Функция.
Свойства функции.

План:

- *Определение функции.*
- *Область определения. Область значений.*
- *Способы задания функции.*
- *Возрастание, убывание функции.*
- *Ограниченность функции.*
- *Наибольшее, наименьшее значения функции.*
- *Выпуклость, вогнутость функции.*
- *Четность, нечетность функции.*
- *Элементарные функции, их свойства и графики.*

В ДРЕВНЕМ МИРЕ

Понятие функции уходит своими корнями в ту далекую эпоху, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны.

Чем дольше горит костер, тем теплее будет в пещере.

Чем больше животных удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода

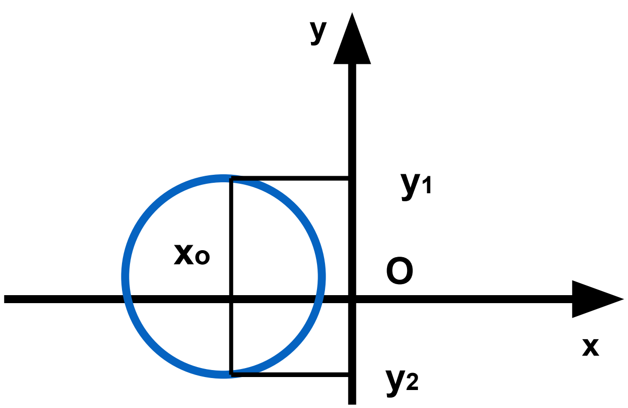
Определение функции

Зависимость между двумя переменными x и y, при котором *каждому* значению переменной *x* соответствует *единственное* значение переменной *y* называют <u>*функцией .*</u>

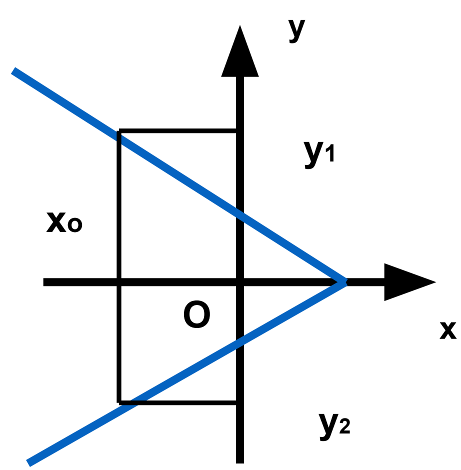
Обозначают <u>***y = f(x),***</u>

где x – независимая переменная (аргумент),

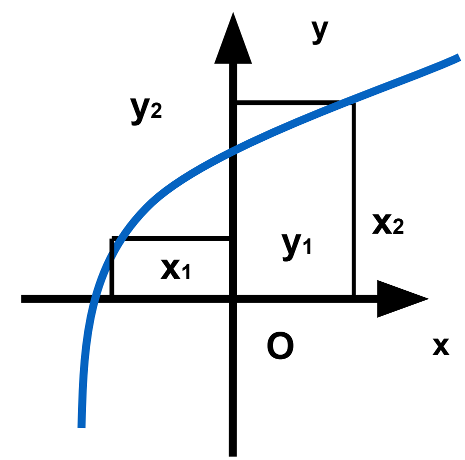
y = f(x) – зависимая переменная (функция).



Не является функцией



Не является функцией



Является функцией

Область определения функции

Множество всех допустимых значений x (аргумента, независимой переменной) при которых выражение имеет смысл.

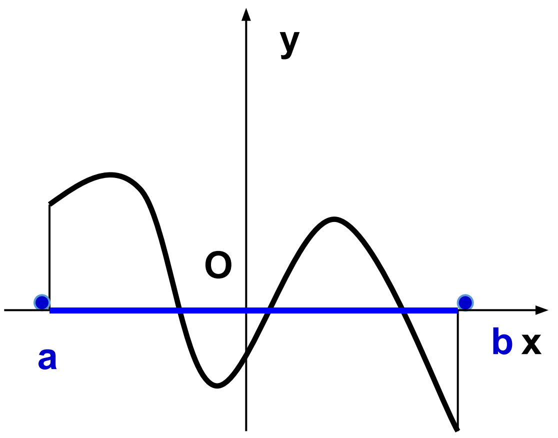
Обозначение: D(f) = [a;b]

