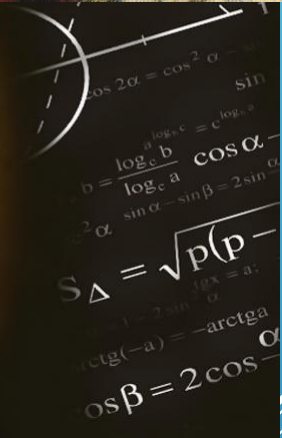
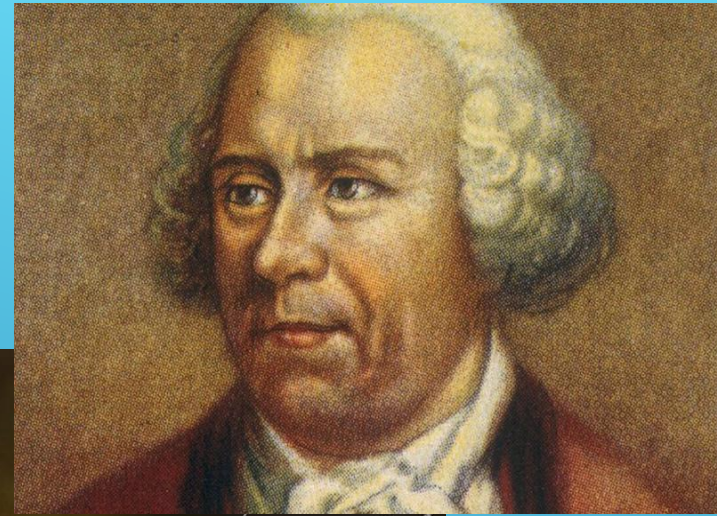
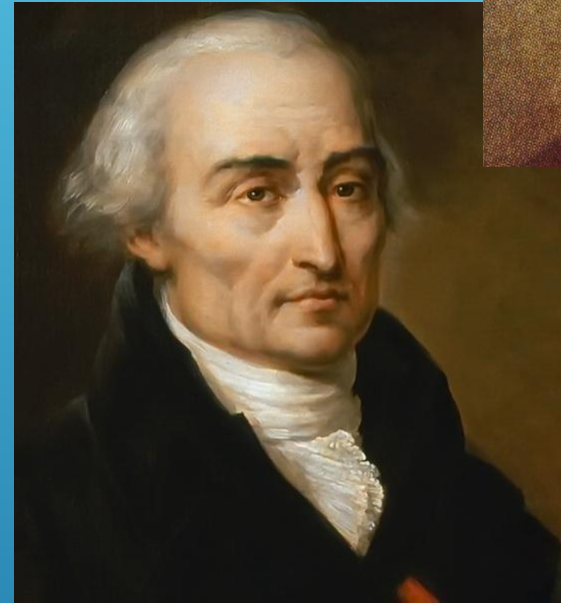


# **МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ В ЗАДАЧЕ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА**

**к.т.н. Котлов Вадим Михайлович  
ГосНИИАС г. Москвы**

**Зарождение динамики неголономных систем, по-видимому, следует отнести к тому времени, когда аналитический формализм, созданный трудами Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, оказался, к всеобщему удивлению, неприменимым к очень простым механическим задачам о качении без проскальзывания твердого тела по плоскости.**

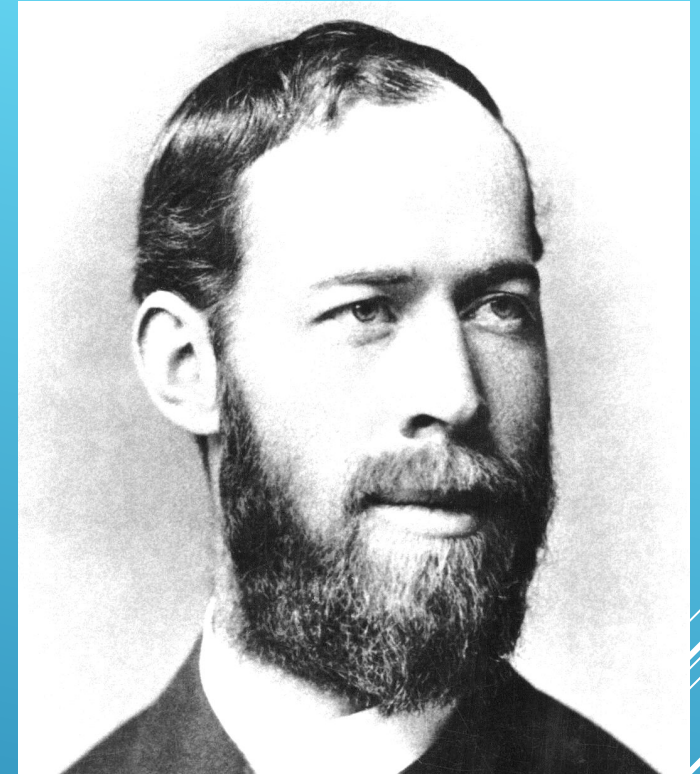


**Только в 1894 г.**

**в книге «Принципы механики,  
изложенные в новой связи»**

**(через 106 лет после труда  
Лагранжа «Аналитическая  
механика» в 1788 году)**

***Генрих Герц* ввел разделение  
связей и механических систем на  
**голономные и неголономные****



•  
**К настоящему времени динамика неголономных систем оформлена как самостоятельная часть общей динамики механических систем-находит широкое применение в задачах современной техники, таких как движения автомобиля, самолетного шасси, железнодорожного колеса.**

