Линейная алгебра

Лекция 1а

Агаев Рафиг Пашаевич
(д.ф.-м.н.)

Векторы и матрицы

- Алгебраические свойства векторов. Геометрическая интерпретация векторов и операции с векторами. Линейная зависимость.
- Произведение двух векторов. Длина вектора. Угол между векторами.
- Экономический пример (пример с двумя предприятиями).
- Векторное представление экономических данных и операции с ними.
- Определение матрицы. Операции с матрицами. Типы матриц. След матрицы. Транспонирование матрицы. Ранг матрицы. Произведение матриц. Произведение Кронекера матриц.
- Элементарные матричные преобразования.
- Приведение матрицы к ступенчатому виду. Снова о ранге матрицы
- Задачи

Векторы. Обозначения

- ! Для изложения некоторых примеров мы приводим понятие вектор, к которому мы еще раз вернемся при описании векторного пространства.
- Вектором называют набор из n (упорядоченных) чисел:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

x_i – компоненты вектора. Предполагаем, что компоненты – действительные числа, но могут быть и комплексными.

Часто при матричных операциях вектор обозначают в виде столбца:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

Однако для простоты записи часто используется строчное представление.

Если $\mathbf{x}$ содержит одну компоненту, то это – скаляр.

Пример. Экономическую единицу можно определить вектором

EU = (выпуск, число сотрудников, основной капитал, прибыль).

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство, множество всевозможных n-мерных векторов.

- Два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты: $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i = y_i,\ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.
- $\mathbf{x} > \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i > y_i,\ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.

Векторы и их свойства.

- Заметка. Из $\mathbf{x} \ngtr \mathbf{y}$ не следует $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$.

Например, если **x**=(1, 0) и **y**=(0, 1).

Нулевой вектор **0**=(0,…,0).

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - неотрицательный ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$), если $x_i \geq 0, \ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - положительный ($\mathbf{x} > \mathbf{0}$), если $x_i > 0, \ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$
- $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

Векторы и их свойства

- 1a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (коммутативность).

1b) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (ассоциативность).

1c) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.

1d) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

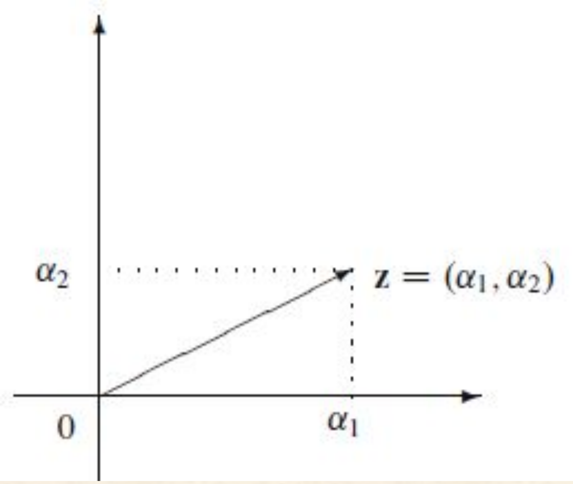
2a) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

2b) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = \lambda\mu\mathbf{x}$.

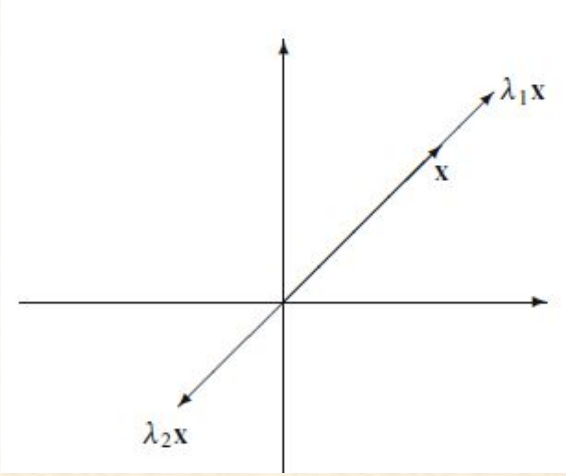
3a) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\boldsymbol{x}$.

3b) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\boldsymbol{y}$.

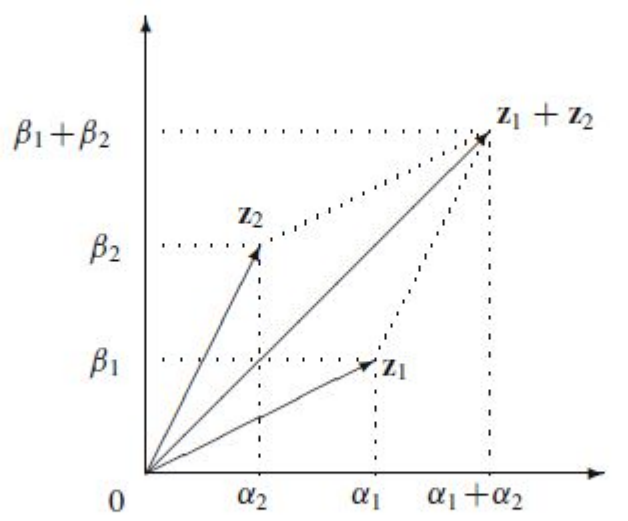
Геометрическая интерпретация векторов и операции с ними