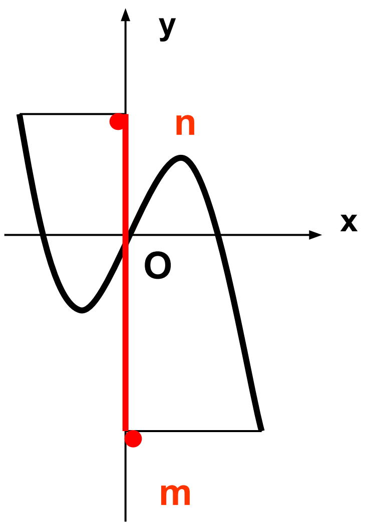
Область значений функции

Множество всех значений функции y = f(x),

где x принадлежит X (области определения).

Обозначение: E(f) = [m;n]





Способы задания функции

Аналитический (формулой)

1) $y = 2x + 5;$

2) $f(x) = \begin{cases} -x, если\, x < -2; \\ 0{,}5x + 3, если\, -2 \le x \le 2; \\ 7 - x, если\, x > 2. \end{cases}$

Описанием (с помощью естественного языка)

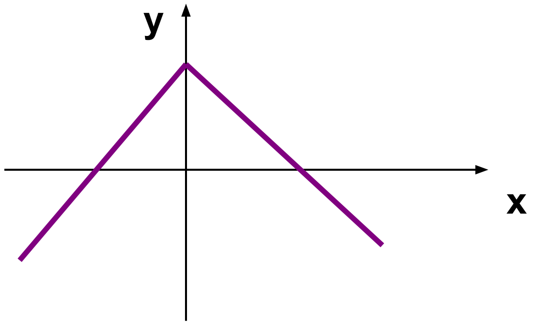
Например:

«Каждому отрицательному числу соответствует – 1, нулю – число 0, а каждому положительному – число 1»

Табличный.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Графический



Свойства функции

- ***Возрастание***

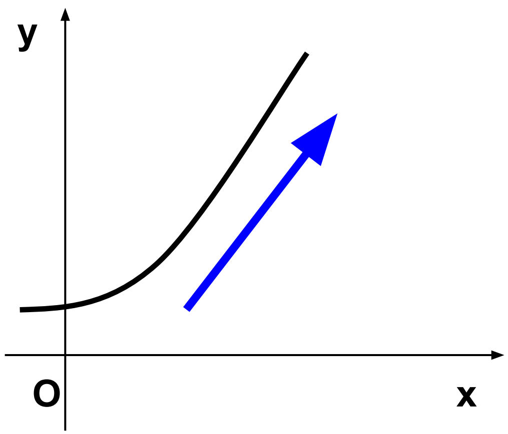
Функцию y = f(x) называют возрастающей на множестве D(f), если для любых двух точек x_1 и x_2 области определения, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

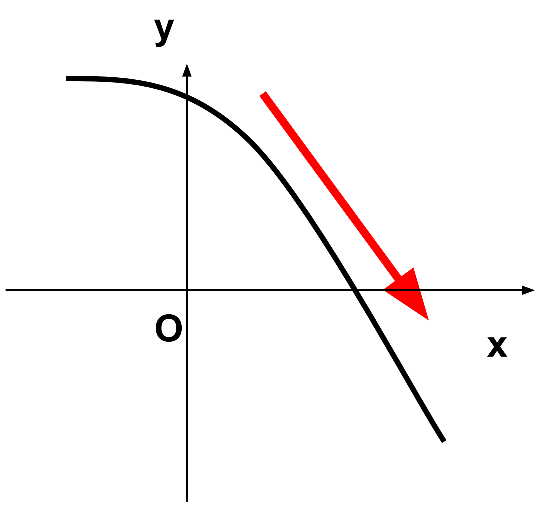
*(Если **большему значению** аргумента соответствует **большее значение** функции)*

- ***Убывание***

Функцию y = f(x) называют убывающей на множестве D(f), если для любых двух точек x_1 и x_2 области определения, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

*(Если **большему значению** аргумента соответствует **меньшее значение** функции)*





- ***Термины «возрастающая», «убывающая» функция объединяют общим названием МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ.***

