y_{\text{наиб.}}$** , то она **ограничена сверху**.
- Если функция **не ограничена сверху**, то  **$y_{\text{наиб.}}$  не существует**.

• Число  $m$  называют **наименьшим** значением функции  $y = f(x)$  на множестве  $D(f)$ , если:

- 1) в области определения существует такая точка  $x_0$ , что  $f(x_0) = m$ ;
- 2) для всех  $x$  из области определения выполняется неравенство  $f(x) \geq f(x_0)$ .

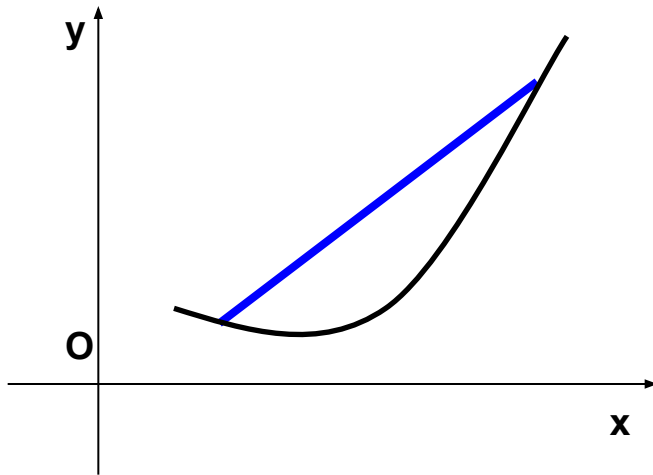
Обозначение:  $y_{\text{наим.}} = y(x_0) = m$ .



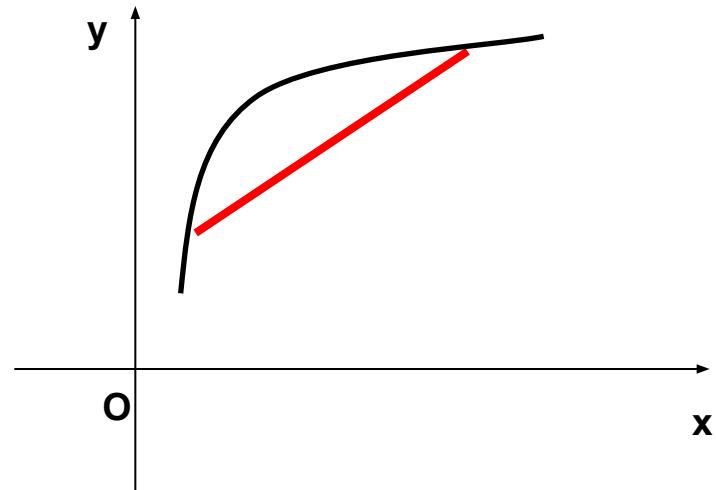
- Если у функции **существует  $y_{\text{наим.}}$** , то она **ограничена снизу**.
- Если функция **не ограничена снизу**, то  **$y_{\text{наим.}}$  не существует**.

## Выпуклость, вогнутость функции

- Функция **выпукла вниз**, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит **ниже** проведенного отрезка.



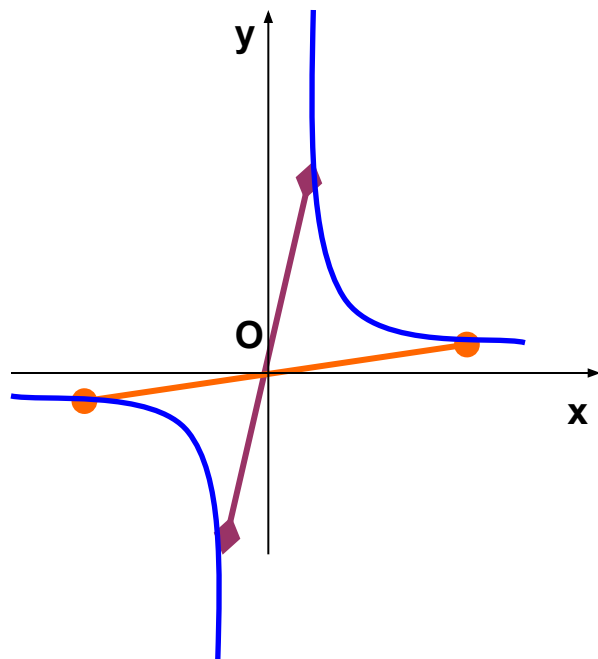
- Функция **выпукла вверх**, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит **выше** проведенного отрезка.