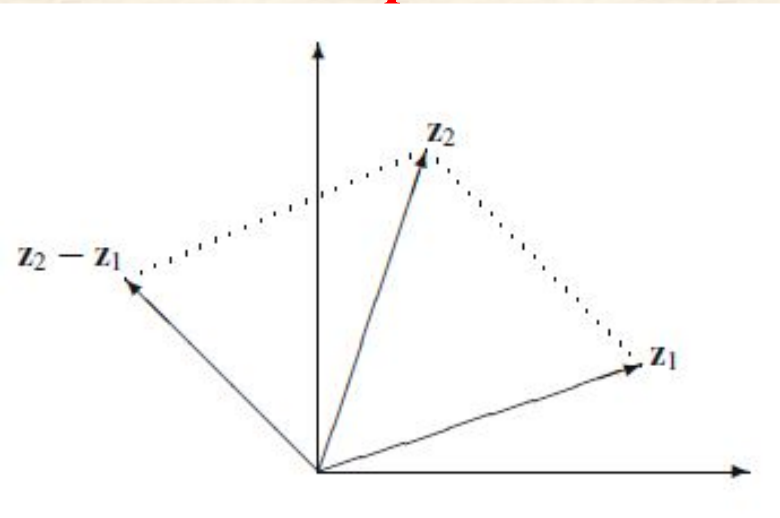
представление вектора на плоскости



умножение вектора на скаляр



сумма двух векторов



разность двух векторов

Линейная зависимость векторов

- Определение. Пусть $\boldsymbol{z_1}, \ldots, \boldsymbol{z_s} \in \mathbb{R}^n$. Если существуют действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, не все равные нулю, для которых имеет место

$$\boldsymbol{z_1}\lambda_1 + \cdots + \boldsymbol{z_s}\lambda_s = 0,$$

то векторы $\boldsymbol{z_1}, \ldots, \boldsymbol{z_s}$ называют **линейно зависимыми**.

Векторы $\boldsymbol{z_1}, \ldots, \boldsymbol{z_s}$ - **линейно независимые**, если из $\boldsymbol{z_1}\lambda_1 + \cdots + \boldsymbol{z_s}\lambda_s = 0$ следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 0$.

Пример. Векторы $\mathbf{a} = (1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{b} = (4,\ 5,\ 6)$, $\mathbf{c} = (7\ ,8, 9)$ линейно зависимы. Поскольку $1\mathbf{a} - 2\boldsymbol{b} + 1\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$.

Векторы $\mathbf{a} = (1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{b} = (0,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{c} = (0,\ 0,\ 1)$ - линейно независимы. **Проверьте!**

Теорема о лин. зависимости

Определение. Вектор **a** называется лин. комбин. векторов $\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b}_s$, если его можно представить как

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b_1} + \dots + \alpha_s \mathbf{b}_s, \qquad (1)$$

где α_s - действительные числа.

Теорема 1. Если векторы $\boldsymbol{z_1}, \dots, \boldsymbol{z_s}$ линейно зависимые, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. Векторы, один из которых является линейной комбинацией остальных , - линейно зависимы.

Доказательство. Если векторы $\boldsymbol{z_1}, \dots, \boldsymbol{z_s}$ линейно зависимые, тогда

$$\lambda_1 \boldsymbol{z_1} + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{z_s} = 0,$$

и хотя бы для одного i, $1 \le i \le s, \lambda_i \ne 0$.

$$\lambda_i \boldsymbol{z_i} = -\lambda_1 \boldsymbol{z_1} - \lambda_2 \boldsymbol{z}_2 - \cdots - \lambda_{i-1} \boldsymbol{z_{i-1}} - \lambda_{i+1} \boldsymbol{z_{i+1}} - \cdots - \lambda_s \boldsymbol{z_s}$$

и

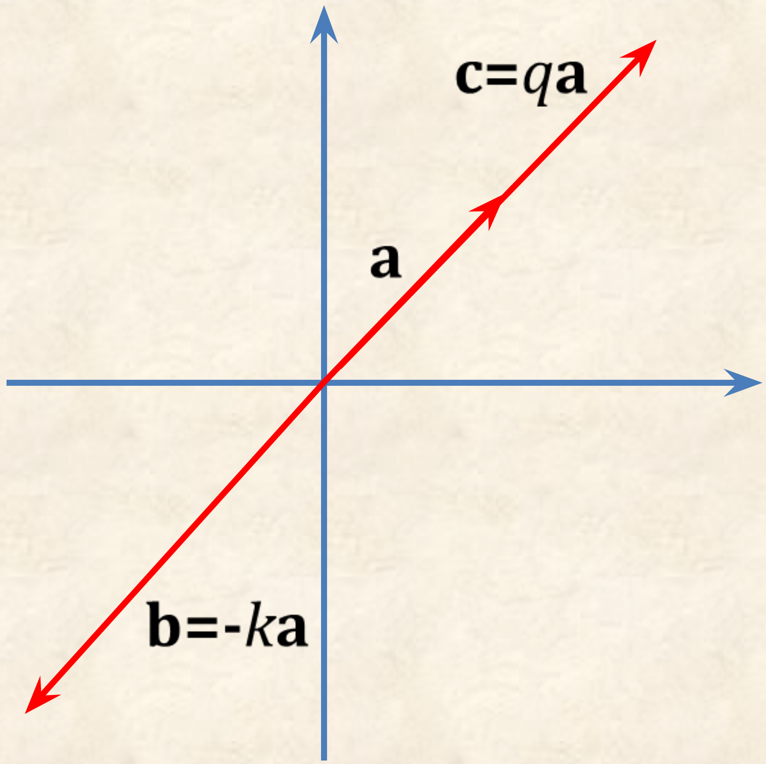
$$\boldsymbol{z_i} = \mu_1 \boldsymbol{z_1} + \mu_2 \boldsymbol{z}_2 + \cdots + \mu_{\boldsymbol{i-1}} \boldsymbol{z_{i-1}} + \mu_{i+1} \boldsymbol{z_{i+1}} + \cdots + \mu_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{z_s},$$