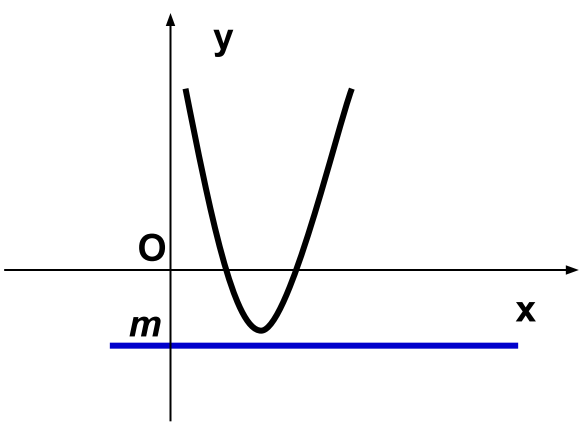
Ограниченность функции

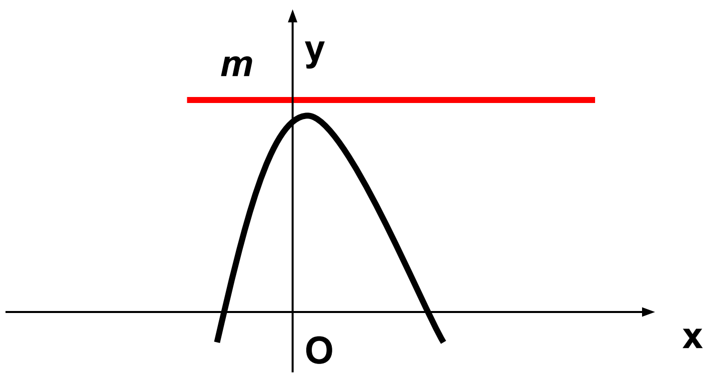
- **Функцию y = f(x) называют *ограниченной снизу* на множестве D(f), если все значения функции на области определения больше некоторого числа.**

*(Если существует число **m** такое, что для любого значения **x** области определения выполняется неравенство **f(x) > m**.)*

- **Функцию y = f(x) называют *ограниченной сверху* на множестве D(f), если все значения функции на области определения меньше некоторого числа.**

*(Если существует число **m** такое, что для любого значения **x** области определения выполняется неравенство **f(x) < m**.)*





- ***Если функция ограничена снизу, то ее график целиком расположен выше некоторой горизонтальной прямой y = m.***

- ***Если функция ограничена сверху, то ее график целиком расположен ниже некоторой горизонтальной прямой y = m.***

- ***Если функция ограниченна и сверху и снизу, то ее называют ограниченной.***

Наибольшее (наименьшее) значения функции

- **Число *M* называют *наибольшим* значением функции y = f(x) на множествеD(f), если:**

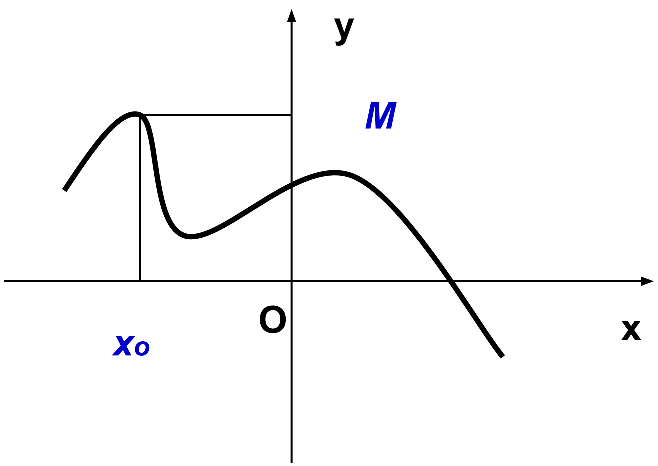
1) **в области определения существует такая точка xo , что $f(x_0) = M$;**
2) **для всех x из области определения выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.**

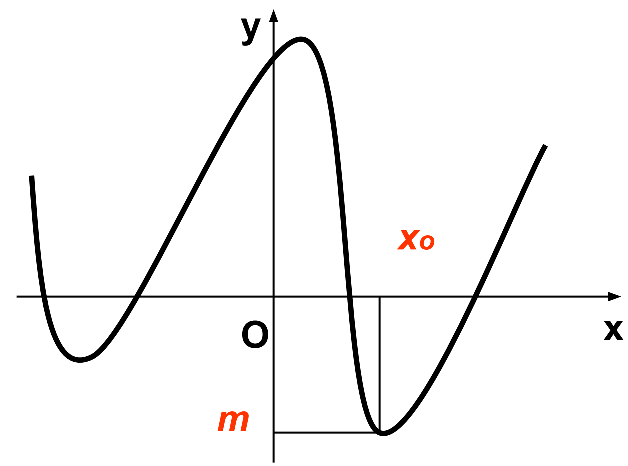
Обозначение*: *y наиб. = y(xo) = M.