# Четность, нечетность функции

Функция  $y = f(x)$  называют **четной**, если:

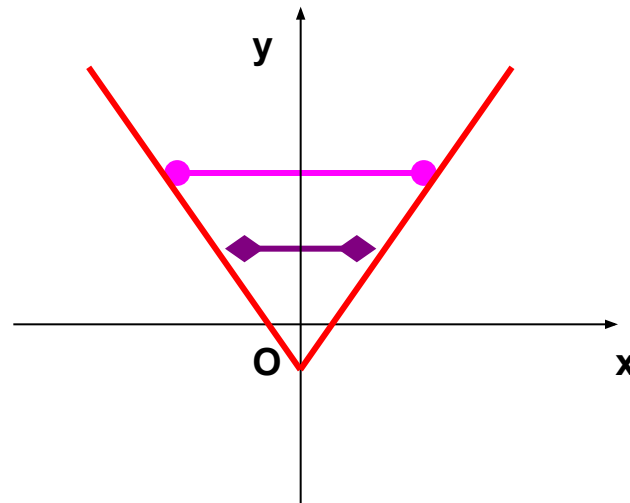
- 1) **Область определения** ее **симметрична** относительно начала координат;
- 2) Для любого  $x$  из  $D(y)$  выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ .



**График симметричен относительно начала координат.**

Функция  $y = f(x)$  называют **нечетной**, если:

- 1) **Область определения** ее **симметрична** относительно **оси ОУ**;
- 2) Для любого  $x$  из  $D(y)$  выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ .



**График симметричен относительно оси ОУ.**

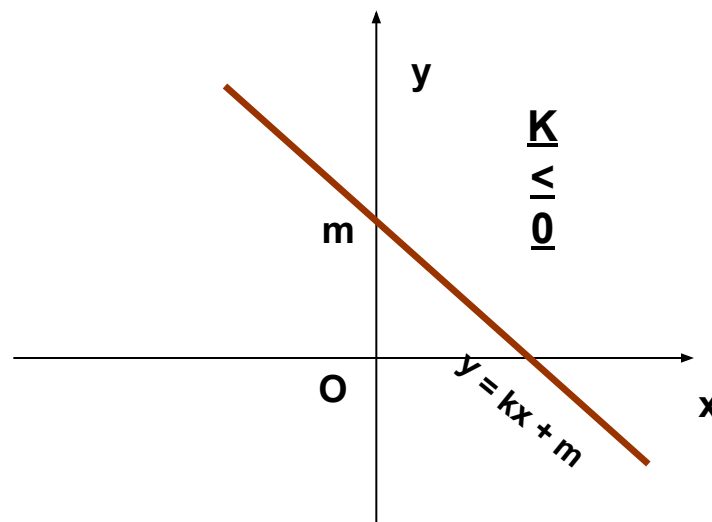
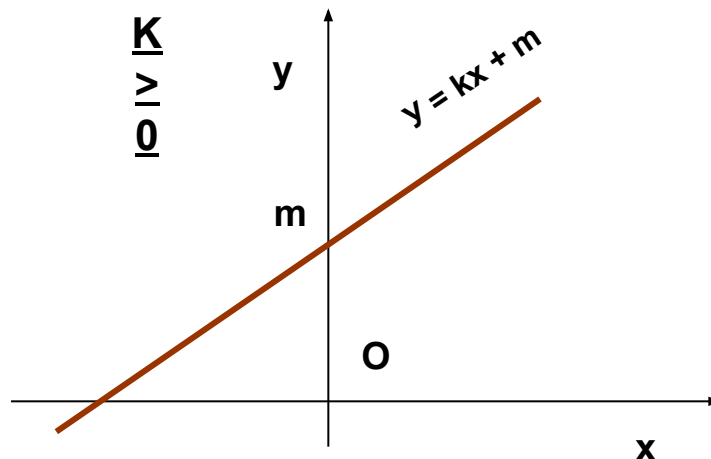
## Алгоритм исследования функции

- Область определения.
- Область значений.
- Четность, нечетность функции.
- Возрастание, убывание функции.
- Ограниченность функции.
- Наибольшее, наименьшее значения функции.
- Непрерывность функции.
- Выпуклость, вогнутость функции.