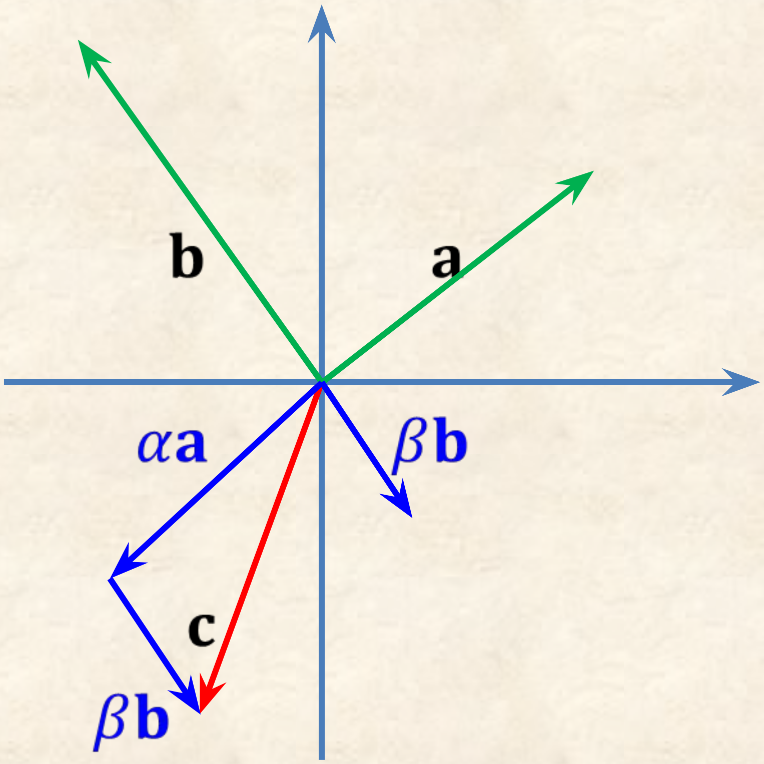
$\mu_j = -\lambda_j / \lambda_i$, для всех $j \ne i$.

Для доказательства второго утверждения достаточно в (1) вектор **a** перенести в правую часть равенства.

План лекции 1

-





векторы **a**, **b, c** лин. зависимы

$k>0$, $q>0$.

векторы **a** и **b** лин. независимы

векторы **a**, **b, c** лин. зависимы

$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

Скалярное произведение векторов

- Определение. **Скалярное произведение** двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ обозначается через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и определяется следующим образом:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Пример. **a**=(1, 2, 0), **b**=(-2, 3, 1).

Тогда $(\mathbf{a},\mathbf{b})=1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 4.$

Пример. В хозяйстве используется n товаров. Пусть **p** - вектор цен на эти товары, а **q** - вектор объемов товаров. Тогда совокупные расходы можно получить скалярным произведением этих двух векторов (**p**, **q**).

Свойства скалярного произведения.

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
2. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ и из $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ следует $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $(\lambda\, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \lambda \in \mathbb{R}$.
4. $(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x_1}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x_2}, \mathbf{y})$.

Длина вектора и угол между двумя векторами

- **Определение.** Длина вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ в определяется как $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ и обозначается через $|\mathbf{x}|$. Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, то

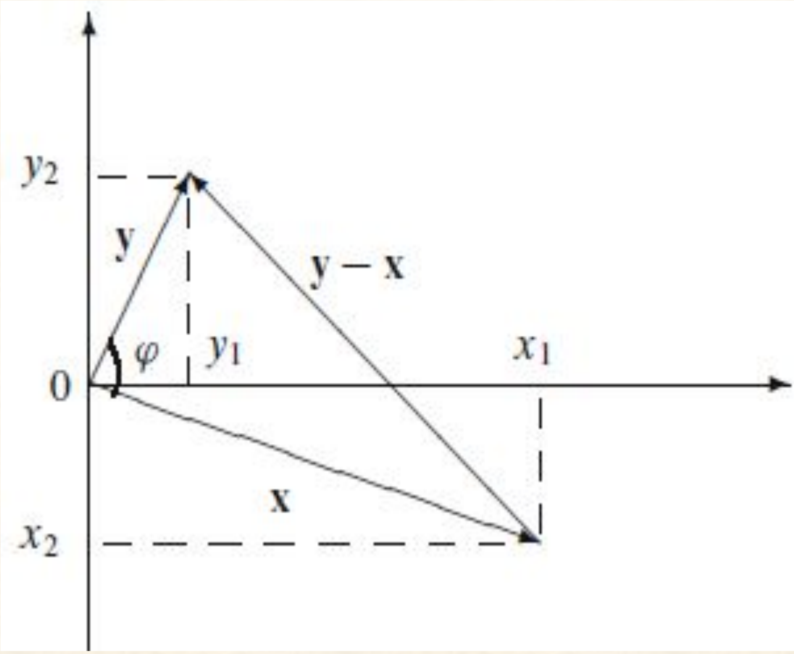
$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

Угол φ между двумя ненулевыми векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ определяется как

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}, \qquad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Угол между двумя векторами на плоскости