- **Число *m* называют *наименьшим* значением функции y = f(x) на множестве D(f), если:**

1) **в области определения существует такая точка xo , что $f(x_0) = m$;**
2) **для всех x из области определения выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.**

Обозначение:* *У наим. = y(xo) = m.



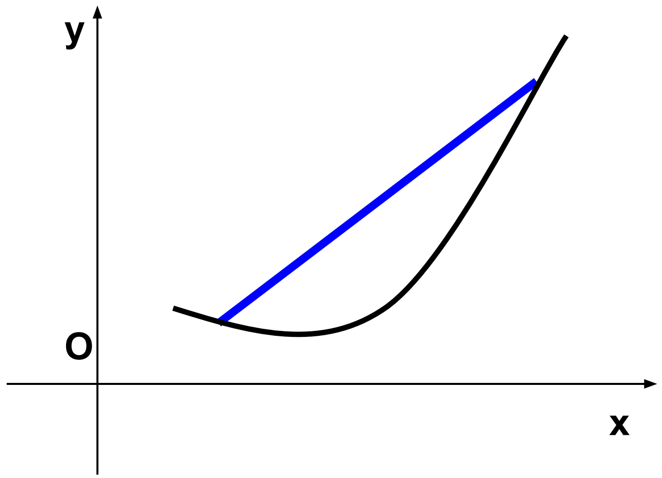


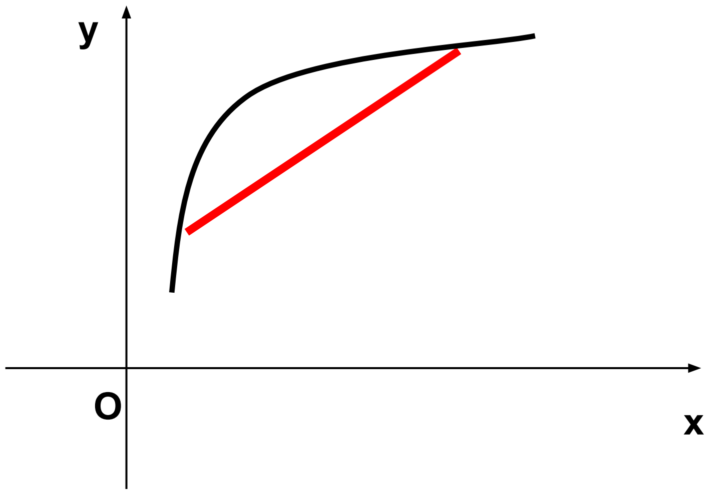
- ***Если у функции существует У наиб., то она ограничена сверху.***
- ***Если функция не ограничена сверху, то У наиб. не существует.***

- ***Если у функции существует У наим, то она ограничена снизу.***
- ***Если функция не ограничена снизу, то У наим. не существует.***

Выпуклость, вогнутость функции

- **Функция *выпукла вниз*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *ниже* проведенного отрезка.**
- **Функция *выпукла вверх*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *выше* проведенного отрезка.**





Четность, нечетность функции

Функция y = f(x) называют *четной,* если:

1)Область определения **ее** **симметрична** **относительно начала координат;**

2)Для любого x из D(y) выполняется равенство ***f(-x) = f(x).***

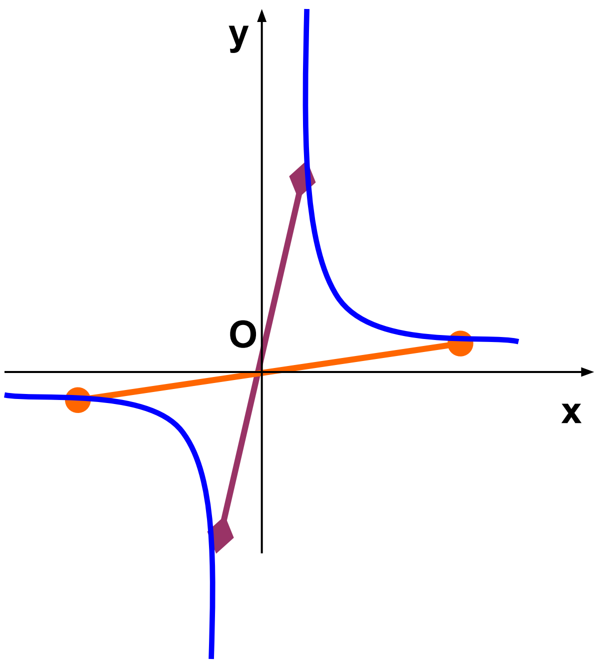


График симметричен относительно начала координат.

Функция y = f(x) называют

нечетной**, если:**

1)Область определения **ее** ***симметрична*** **относительно оси ОУ;**

2)Для любого x из D(y) выполняется равенство ***f(-x) = - f(x).***

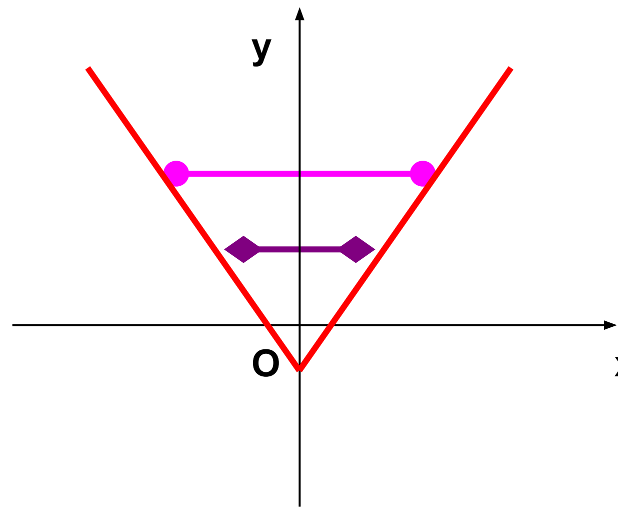


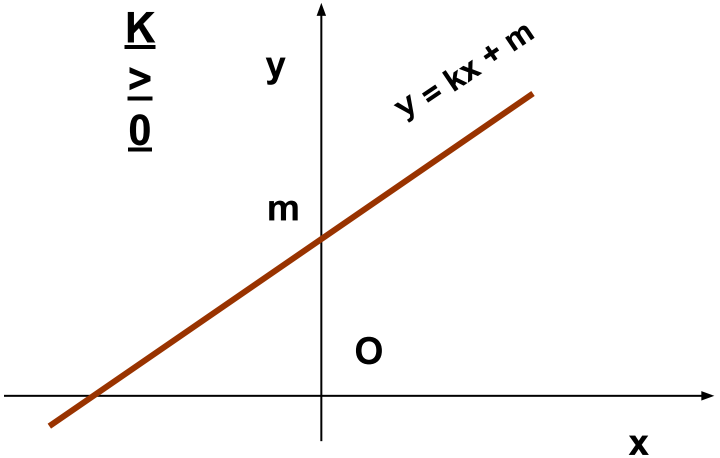
График симметричен относительно оси ОУ.

Алгоритм исследования функции

- *Область определения.*
- *Область значений.*
- *Четность, нечетность функции.*
- *Возрастание, убывание функции.*
- *Ограниченность функции.*
- *Наибольшее, наименьшее значения функции.*
- *Непрерывность функции.*
- *Выпуклость, вогнутость функции.*