# Линейная функция

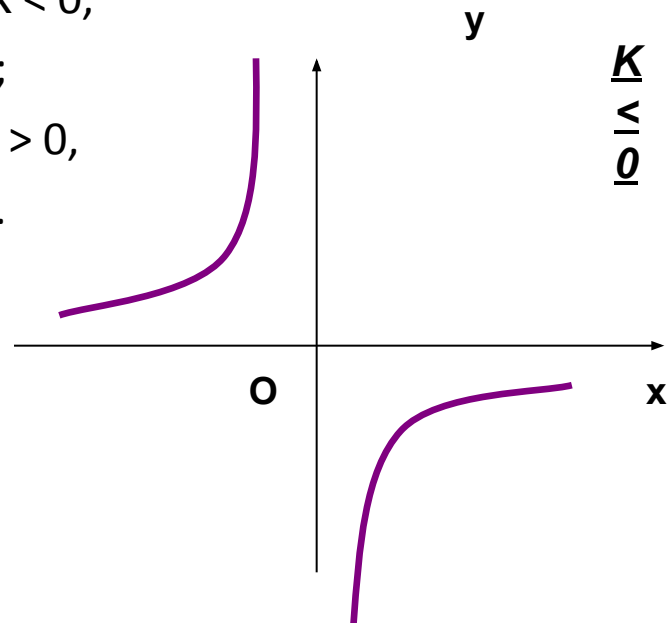
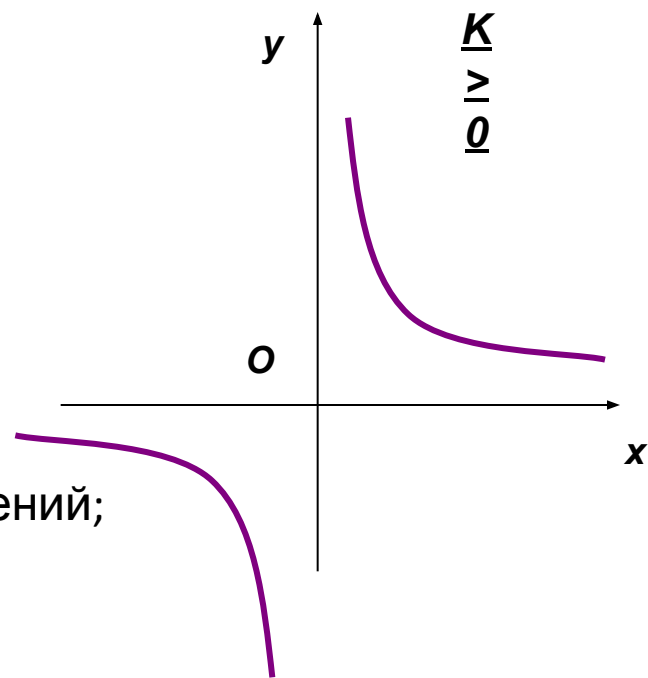
$$y = kx + m (k \neq 0)$$

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
2. Не является ни четной ни нечетной;
3. Если  $k > 0$ , возрастает, если  $k < 0$  убывает;
4. Не ограничена ни снизу, ни сверху;
5. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
6. Функция непрерывна;
7.  $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Не имеет выпуклости.