**А ее методы активно используются в теории электрических машин**

**Достаточно полное изложение задач и методов неголономной механики представлено в монографии Ю. И.Неймарка, Н.А.Фуфаева "Динамика неголономных**

# УСЛОВИЯ ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ.

Условия (они же ограничения), накладываемые на движение механической системы разделяют как

***потенциальные:***

- накладываются на координаты

$$(1) \quad f[x, y] = 0$$

так и ***кинематические:***

- накладываются на скорости (или компоненты скорости)

$$f[x, y, \dot{x}, \dot{y}] = 0$$

# УСЛОВИЯ ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ.

Задача учета кинематических связей в нелинейном виде не разработана, в **линейном виде** связь относительно **скоростей** выглядит следующим образом:

$$(2) \ a_1 [x, y] \dot{x} + a_2 [x, y] \dot{y} = 0$$

что позволяет эту связь записать через дифференциалы

$$d[x] / d[t] = \dot{x}, \quad d[y] / d[t] = \dot{y},$$

как

$$(3) \ a_1 [x, y] \cdot d[x] + a_2 [x, y] \cdot d[y] = 0$$

# УСЛОВИЯ ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ.

Если дифференциальную связь (3) нельзя записать как полный дифференциал некоторой функции

$$d[F[x,y]] \neq a_1[x,y] \cdot d[x] + a_2[x,y] \cdot d[y]$$

То такая связь называется неинтегрируемой (неголономной), а механическая система с такой связью- **неголономной системой**. Соответственно, система с голономной связью – голономной.

# Метод составления уравнений динамики механической системы при наложении различных типов условий на переменные

Для голономных связей: Лагранжем предложены **два метода:**

1) использование функции связи **как новой переменной-**  
( **приводит к уменьшению общего числа переменных**)

2) **метод «множителей Лагранжа»,**  
(вводит условия через множители Лагранжа, которые физически представляют собой силы, обеспечивающие выполнение этих условий).



## Методы составления уравнений динамики механической системы при наложении различных типов условий на переменные

**СЧИТАЕТСЯ** что, **неголономные связи** допускают лишь второй способ составления уравнений динамики-метод множителей Лагранжа.

**ПОЛАГАЕТСЯ**, что уменьшение числа переменных здесь невозможно, потому что нет уравнений, с помощью которых можно бы выразить одни переменные через другие и приходится оперировать с большим количеством переменных, чем того требует число степеней свободы системы

# НОВЫЙ МЕТОД

Однако, способ уменьшения числа переменных вводя кинематические условия как новые переменные давно предложен А. Пуанкаре и Э. Картаном.

Картаном введена математическая конструкция , названная им *интегральный инвариант динамики второго порядка (либо тензор "количество движения- энергии")*

# НОВЫЙ МЕТОД

Указанное выражение получается совершенно естественно при вычислении вариации интеграла действия Гамильтона.

В современных обозначениях:

$$d\Omega = d[x_1] \wedge d[x] - d[H] \wedge d[t]$$

где

$\wedge$ - внешнее умножение дифференциалов

$x$ - координата

$x_1$ - скорость,

$H=T+U$ - гамильтониан,

$t$ - время

# НОВЫЙ МЕТОД

**Поскольку из этого дифференциального инварианта следует система уравнений движения - любой механической системы, а сам дифференциальный инвариант состоит из дифференциальных форм, то введение ограничений, как на сами кинематические переменные, так на их дифференциалы могут быть проведены в рамках самого интегрального инварианта**

# НОВЫЙ МЕТОД

В случае использования интегрального инварианта механики по Картану, введение ограничений на переменные механической системы (как **голономные**, так и **неголономные**) приводит к уменьшению числа независимых переменных.

**Таким образом**, применение интегрального инварианта механики соответствует способу введения ограничений на переменные, как новых переменных, приводящее к уменьшению числа степеней свободы механической системы, что соответствует методу Лагранжа по замене переменных.



