Решение иррациональных уравнений с параметром.

Решение иррационального уравнения

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

Зависит от четности натурального числа *n*:

- если n – ***четное***, то есть n=2k, где k – натуральное число, то данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$$

- если n – ***нечетное***, то есть n=2k+1, где k – натуральное число, то данное уравнение равносильно уравнению:

$$f(x) = g^{2k+1}(x)$$

Пример 1. Решить уравнение относительно *x*

$$\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$$

Решение: исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ (a-2)x = 1 + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x = \dfrac{1+2a}{a-2}, \\ a \neq 2. \end{cases}$$

Найдем *a*, при которых $\dfrac{1+2a}{a-2}$ больше -1, т.е. решим неравенство

$$\frac{1+2a}{a-2} \geq -1 \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $\forall a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)$ $\quad x = \dfrac{1+2a}{a-2}$

$\forall a \in \left(\frac{1}{3}; 2\right]$ - решений нет.

Пример 2. При каких *a* уравнение $\sqrt{x+3} = 2x - a$ имеет единственный корень?

Решение: исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x - a \ge 0 \\ x + 3 = 4x^2 - 4ax + a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{a}{2} \\ 4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, если:

$$\left[\begin{array}{l} D = 0 \\ f\left(\dfrac{a}{2}\right) < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (4a+1)^2 - 16(a^2 - 3) = 0 \\ 4 \cdot \dfrac{a^2}{4} - (4a+1) \cdot \dfrac{a}{2} + a^2 - 3 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{49}{8} \\ a > -6 \end{array}\right.$$

Ответ: при $a = -\dfrac{49}{8}$ или $a > -6$ данное уравнение имеет единственный корень.

Пример 3. При каких а уравнение $\sqrt{x+2a+1}=a+\frac{x}{4}$ имеет два корня?

Решение: исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a+\frac{x}{4}\ge 0 \\ x+2a+1=a^2+\frac{ax}{4}+\frac{x^2}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4a \\ x^2+8(a-2)x+16a^2-32a-16=0 \end{cases}$$

Данная система имеет два решения, если:

$$\begin{cases} D>0 \\ f(-4a)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16(a-2)^2-16a^2+32a-16>0 \\ 16a^2+8(-4a)(a-2)+16a^2-32a+16>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -32a+80>0 \\ 32a-16>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<\dfrac{5}{2} \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: при $a \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ данное уравнение имеет два корня.