

Линейная алгебра

Лекция 1а

Агаев Рафиг Пашаевич

(д.ф.-м.н.)

Векторы и матрицы

- **Алгебраические свойства векторов. Геометрическая интерпретация векторов и операции с векторами. Линейная зависимость.**
- **Произведение двух векторов. Длина вектора. Угол между векторами.**
- **Экономический пример (пример с двумя предприятиями).**
- **Векторное представление экономических данных и операции с ними.**
- **Определение матрицы. Операции с матрицами. Типы матриц. След матрицы. Транспонирование матрицы. Ранг матрицы. Произведение матриц. Произведение Кронекера матриц.**
- **Элементарные матричные преобразования.**
- **Приведение матрицы к ступенчатому виду. Снова о ранге матрицы**
- **Задачи**

Векторы. Обозначения

• ! Для изложения некоторых примеров мы приводим понятие вектор, к которому мы еще раз вернемся при описании векторного пространства.

• **Вектором** называют набор из n (упорядоченных) чисел:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

x_i – компоненты вектора. Предполагаем, что компоненты – действительные числа, но могут быть и комплексными.

Часто при матричных операциях вектор обозначают в виде столбца:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

Однако для простоты записи часто используется строчное представление.

Если \mathbf{x} содержит одну компоненту, то это – **скаляр**.

Пример. Экономическую единицу можно определить вектором

$\mathbf{EU} = (\text{выпуск}, \quad \text{число сотрудников}, \quad \text{основной капитал}, \quad \text{прибыль}).$

Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное пространство, множество всевозможных n -мерных векторов.

• Два вектора \mathbf{x}, \mathbf{y} **равны** тогда и только тогда, когда равны их

соответствующие компоненты: $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$

• $\mathbf{x} > \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i > y_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$

Векторы и их свойства.

Заметка. Из $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{y}$ не следует $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$.

Например, если $\mathbf{x}=(1, 0)$ и $\mathbf{y}=(0, 1)$.

Нулевой вектор $\mathbf{0}=(0, \dots, 0)$.

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - неотрицательный ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$), если $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - положительный ($\mathbf{x} > \mathbf{0}$), если $x_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$
- $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

Векторы и их свойства

1a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (коммутативность).

1b) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (ассоциативность).

1c) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.

1d) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

2a) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

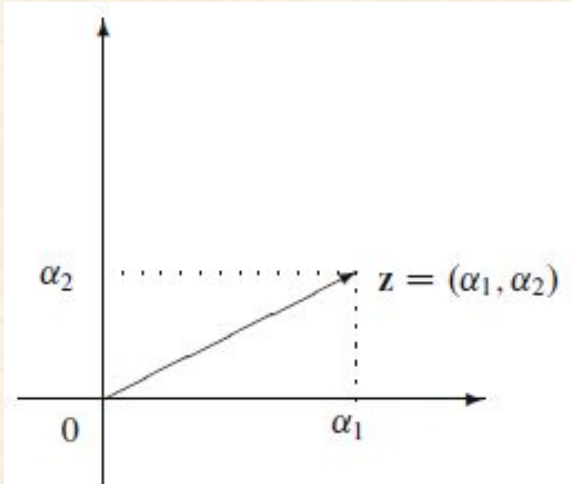
2b) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = \lambda\mu\mathbf{x}$.

3a) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$.

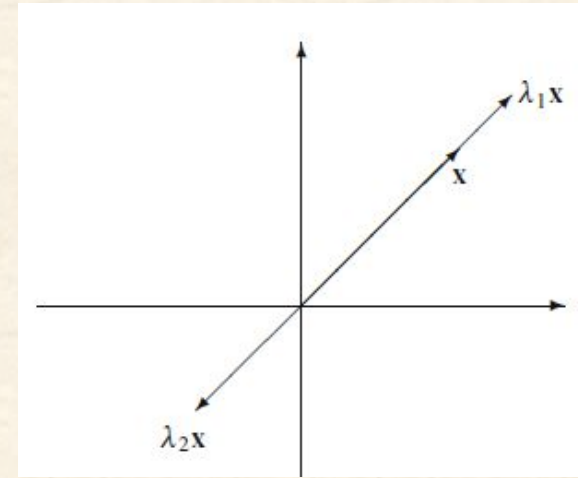
3b) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.