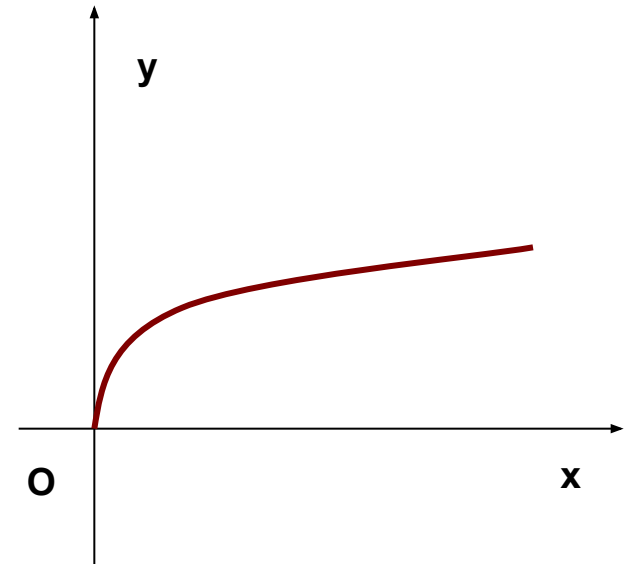
Функция  $y = \frac{k}{x}$

1.  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2. Нечетная функция;
3. Если  $k > 0$ , то функция убывает на  $D(f)$ ,  
если  $k < 0$ , то функция возрастает на  $D(f)$ ;
4. Не ограничена ни сверху, ни снизу;
5. Нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;
6. Функция терпит разрыв в точке  $x = 0$ ;
7.  $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Если  $k > 0$ , то функция выпукла вверх при  $x < 0$ ,  
и выпукла вниз при  $x > 0$ ;  
Если  $k < 0$ , то функция выпукла вверх при  $x > 0$ ,  
и выпукла вниз при  $x < 0$ .



Функция  $y = \sqrt{x}$

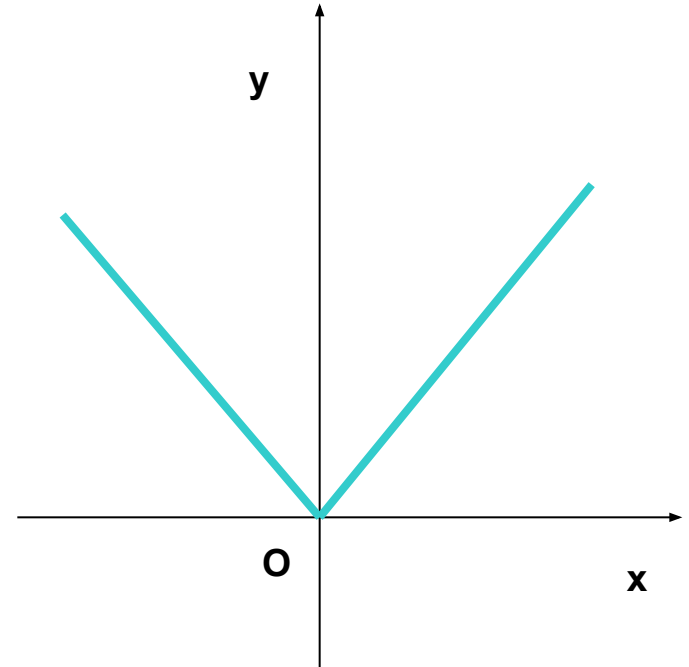
1.  $D(f) = [0; + \infty)$ ;
2. Не является ни четной ни нечетной;
3. Возрастает;
4. Не ограничена ни снизу, ни сверху;
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение 0, при  $x = 0$ ;
6. Функция непрерывна;
7.  $E(f) = [0; + \infty)$
8. Выпукла вверх.



# Функция

$$y = |x|$$

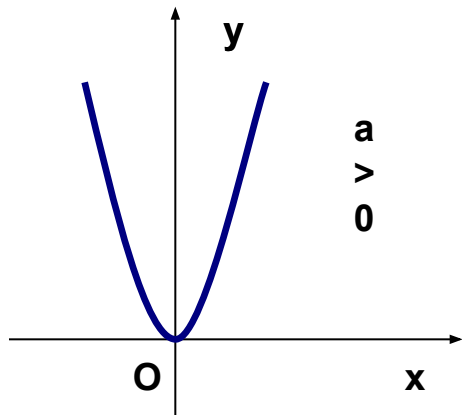
1.  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
2. Функция четная;
3. Возрастает на  $[0; +\infty)$ ;  
убывает  $(-\infty; 0]$
4. Не ограничена сверху,  
ограничена снизу;
5. Наибольшего значения нет,  
наименьшее значение 0, при  $x = 0$ ;
6. Функция непрерывна;
7.  $E(f) = [0; +\infty)$
8. Выпукла вниз.





# Функция $y = ax^2$

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
2. Функция четная;
3. Возрастает на  $[0; +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty; 0]$
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу;
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение 0, при  $x = 0$ ;
6. Функция непрерывна;
7.  $E(f) = [0; +\infty)$
8. Выпукла вниз.



1.  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
2. Функция четная;
3. Убывает на  $[0; +\infty)$ ; возрастает на  $(-\infty; 0]$
4. Не ограничена снизу, ограничена сверху;
5. Наименьшего значения нет, наибольшее значение 0, при  $x = 0$ ;
6. Функция непрерывна;
7.  $E(f) = (-\infty; 0]$ ;
8. Выпукла вверх.