•



Согласно теореме косинусов,
$|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2 - 2|\mathbf{y}||\mathbf{x}|\cos\varphi$

или же

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = y_1^2 + x_1^2 + y_2^2 + x_2^2 - 2\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\cos\varphi.$$

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}.$$

Продолжение

- Определение. 1) Два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ параллельны ($\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$), если они линейно зависимы: $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

2) Два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$, т.е. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Ортогональность векторов обозначают как $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Теорема 2. Если два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, то

$$|\mathbf{y} + \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2.$$

Действительно, поскольку для орт. векторов $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$|\mathbf{y} + \mathbf{x}|^2 = (\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{2}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2.$$

Теорема 2'. (Следствие из теоремы 2). Для попарно ортогональных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ верно

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y} + \cdots + \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + \cdots + |\mathbf{z}|^2.$$

Заметка. Из $-1 \leq \cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|x||y|} \leq 1$, следует **неравенство Коши**:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq |\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Продолжение

- Вопрос? Почему $-1 \le \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \le 1$?

Ответ. Пусть k – вещественное число. Тогда

$(\mathbf{x} - k\mathbf{y}, \mathbf{x} - k\mathbf{y}) \ge \mathbf{0}$,

$$k^2(\mathbf{y},\mathbf{y}) - 2k(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{x}) \ge 0. \qquad (1)$$

Дискриминант квадр. уравнения

$$k^2(\mathbf{y},\mathbf{y}) - 2k(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$$

согласно неравенству (1) не может быть положительным (т.е. значение *f(k)* (левой части по *k*) всегда больше или равно нулю):

$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 - (\mathbf{x},\mathbf{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \le 0 \Longrightarrow -1 \le \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \le 1$

Лемма. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

Доказательство. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) + \mathbf{2}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.
Согласно нерав. Коши $\mathbf{2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \mathbf{2}|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \mathbf{2}|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ получим

$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{x}|^2 + \mathbf{2}|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2 \Longrightarrow |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

Пример использования скалярного произведения и длины вектора.

Пример. Фирма управляет двумя заводами в двух разных местах. Пусть объем производства этих заводов – один и тот же (скажем, 10 единиц), используя те же компоненты. Хотя количество входных компонент меняется между заводами, выпуск заводов – один и тот же. Руководство фирмы подозревает, что себестоимость продукции на заводе 2 выше, чем на заводе 1.

Завод 1

	цены	Использованный объем
Компон. 1	3	9
Компон. 2	5	10
Компон. 3	7	8

Завод 2

	цены	Использованный объем
Компон. 1	4	8
Компон. 2	7	12
Компон. 3	3	9

Выходной продукт - 10

Продолжение примера…

- Для каждого завода издержку (себестоимость) можно определить как скалярное произведение двух векторов - цен и объемов входных компонент: $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$.

Для завода 1. $(\mathbf{p}, \mathbf{q})=3 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 8 =133$.

Для завода 2. $(\mathbf{p}, \mathbf{q})=4 \cdot 8 + 7 \cdot 12 + 3 \cdot 9 =143$.

Действительно, сомнение было верно: себестоимость единичного изделия на заводе 2 выше чем на заводе 1.

Вопрос? Менеджер завода 2 утверждает, что причиной разницы в затратах являются более высокие входные цены в его регионе, чем в другом. Прав ли он?

Завод I имеет более низкие цены на вводимые ресурсы 2 и 3, В то время как завод 2 имеет более низкую цену на вводимые ресурсы 3. Сравним длины входных ценовых векторов:

$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 7^2} = 9{,}11$; $|\mathbf{p}_2| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 3^2} = 8{,}6$.

Длина вектора цен второго завода меньше первого.

Значит, причина не только в цене!

Пример скалярного произведения векторов. Числовые индексы для оценки инфляции

- **Индекс Ласпейреса и индекс Пааше для оценки инфляции.**

Пусть

p_i^0 - цена, q_i^0 - объем i-го товара, i=1,…,n, в момент времени 0 (цена и объем базисного периода),

p_i^t - цена, q_i^t - объем i-го товара, i=1,…,n, в момент времени t (цена и объем текущего периода).

1) Для оценки инфляции в 1871 г. немецкий экономист и статистик Э. Ласпейрес предложил следующий числовой индекс для оценки скорости инфляции по объему товаров начального периода:

$$P_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t q_i^0}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0}.$$

2) Г. Пааше в 1874 г. предложил числов. индекс оценки по объему товара текущего периода.

$$P_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^t}.$$

Матрицы.

- **Матрица A – это прямоугольный массив чисел.**

Мы рассмотрим матрицы с действительными числами.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Обозначения матрицы: $A = [a_{ij}]$ или $A = \|a_{ij}\|$ или $A = (a_{ij})$.

В записи (1) m – число строк, n – число столбцов.

Если $m=n$, то матрица – квадратная. $A_n = [a_{ij}]$.

a_{ii}, $i=1,\dots,n$, - элементы главной диагонали.

Нулевая матрица $\mathbf{0}_{m\times n}$: все элементы равны нулю

Единичная матрица I_n: матрица квадратная, все диагональные элементы равны 1, остальные – 0.

$A = [a_{ij}]$ - симметричная, если $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрицы. Примеры

- Пример 1. Для n городов если a_{ij} - расстояние между городами i и j, то $A = [a_{ij}]$ - симметричная матрица расстояний.