Геометрическая интерпретация векторов и операции с ними

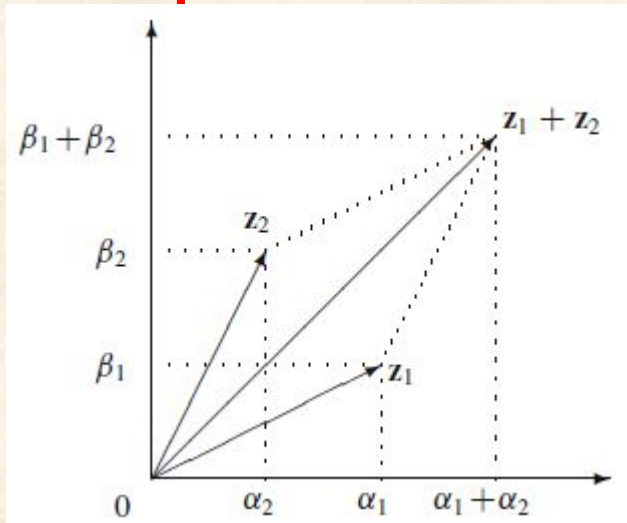
с ними



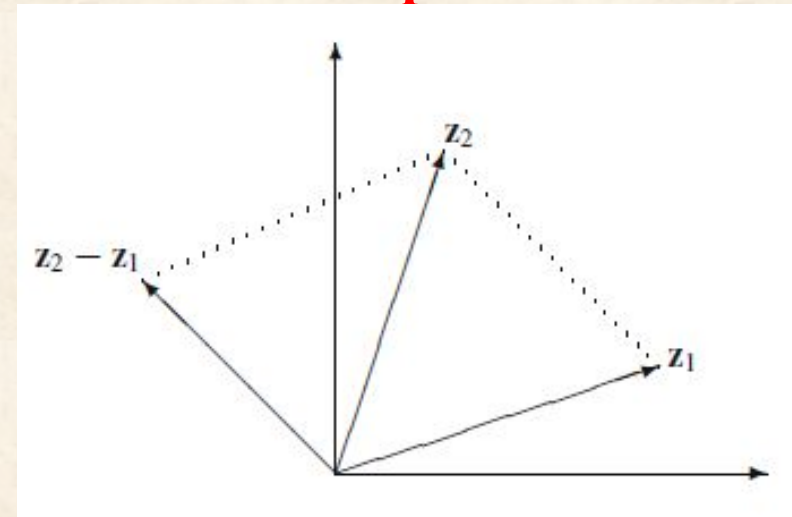
**представление
вектора на плоскости**



**умножение вектора
на скаляр**



сумма двух векторов



разность двух векторов

Линейная зависимость векторов

Определение. Пусть $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s \in \mathbb{R}^n$. Если существуют действительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, не все равные нулю, для которых имеет место

$$\mathbf{z}_1\lambda_1 + \dots + \mathbf{z}_s\lambda_s = \mathbf{0},$$

то векторы $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s$ называют **линейно зависимыми**.

Векторы $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s$ - **линейно независимые**, если из

$\mathbf{z}_1\lambda_1 + \dots + \mathbf{z}_s\lambda_s = \mathbf{0}$ следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$.

Пример. Векторы $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$, $\mathbf{c} = (7, 8, 9)$ линейно зависимы. Поскольку $1\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 1\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Векторы $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ - линейно независимы. **Проверьте!**

Теорема о лин. зависимости

Определение. Вектор \mathbf{a} называется лин. комбин. векторов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$, если его можно представить как

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{b}_s, \quad (1)$$

где α_s - действительные числа.

Теорема 1. Если векторы $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s$ линейно зависимые, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. Векторы, один из которых является линейной комбинацией остальных, - линейно зависимы.

Доказательство. Если векторы $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s$ линейно зависимые, тогда

$$\lambda_1 \mathbf{z}_1 + \dots + \lambda_s \mathbf{z}_s = 0,$$

и хотя бы для одного i , $1 \leq i \leq s$, $\lambda_i \neq 0$.

$$\lambda_i \mathbf{z}_i = -\lambda_1 \mathbf{z}_1 - \lambda_2 \mathbf{z}_2 - \dots - \lambda_{i-1} \mathbf{z}_{i-1} - \lambda_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} - \dots - \lambda_s \mathbf{z}_s$$