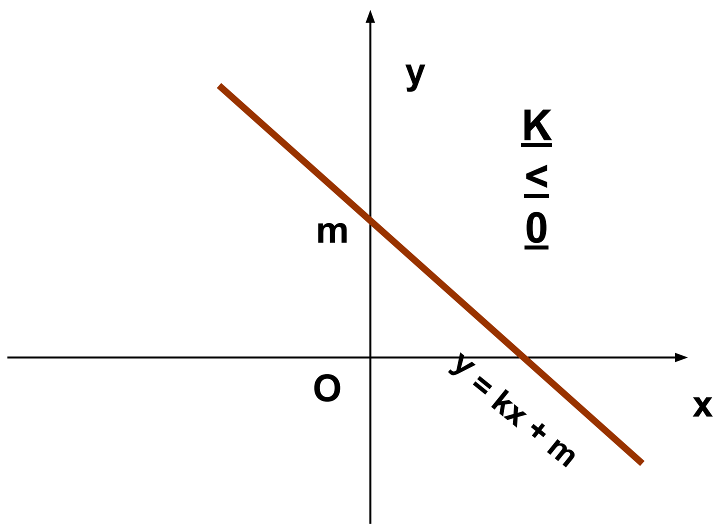
Линейная функция

$$y = kx + m (k \neq 0)$$



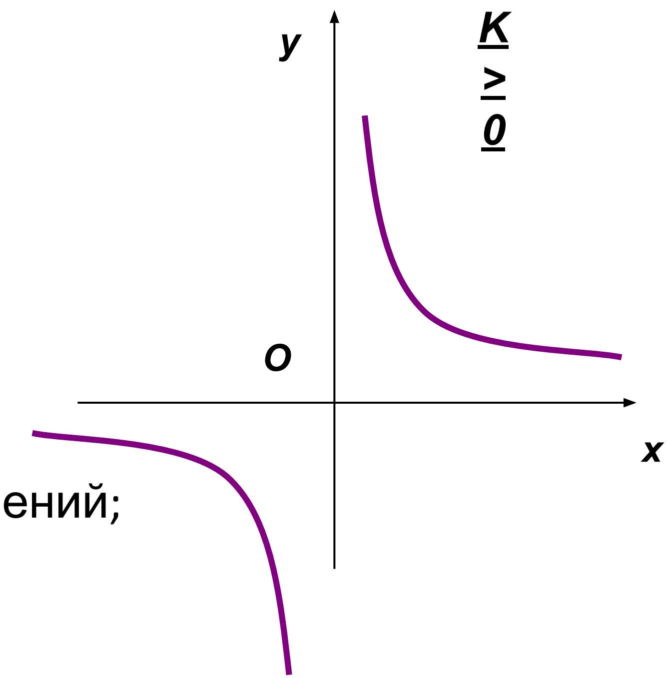
1. D(f) = R;
2. Не является ни четной ни нечетной;
3. Если k > 0, возрастает,

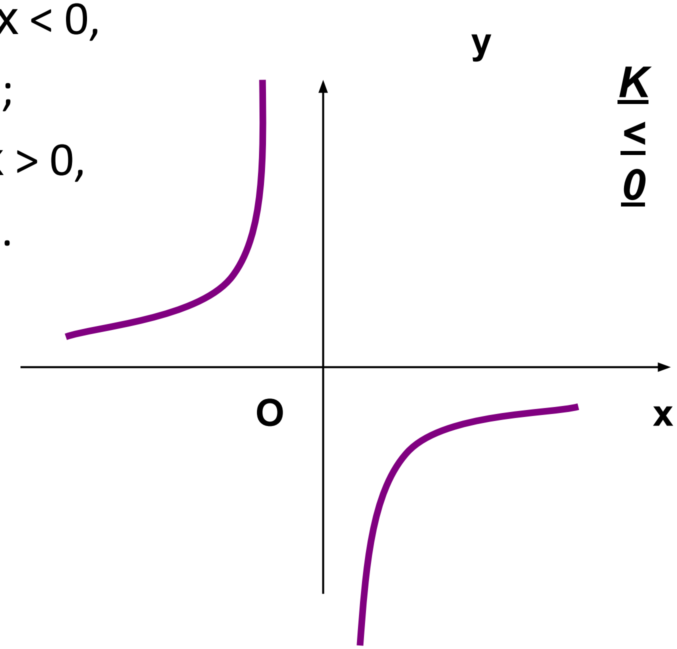
   если k < 0 убывает;
4. Не ограничена ни снизу, ни сверху;
5. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
6. Функция непрерывна;
7. $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Не имеет выпуклости.



