

# *Решение иррациональных уравнений с параметром.*



## Решение иррационального уравнения

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

Зависит от четности натурального числа  $n$ :

- если  $n$  – **четное**, то есть  $n=2k$ , где  $k$  – натуральное число, то данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$$

- если  $n$  – **нечетное**, то есть  $n=2k+1$ , где  $k$  – натуральное число, то данное уравнение равносильно уравнению:

$$f(x) = g^{2k+1}(x)$$

**Пример 1.** Решить уравнение относительно  $x$

$$\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$$

**Решение:** исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ (a - 2)x = 1 + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x = \frac{1 + 2a}{a - 2}, \\ a \neq 2. \end{cases}$$

Найдем  $a$ , при которых  $\frac{1 + 2a}{a - 2}$  больше  $-1$ , т.е. решим неравенство

$$\frac{1 + 2a}{a - 2} \geq -1 \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)$$

**Ответ:**  $\forall a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty) \quad x = \frac{1 + 2a}{a - 2}$

$\forall a \in \left(\frac{1}{3}; 2\right]$  - решений нет.

**Пример 2.** При каких  $a$  уравнение имеет единственный корень?

$$\sqrt{x+3} = 2x - a$$

**Решение:** исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x - a \geq 0 \\ x + 3 = 4x^2 - 4ax + a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{a}{2} \\ 4x^2 - (4a + 1)x + a^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, если:

$$\begin{cases} D = 0 \\ f\left(\frac{a}{2}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4a + 1)^2 - 16(a^2 - 3) = 0 \\ 4 \cdot \frac{a^2}{4} - (4a + 1) \cdot \frac{a}{2} + a^2 - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{49}{8} \\ a > -6 \end{cases}$$

**Ответ:** при  $a = -\frac{49}{8}$  или  $a > -6$  данное уравнение имеет

единственный корень.

**Пример 3.** При каких  $a$  уравнение  $\sqrt{x+2a+1} = a + \frac{x}{4}$  имеет два корня?

**Решение:** исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a + \frac{x}{4} \geq 0 \\ x + 2a + 1 = a^2 + \frac{ax}{4} + \frac{x^2}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4a \\ x^2 + 8(a-2)x + 16a^2 - 32a - 16 = 0 \end{cases}$$

Данная система имеет два решения, если:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-4a) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16(a-2)^2 - 16a^2 + 32a - 16 > 0 \\ 16a^2 + 8(-4a)(a-2) + 16a^2 - 32a + 16 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -32a + 80 > 0 \\ 32a - 16 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < \frac{5}{2} \\ a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Ответ:** при  $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$  данное уравнение имеет два корня.