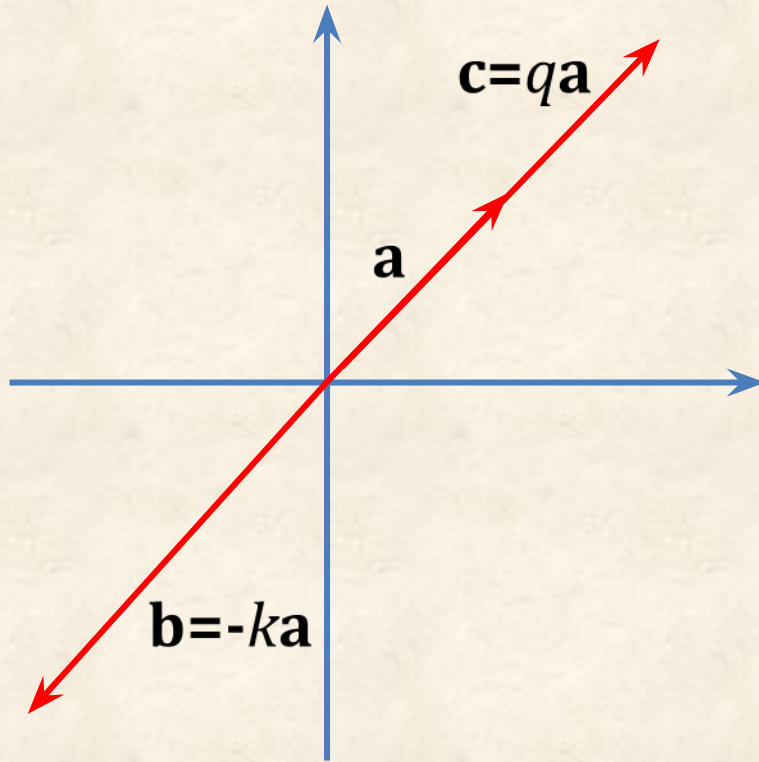
и

$$\mathbf{z}_i = \mu_1 \mathbf{z}_1 + \mu_2 \mathbf{z}_2 + \dots + \mu_{i-1} \mathbf{z}_{i-1} + \mu_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} + \dots + \mu_s \mathbf{z}_s,$$

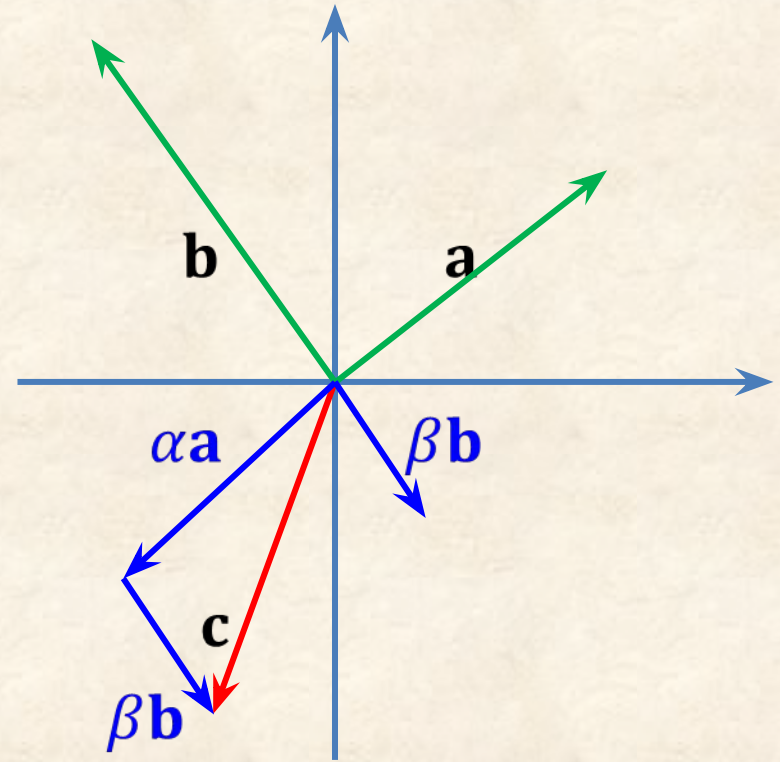
$$\mu_j = -\lambda_j / \lambda_i, \quad \text{для всех } j \neq i.$$

Для доказательства второго утверждения достаточно в (1) вектор \mathbf{a} перенести в правую часть равенства.

План лекции 1



•
векторы a , b , c лин. зависимы
 $k > 0$, $q > 0$.



векторы a и b лин. **независимы**
векторы a , b , c лин. зависимы
 $c = \alpha a + \beta b$.