# Динамика упругого кольца описывается функцией

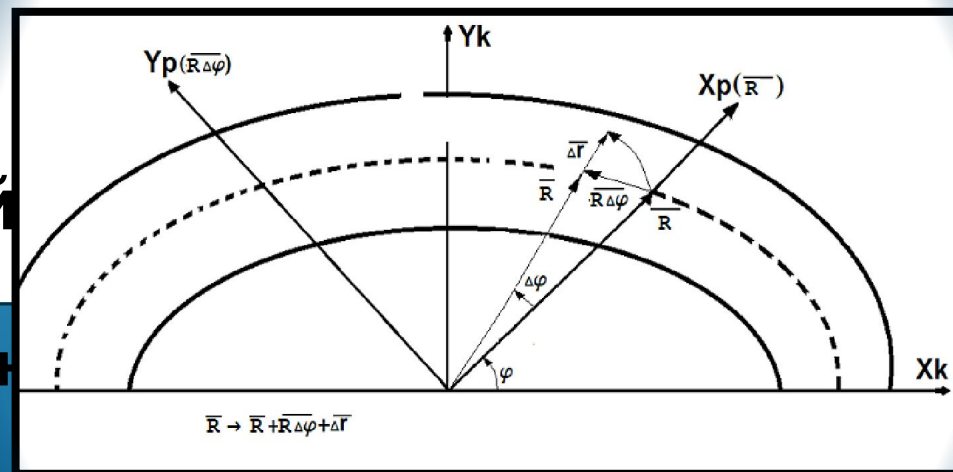
Лагранжа  $L$  :

$$L = \frac{1}{2} \left( (v_1 + (R-w) \Omega)^2 + (w_1 + v \Omega)^2 \right) - \frac{1}{2} \kappa l^2 (w_{ss} + v_s)^2 - \frac{1}{2} \delta l^2 (v_s - w)^2$$

при наложении условия нерастяжимости средней линии кольца:

$$(v_s + R - w)^2 + (w_s + v)^2 = R^2$$

где,  $(w, v)$ -деформации кольца вдоль радиуса и образующей  $(w_1, v_1, s)$ -скорость их изменений по времени и по коор. соответствен



# Новые соотношения для гибкого кольца

Если пренебречь потенциальной энергией, то эффект инертных свойств упругой деформацией гибкого кольца следует из оставшейся кинематической энергии:

$$L = 1/2 \left( (v_1 + (R-w) \Omega)^2 + (w_1 + v \Omega)^2 \right)$$

Если не пренебрегать потенциальной энергией, то **новый метод** даст следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d[SID]_{us} = & 1/\Omega^2 \left( 1/2 d[\Omega^2 r\psi^2 + \Omega^2 v\psi^2] - ((R+r)^2 + v^2) \right. \\ & d[\Omega^2/2] \big) \wedge d[\psi] \wedge d[\varphi] + \kappa l^2 d[r+rss] \wedge (d[R \ Q] - (r+rss) \\ & d[\varphi]) \wedge d[t] = 0 \end{aligned}$$



Анализ приближений условий нерастяжимости средней линии на основе НОВОЙ формы нерастяжимости:

$$vs + R - w \rightarrow R \cos [Q], \quad -ws - v \rightarrow R \sin [Q]$$

приводит, к тому, что изменение потенциальной энергии

$$\Pi_2 = 1/2 \quad \kappa l^2 \quad (-rss + vs)^2$$

не происходит; остается только влияние кинетической энергии, искаженной условием нерастяжимости:

$$1/2 \quad d [\Omega^2 \quad r\psi^2 + \Omega^2 \quad v\psi^2] - ((R+r)^2 + v^2) \quad d [\Omega^2 / 2] = 0$$

Таким образом, получено **уравнение** для **гибкого кольца**, моделирующее ВТГ.

## ВЫВОД

**Эффект инертных свойств упругой деформацией гибкого кольца следует из уравнений кольца и в случае когда потенциальной энергией можно пренебречь.**

**В рамках приближений, введенных авторами книги, влияние нерастяжимости средней линии гибкого кольца приводит к пренебрежению изменениями потенциала, остается только влияние кинетической энергии, искаженной условием нерастяжимости, которое удовлетворяет уравнению:**

# ВЫВОД

$$1/2 d[\Omega^2 r^2 + \Omega^2 v^2] - ((R+r)^2 + v^2) d[\Omega^2/2] = 0$$

или

$$((R+r)^2 + v^2) d[\Omega^2/2] = 1/2 d[r^2 + v^2]$$

подобному уравнению термодинамики :

$$T dS = dU + P dV$$

$$T dS = dQ - \text{поток тепла}$$

$$d[S] = dQ/T$$

где

$\Omega^2/2$ -подобна энтропии,  $(r^2 + v^2)$ -подобна температуре

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Картан Э.Д. Интегральные инварианты М.: 1922 г.
2. Суслов Г.К. Теоретическая механика, (издание 3), М : Л : ГИТТЛ, 1946 г.
- 3.. Чаплыгин С.А. Исследования по динамике НЕГОЛОНОМНЫХ систем, М.:1949 г.
4. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем, М.: 1967 г.
5. Журавлёв В.Ф., Розенблат Г.М. Теоретическая механика в решениях задач ( из сборника Мещерского И.В. Системы с качением. Неголономные связи), М.: 2009 г.
6. Журавлев В.Ф. , Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп, М.: 1985 г.

Котлов Вадим Михайлович  
vadimkot366@yandex.ru