Функция $y = \frac{k}{x}$

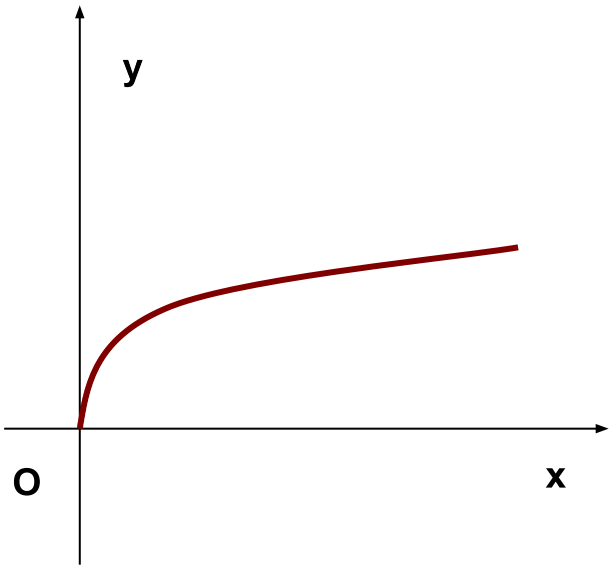
1. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2. Нечетная функция;
3. Если k > 0, то функция убывает на D(f),
   если k < 0, то функция возрастает на D(f);
4. Не ограничена ни сверху, ни снизу;
5. Нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;
6. Функция терпит разрыв в точке x = 0;
7. $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Если k > 0, то функция выпукла вверх при x < 0,
   и выпукла вниз при x > 0;
   Если k < 0, то функция выпукла вверх при x > 0,
   и выпукла вниз при x < 0.





Функция $y=\sqrt{x}$

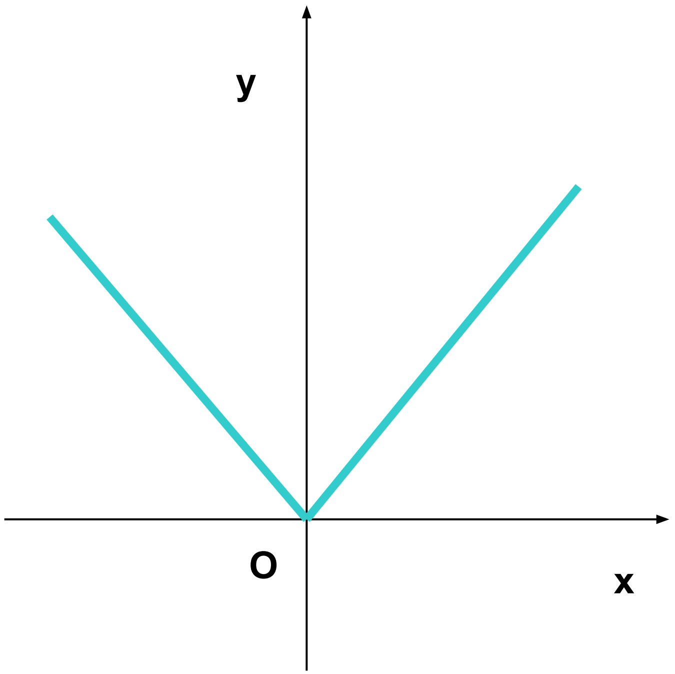
1. D(f) = [0; + ∞);
2. Не является ни четной ни нечетной;
3. Возрастает;
4. Не ограничена ни снизу, ни сверху;
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение 0, при x = 0;
6. Функция непрерывна;
7. E(f) = [0; + ∞)
8. Выпукла вверх.



Функция

$$y = |x|$$

1. D(f) = R;
2. Функция четная;
3. Возрастает на [0; + ∞);
   убывает (- ∞; 0]
4. Не ограничена сверху,
   ограничена снизу;
5. Наибольшего значения нет,
   наименьшее значение 0, при x = 0;
6. Функция непрерывна;
7. E(f) = [0; + ∞)
8. Выпукла вниз.



Функция $y = ax^2$

1. D(f) = R;
2. Функция четная;
3. Возрастает на [0; + ∞); убывает (- ∞; 0]
4. Не ограничена сверху, ограничена снизу;
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение 0, при x = 0;
6. Функция непрерывна;
7. E(f) = [0; + ∞)
8. Выпукла вниз.

1. D(f) = R;
2. Функция четная;
3. Убывает на [0; + ∞); возрастает (- ∞; 0]
4. Не ограничена снизу, ограничена сверху;
5. Наименьшего значения нет, наибольшее значение 0, при x = 0;
6. Функция непрерывна;
7. E(f) = (- ∞; 0];
8. Выпукла вверх.