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ обозначается через (\mathbf{x}, \mathbf{y}) и определяется следующим образом:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Пример. $\mathbf{a}=(1, 2, 0)$, $\mathbf{b}=(-2, 3, 1)$.

Тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 4$.

Пример. В хозяйстве используется n товаров. Пусть \mathbf{p} - вектор цен на эти товары, а \mathbf{q} - вектор объемов товаров. Тогда совокупные расходы можно получить скалярным произведением этих двух векторов (\mathbf{p}, \mathbf{q}) .

Свойства скалярного произведения.

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
2. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ и из $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ следует $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$.

Длина вектора и угол между двумя векторами

Определение. Длина вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ определяется как $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ и обозначается через $|\mathbf{x}|$. Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, то

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Угол φ между двумя ненулевыми векторами \mathbf{x} и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ определяется как

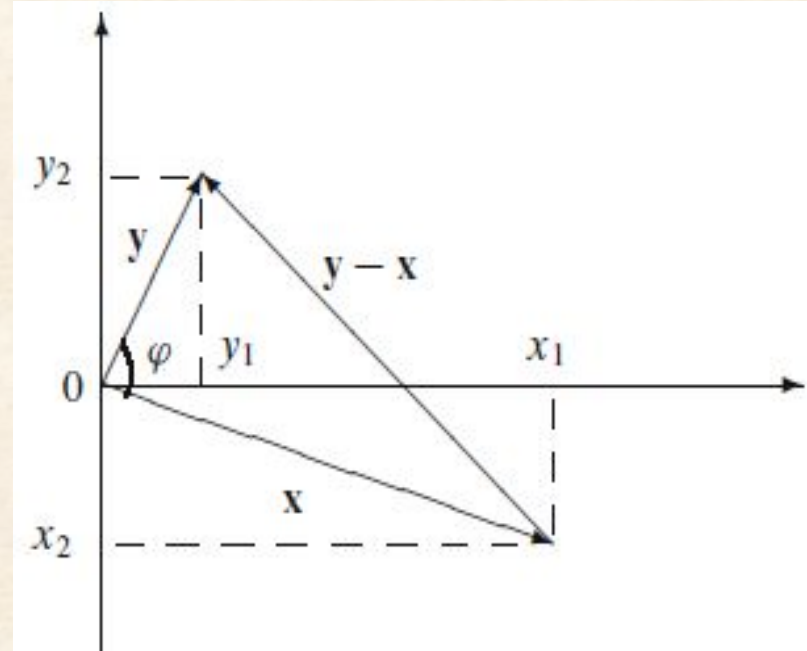
$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Угол между двумя векторами на плоскости

Согласно теореме косинусов,
 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2 - 2|\mathbf{y}||\mathbf{x}| \cos \varphi$
или же

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = y_1^2 + x_1^2 + y_2^2 + x_2^2 - 2\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos \varphi.$$

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}.$$



Продолжение

Определение. 1) Два вектора \mathbf{x} и \mathbf{y} **параллельны** ($\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$), если они линейно зависимы: $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

2) Два вектора \mathbf{x} и \mathbf{y} **ортогональны**, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$, т.е. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Ортогональность векторов обозначают как $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Теорема 2. Если два вектора \mathbf{x} и \mathbf{y} ортогональны, то

$$|\mathbf{y} + \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2.$$

Действительно, поскольку для орт. векторов $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$

$$|\mathbf{y} + \mathbf{x}|^2 = (\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + 2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2.$$

Теорема 2'. (Следствие из теоремы 2). Для попарно ортогональных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ верно

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y} + \dots + \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + \dots + |\mathbf{z}|^2.$$

Заметка. Из $-1 \leq \cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \leq 1$, следует **неравенство**

Коши:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq |\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Продолжение

Вопрос? Почему $-1 \leq \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$?

Ответ. Пусть k – вещественное число. Тогда

$$(x - ky, x - ky) \geq 0,$$

$$k^2(y, y) - 2k(x, y) + (x, x) \geq 0. \quad (1)$$

Дискриминант квадр. уравнения

$$k^2(y, y) - 2k(x, y) + (x, x) = 0$$

согласно неравенству (1) не может быть положительным (т.е. значение $f(k)$ (левой части по k) всегда больше или равно нулю):

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$$

Лемма. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Доказательство. $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + 2(x, y)$.

Согласно нерав. Коши $2(x, y) \leq 2|(x, y)| \leq 2|x||y|$ получим

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Пример использования скалярного произведения и длины вектора.