Пример 2. Рассмотрим m экономических единиц , каждая из которых описана n индексами. Единицы могут быть фирмами, а индексы - объем продукции, численность персонала, основной капитал, и т.д., каждой фирмы.

Пример 3. $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{mn}$ - матрица перевозок от i-го поставщика до j-го потребителя, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. В общем случае матрица $A = [a_{ij}]$– не квадратная.

Операции с матрицами

- 1) Сумма двух матриц $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

2) Произведение числа λ на матрицу:

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}.$$

3) Произведение двух матриц $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ и $B = [b_{ij}]_{p\times n}$:

$$C = [c_{ij}]_{m\times n} = AB = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right]_{m\times n}.$$

4) Произведение Кронекера двух матриц
$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{p\times q}$:

$$C = [c_{ij}]_{mp\times nq} = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots. & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

5) Произведение Адамара двух матриц $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$:

$$A \circ B = [a_{ij} b_{ij}]_{m\times n}.$$

Свойства сумм матриц и умножение на скаляр

(1-a) $A + B = B + A$.

(1-b) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(1-c) $A + (-A) = \mathbf{0}$, where $-A = (-1)A$.

(1-d) $A + \mathbf{0} = A$.

(2-a) $1A = A$.

(2-b) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(3-a) $0A = \mathbf{0}$.

(3-b) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(3-c) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Свойства умножения матриц

(1-a) $\alpha(AB) = ((\alpha A)B) = A(\alpha B)$.

(1-b) $A(BC) = (AB)C$.

(1-c) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(2-a) $A(B + C) = AB + AC$.

(2-b) $(A + B)C = AC + BC$.

Для умножения матриц в общем случае $AB \neq BA$. Например, даже для квадратных матриц это нарушается.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

След квадратной матрицы $A = [a_{ij}]$ равен сумме элементов главной диагонали

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Очевидно, что $\mathrm{Tr}\,(A + B) = \mathrm{Tr}\, A + \mathrm{Tr}\, B$.

Менее очевидно тождество $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$, которое доказывается прямым вычислением.

Транспонирование матриц и его свойства

- Для матрицы $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ ее транспонирование A^T равно матрице $B = \left[b_{ij}\right]_{n \times m}$, где $b_{ij} = a_{ji}$, для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Утверждение 1. Для операции транспонирования верны следующие равенства.

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Доказательства первых 3-х пунктов – очевидны. Докажем пункт 4).

Продолжение

- Итак, докажем, что $(AB)^T = B^T A^T$.

Пусть X_i – i-я строка, X^j – j-й столбец матрицы X.

Положим $M = AB = [m_{ij}]$ и $N = B^T A^T = [n_{ij}]$.

Очевидно, что $m_{ij} = (A_i, B^j)$, $(AB)^T = [m_{ji}] = (A_j, B^i)$.

Тогда из $n_{ij} = \left((B^T)_i, (A^T)^j\right) = (A_j, B^i) = m_{ji}$ получим

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Определение. Действительная матрица симметричная, если $A = A^T$.

Теорема. Для любой матрицы $A_{m\times n}$ матрица AA^T - симметричная.

Доказательство. Согласно пункту 4) утверждения 1 $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$.

Ранг матрицы

- Определение. Ранг матрицы $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ - это наибольшее число ее столбцов, образующих линейно независимое множество векторов.

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Проверим, являются ли столбцы линейно зависимыми?
Рассмотрим лин. комбинацию столбцов:

$$\begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ -5a + 3b + 4c = 0 \\ a + 6b + c = 0 \\ -a + 5b + 2c = 0 \end{cases}.$$

Заметим, что $a = 7, b = -3,\ c = 11$ - решение системы.

Ранг матрицы

- Значит, столбцы матрицы A линейно зависимы и $\operatorname{rank} A < 3$. С другой, первые два столбца матрицы линейно независимы. Итак, $\operatorname{rank} A = 2$.

Пример 2. Ранг нулевой матрицы равен нулю, ранг единичной матрицы порядка n равен n.

Теорема 1. Для любой матрицы A наибольшее число столбцов, образующих линейно независимое множество векторов, совпадает с наибольшим числом ее линейно независимых строк., т. е. $\operatorname{runk} A = \operatorname{runk} A^T$.

Доказательство теоремы приведем после введения понятий «минор» и «определитель»!

Элементарные преобразования

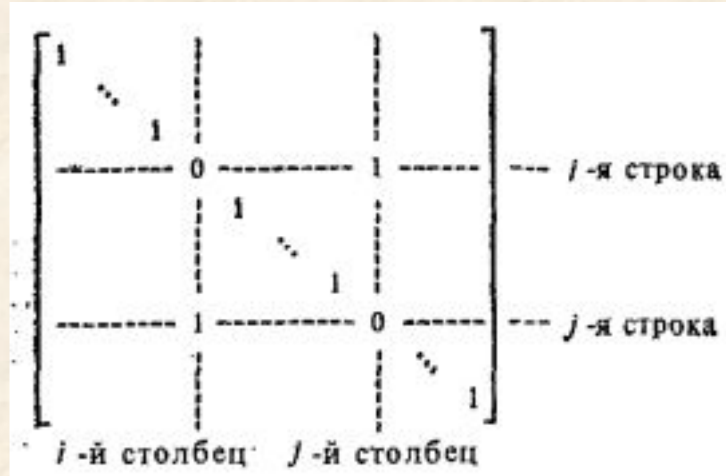
- Рассмотрим $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ и пусть