Пример. Фирма управляет двумя заводами в двух разных местах. Пусть объем производства этих заводов – один и тот же (скажем, 10 единиц), используя те же компоненты. Хотя количество входных компонент меняется между заводами, выпуск заводов – один и тот же. Руководство фирмы подозревает, что себестоимость продукции на заводе 2 выше, чем на заводе 1.

Завод 1

	цены	Использованный объем
Компон. 1	3	9
Компон. 2	5	10
Компон. 3	7	8

Завод 2

	цены	Использованный объем
Компон. 1	4	8
Компон. 2	7	12
Компон. 3	3	9

Выходной продукт - 10

Продолжение примера...

Для каждого завода издержку (себестоимость) можно определить как скалярное произведение двух векторов - цен и объемов входных компонент: $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$.

Для завода 1. $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 3 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 8 = 133$.

Для завода 2. $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4 \cdot 8 + 7 \cdot 12 + 3 \cdot 9 = 143$.

Действительно, сомнение было верно: себестоимость единичного изделия на заводе 2 выше чем на заводе 1.

Вопрос? Менеджер завода 2 утверждает, что причиной разницы в затратах являются более высокие входные цены в его регионе, чем в другом. Прав ли он?

Завод 1 имеет более низкие цены на вводимые ресурсы 2 и 3, в то время как завод 2 имеет более низкую цену на вводимые ресурсы 3. Сравним длины входных ценовых векторов:

$$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 7^2} = 9,11; \quad |\mathbf{p}_2| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 3^2} = 8,6.$$

Длина вектора цен второго завода меньше первого.

Значит, причина не только в цене!

Пример скалярного произведения векторов.

Числовые индексы для оценки инфляции

Индекс Ласпейреса и индекс Пааше для оценки инфляции.

Пусть

p_i^0 - цена, q_i^0 - объем i -го товара, $i=1, \dots, n$, в момент времени 0 (цена и объем базисного периода),

p_i^t - цена, q_i^t - объем i -го товара, $i=1, \dots, n$, в момент времени t (цена и объем текущего периода).

1) Для оценки инфляции в 1871 г. немецкий экономист и статистик **Э. Ласпейрес** предложил следующий числовой индекс для оценки скорости инфляции **по объему товаров начального периода**:

$$P_L = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^0}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0}.$$

2) **Г. Пааше** в 1874 г. предложил числов. индекс оценки **по объему товара текущего периода**.

$$P_P = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t}.$$

Матрицы.

● **Матрица A – это прямоугольный массив чисел.**

Мы рассмотрим матрицы с действительными числами.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Обозначения матрицы: $A = [a_{ij}]$ или $A = \|a_{ij}\|$ или $A = (a_{ij})$.

В записи (1) m – число строк, n – число столбцов.

Если $m=n$, то матрица – квадратная. $A_n = [a_{ij}]$.

a_{ii} , $i=1, \dots, n$, – элементы главной диагонали.

Нулевая матрица $\mathbf{0}_{m \times n}$: все элементы равны нулю

Единичная матрица I_n : матрица квадратная, все диагональные элементы равны 1, остальные – 0.

$A = [a_{ij}]$ – **симметричная**, если $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрицы. Примеры

Пример 1. Для n городов если a_{ij} - расстояние между городами i и j , то $A = [a_{ij}]$ - симметричная матрица расстояний.

Пример 2. Рассмотрим m экономических единиц, каждая из которых описана n индексами. Единицы могут быть фирмами, а индексы - объем продукции, численность персонала, основной капитал, и т.д., каждой фирмы.

Пример 3. $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{mn}$ - матрица перевозок от i -го поставщика до j -го потребителя, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. В общем случае матрица $A = [a_{ij}]$ - не квадратная.

Операции с матрицами

1) **Сумма** двух матриц $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

2) **Произведение** числа λ на матрицу:

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}.$$

3) **Произведение** двух матриц $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ и $B = [b_{ij}]_{p \times n}$:

$$C = [c_{ij}]_{m \times n} = AB = \left[\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right]_{m \times n}.$$

4) **Произведение Кронекера** двух матриц

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{p \times q}$:

$$C = [c_{ij}]_{mp \times nq} = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