$A_1, \dots, A_m$ – строки матрицы. Рассмотрим следующ. элементарные (строчные) преобразования:

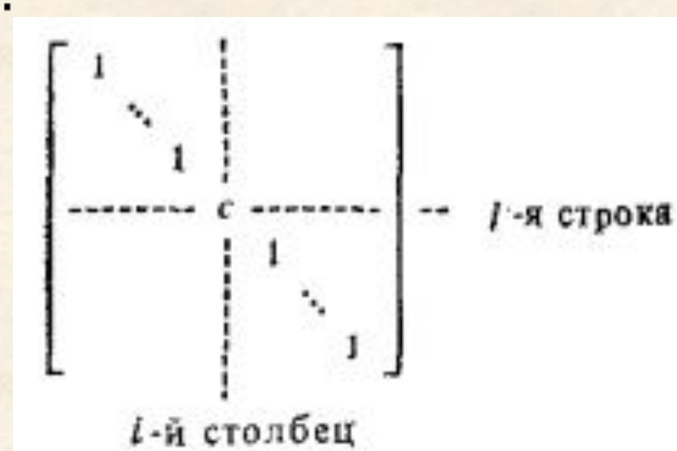
1. перемена местами двух строк; $A_i' = A_j$, $A_j' = A_i$;
2. умножение некоторой строки на отличное от нуля число: $A_i' = \lambda A_i, \lambda \neq 0$;
3. прибавление к какой-либо строке матрицы другой строки, умноженной на некоторое число: $A_i' = A_i + \lambda A_j$.

Матрицы Элементарных преобразований

1. **Перестановка двух строк.** Для того, чтобы поменять местами i-ю и j-ю строки матрицы A, нужно умножить ее слева на след. матрицу $T_{i,j}$, т. е. $T_{i,j}A$:



2. **Умножение строки на ненулевое число.** Для того, чтобы умножить i-ю строку матрицы на число c, нужно умножить ее слева на матрицу $T_i(c)$, т. е. $T_i(c)A$:



Матрицы Элементарных преобразований

3. **Прибавление к строке другой, умноженной на число.**

Для того, чтобы к j-й строке A прибавить i-ю строку, умноженную на число c, Нужно умножить ее слева на матрицу $T_{i,j}(c)$, т.е. $T_{i,j}(c)A$.

Матрицы Элементарных преобразований

- **Теорема 2.** Если A' получена из A в результате элементарного преобразования, тогда

$$A' = TA,$$

где T – матрица соответствующего элемент. преобразования.

Доказательство следует из правила умножения матриц.

Лемма 1. Если A' получена из A в результате элементарного преобразования, тогда существует другое элемент. преобразование, переводящее A' в A.

Доказательство. Если это элемен. преобразование первого типа, то обратное преобразование – та же самая перестановка. Для умножения строки на число k, обратное преобразование - это умножение той же строки на $1/k$. Наконец, для третьего типа преобразования $A_j' = A_j + \lambda A_i$, обратное преобразование - это $A_j = A_j' - \lambda A_i'$.

Матрицы Элементарных преобразований

- Теорема 3. Пусть некоторые столбцы $A^{i_1}, \ldots, A^{i_k}$ матрицы A линейно зависимы, и

$$\alpha_1 A^{i_1} + \cdots + \alpha_k A^{i_k} = \mathbf{0}.$$

Если матрица B получена из A в результате серии элементарных преобразований, тогда соответствующая лин. комбинация столбцов матрицы B также равна нулю:

$$\alpha_1 B^{i_1} + \cdots + \alpha_k B^{i_k} = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Пусть $T_1, \ldots, T_q$ - матрицы элементарных преобразований, композиция которых переводит A в B. Тогда $B = TA = T_q \cdots T_2 T_1$ и каждый столбец B^j равен TA^j.

Тогда $\alpha_1 B^{i_1} + \cdots + \alpha_k B^{i_k} = \alpha_1 TA^{i_1} + \cdots + \alpha_k TA^{i_k} =$

$= T(\alpha_1 A^{i_1} + \cdots + \alpha_k A^{i_k}) = T\mathbf{0} = \mathbf{0}.$

Матрицы Элементарных преобразований

- Следствие из теоремы 3. Если матрица B получена из A в результате серии элементарных преобразований, тогда столбцы $A^{i_1}, \dots, A^{i_k}$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда соответствующие столбцы $B^{i_1}, \dots, B^{i_k}$ матрицы B линейно зависимы.

Доказательство в одну сторону, по части «только тогда» непосредственно следует из Теоремы 3.

Для доказательства в другую сторону, (т.е. условие «тогда») сперва применяем лемму 1 об обратимости элементарных преобразований к матрице B. А потом еще раз применяем теорему 3 для столбцов $B^{i_1}, \dots, B^{i_k}$.

В частности из этой теоремы следует, что

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B.$$

Матрицы Элементарных преобразований

- Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ с помощью элем. преобразований.

Заменим строку A_3 на $A_3 - 2A_2$ и получим

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Далее, заменим A_3' на $A_3' + A_1'$ и A_2' на $A_2' - 4A_1'$, в результате чего получим

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, заменим A_1'' на $A_1'' + 2/3A_2''$ и A_2'' умножим на -1/3, и получим

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 2.

Ступенчатая и каноническая формы матрицы

- **Определение 1.** Матрицу называет **строчно-ступенчатой,** если она обладает следующими свойствами:

1) все ненулевые строки находятся выше нулевых строк;
2) первый ненулевой элемент (ведущий коэффициент) каждой строки всегда находится левее ведущего элемента строки, находящейся ниже.

Определение 2. Ступенчатая матрица называется канонической, если для нее дополнительно выполняются следующие условия:

3) все ведущие коэффициенты равны 1;

4) все числа, находящиеся выше ведущих, равны 0.

ступенчатая матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 9 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

каноническая матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ступенчатая и каноническая формы матрицы
Метод исключения Гаусса

- Теорема. Каждую матрицу A элементарными преобразованиями можно перевести в ступенчатую (а также в каноническую) матрицу B.

Рассмотрим метод Гаусса, приводящий матрицу A к ступенчатому виду.

Предположим, что подматрица первых (j-1) столбцов и (i-1) строк имеет ступенчатый вид.

На следующем шаге выполняем след. операции:

1. Если все элементы j-го столбца начиная с элемента a_{ij} и ниже равны нулю, то алгоритм прерывается. Поскольку подматрица с j столбцами и i строками уже имеет ступенчатую формую и переходим к следующему шагу.

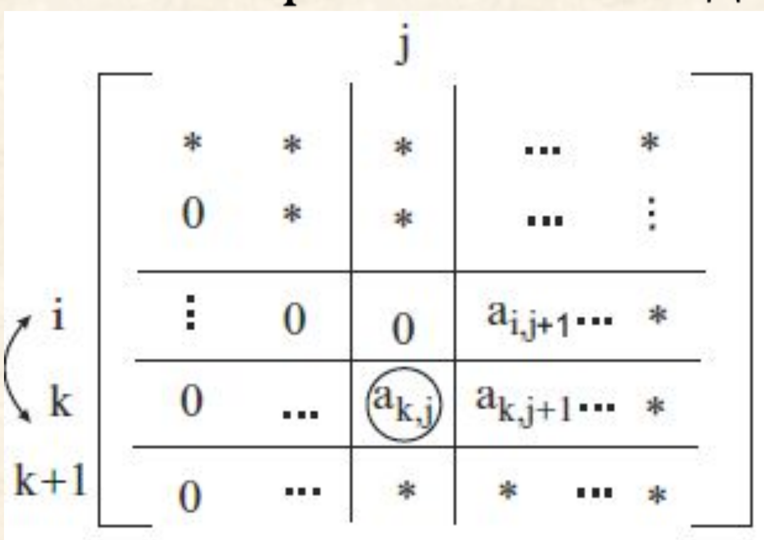
План лекции 1

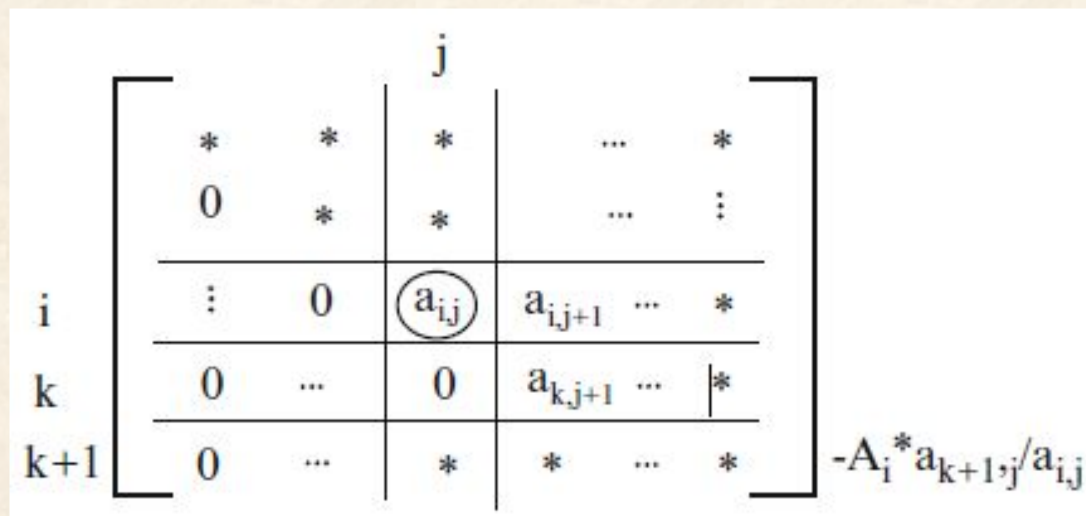
2. В противном случае (т.е. если в столбце j ниже строки $i-1$ есть ненулевой элемент) находим первый ненулевой элемент столбца j ниже строки (i-1). Если это не a_{ij} (например, a_{kj}, где $k>i$), то переставляя строки i и k добиваемся условия $a_{ij} \neq 0$. (См. рисунок слева)

3. Для всех $p>i$, заменив строку A_p на строку $A_p - \frac{a_{pj}}{a_{ij}} A_i$

(рис. справа) получим $a_{pj} = 0$.

4. Повторяем шаги 1-3 до получения ступенчатого вида.





Пример

- Для получения канонического вида каждую строку i делим на ведущее число a_{ip} (это первый ненулевой элемент слева в i-й строке). После этого, ко всем строкам с номерами $k<i$ добавляем i-ю строку, умноженную на $-a_{kp}$.

Есть и другое определение канонического вида!

Найти канонический вид матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{A_2-5A_1, A_3+2A_1} \to$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{A_3-0.5A_2} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}5 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задачи к лекции 1 из [1]

1. Докажите, что если один из векторов набора $z_1, \dots, z_p$ - нулевой $\mathbf{0}$, то векторы $z_1, \dots, z_p$ линейно зависимы.
2. Проверить на линейную зависимость систему векторов

$$z_1 = \{1, \ 0, 0, \ 2, 5\},$$

$$z_2 = \{0, 1, 0, 3, 4\},$$

$$z_3 = \{0, \ \ 0, 1, 4, 7\},$$

$$z_4 = \{2, -3, 4\ , 11, 12\}.$$

3. Пусть $z_1, \dots, z_p$ - система линейно независимых векторов. А вектор $\mathbf{x}$ выражен через $z_1, \dots, z_p$:

$$\mathbf{x} = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_p z_p,$$

где λ_i $-$ действительные числа. Докажите, что данное представление – единственное.

Задачи к лекции 1

4. Докажите, что следующ. n векторов линейно независимы:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= (1, 0, 0, \dots 0, 0)\\
\mathbf{x}_2 &= (0, 1, 0, \dots 0, 0)\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
\mathbf{x}_n &= (0, 0, 0, \dots 0, 1)
\end{aligned}
$$

5. Найти ранг следующих матриц:

$$
\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}; \text{(b)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.
$$

6. Докажите , что следующ. векторы лин. независимы тогда и только тогда, когда $\eta_{ii} \neq 0$ для всех i.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= (\eta_{11}, \eta_{12}, \dots \eta_{1,n-1}, \eta_{1n})\\
\mathbf{x}_2 &= (0, \eta_{22}, \dots \eta_{2,n-1}, \eta_{2n})\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
\mathbf{x}_n &= (0, 0, \dots 0, \eta_{nn})
\end{aligned}
$$

Задачи к лекции 1

7. Докажите, что условие Коши

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\mathbf{2}} \le |\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x},\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y},\mathbf{y})$$

превратится в равенство, если **x** и **y** – линейно зависимы.

8. Найти пример матриц $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq C$, такие, что $AB=AC$.

9. Найдите пример матриц A, B, такие, что $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq \mathbf{0}$, но $AB=\mathbf{0}$.

10. Докажите, что если $AC=CA$ и $BC=CB$, то $ABC=CAB$.

11. Вычислить произведение:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{bmatrix}$$

Задачи к лекции 1

- 12. Докажите, что $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} A$ и $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} B$.

13. Докажите сумма элементов матрицы произведения Адамара двух матриц A, B порядка n равна $\operatorname{Tr} AB^T$.

14. Докажите, что любую матрицу A всегда можно представить как $A = B + C$, *где* A – симметрична, а C – кососимметрична: $C^T = -C$.

15. Найти все матрицы A порядка 2, для которых $A^2 = 0$.

16. Найти все матрицы A порядка 2, для которых $A^2 = I$, где I $-$ единичная матрица.

17. Найти ступенчатый вид матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Домашнее задание 1

18*. [ик]

1.2.8. Пусть вектор y линейно выражается через линейно зависимую систему $x_1, \ldots, x_m$. Показать, что y имеет бесконечно много различных разложений по этой системе.

1.2.9. Пусть x, y, z — линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимы следующие системы векторов:
а) $x, x+y, x+y+z$;

19. а) [ик] Проверить следующие системы векторов на линейную зависимость:

1.2.23. $x_1 = (1, 2, 3)$,
$x_2 = (2, 5, 7)$,
$x_3 = (3, 7, 10)$.

1.2.24. $x_1 = (1, 2, 3)$,
$x_2 = (2, 5, 7)$,
$x_3 = (3, 7, 11)$.

Домашнее задание 1

- б) [ик] Проверить следующие системы векторов на линейную зависимость:

1.2.26. $x_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$x_2 = (1,\ -1,\ -1,\ 1)$,
$x_3 = (1,\ -1,\ 1,\ -1)$,
$x_4 = (1,\ 1,\ -1,\ -1)$.

1.2.27. $x_1 = (5,\ -3,\ 2,\ 1,\ 10)$,
$x_2 = (-1,\ 8,\ 1,\ -4,\ 7)$,
$x_3 = (2,\ 1,\ 9,\ -3,\ 6)$,
$x_4 = (1,\ 3,\ -5,\ 9,\ 11)$.

20) Найти скалярное произведение и угол между векторами:

а) $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$; $\mathbf{b} = (3, 0, 4)$;

б) $\mathbf{a} = (1, 1, 2, 1, 0)$; $\mathbf{b} = (-2, -2,\ 4, 1)$;

с) $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$; $\mathbf{b} = (-2, 4, -4)$.

Домашнее задание 1

21) Вычислить произведение двух матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

22) [r] Привести матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1{,}5 & 6 \\ 2 & 3 & 2{,}5 & 4 \\ 1 & -2 & 3{,}5 & -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

23) [r] Привести матрицу к каноническому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 24*. Заданы вершины треугольника: $A(-1,-2,4), B(-4,-1,2),\ C(-5,6,-4)$. $|BD|$ - его высота, проведенная через вершину B. Найти координаты точки D. (*при решении используется свойство ортогональности соответствующих векторов*). (ответ: D(-2,0,2)).

Литература к данной лекции

1. **Fuad Aleskerov, Hasan Ersel, Dmitri Piontkovski.**

Linear Algebra for Economists. Springer. 2011. (2-я глава)

2. Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов. Линейная Алгебра. М. Юрайт – 2014.

3. Р. Хорн, Ч. Джонсон. Матричный анализ (0-я глава).