5) **Произведение Адамара** двух матриц $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$:

$$A \circ B = [a_{ij}b_{ij}]_{m \times n}.$$

Свойства сумм матриц и умножение на скаляр

$$(1-a) \quad A + B = B + A.$$

$$(1-b) \quad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

$$(1-c) \quad A + (-A) = \mathbf{0}, \text{ where } -A = (-1)A.$$

$$(1-d) \quad A + \mathbf{0} = A.$$

$$(2-a) \quad 1A = A.$$

$$(2-b) \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$(3-a) \quad 0A = \mathbf{0}.$$

$$(3-b) \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$(3-c) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Свойства умножения матриц

$$(1-a) \alpha(AB) = ((\alpha A)B) = A(\alpha B).$$

$$(1-b) A(BC) = (AB)C.$$

$$(1-c) A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$$(2-a) A(B + C) = AB + AC.$$

$$(2-b) (A + B)C = AC + BC.$$

Для **умножения матриц в общем случае $AB \neq BA$** . Например, даже для квадратных матриц это нарушается.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

След квадратной матрицы $A = [a_{ij}]$ равен сумме элементов главной диагонали

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Очевидно, что $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr } A + \text{Tr } B$.

Менее очевидно тождество $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, которое доказывается прямым вычислением.

Транспонирование матриц и его свойства

Для матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ее **транспонирование** A^T равно матрице $B = [b_{ij}]_{n \times m}$, где $b_{ij} = a_{ji}$, для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Утверждение 1. Для операции транспонирования верны следующие равенства.

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Доказательства первых 3-х пунктов – очевидны. Докажем пункт 4).

Продолжение

Итак, докажем, что $(AB)^T = B^T A^T$.

Пусть X_i — i -я строка, X^j — j -й столбец матрицы X .

Положим $M = AB = [m_{ij}]$ и $N = B^T A^T = [n_{ij}]$.

Очевидно, что $m_{ij} = (A_i, B^j)$, $(AB)^T = [m_{ji}] = (A_j, B^i)$.

Тогда из $n_{ij} = ((B^T)_i, (A^T)^j) = (A_j, B^i) = m_{ji}$ получим
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Определение. Действительная матрица симметричная, если $A = A^T$.

Теорема. Для любой матрицы $A_{m \times n}$ матрица AA^T - симметричная.

Доказательство. Согласно пункту 4) утверждения 1
 $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$.

Ранг матрицы

Определение. Ранг матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ - это наибольшее число ее столбцов, образующих линейно независимое множество векторов.

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Проверим, являются ли столбцы линейно зависимыми?

Рассмотрим лин. комбинацию столбцов:

$$\begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ -5a + 3b + 4c = 0 \\ a + 6b + c = 0 \\ -a + 5b + 2c = 0 \end{cases}.$$

Заметим, что $a = 7, b = -3, c = 11$ - решение системы.

Ранг матрицы

Значит, столбцы матрицы A линейно зависимы и $\text{rank } A < 3$.
С другой, первые два столбца матрицы линейно независимы. Итак, $\text{rank } A = 2$.

Пример 2. Ранг нулевой матрицы равен нулю, ранг единичной матрицы порядка n равен n .

Теорема 1. Для любой матрицы A наибольшее число столбцов, образующих линейно независимое множество векторов, совпадает с наибольшим числом ее линейно независимых строк., т. е. $\text{rank } A = \text{rank } A^T$.

Доказательство теоремы приведем после введения понятий «минор» и «определитель»!

Элементарные преобразования

Рассмотрим $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и пусть

A_1, \dots, A_m – строки матрицы. Рассмотрим следующ.

элементарные (строчные) преобразования:

1. перемена местами двух строк; $A'_i = A_j, A'_j = A_i$;
2. умножение некоторой строки на отличное от нуля число:
 $A'_i = \lambda A_i, \lambda \neq 0$;
3. прибавление к какой-либо строке матрицы другой строки, умноженной на некоторое число: $A'_i = A_i + \lambda A_j$.

Матрицы Элементарных преобразований

- 1. Перестановка двух строк.** Для того, чтобы поменять местами i -ю и j -ю строки матрицы A , нужно умножить ее слева на след. матрицу $T_{i,j}$, т.е. $T_{i,j}A$:

The diagram shows a square matrix with dashed lines indicating its structure. The main diagonal consists of 1s. The i -th and j -th rows are swapped. In the i -th row, the element at column j is 1, and the element at column i is 0. In the j -th row, the element at column i is 1, and the element at column j is 0. All other elements on the diagonal are 1. Labels on the right indicate the i -th and j -th rows, and labels at the bottom indicate the i -th and j -th columns.

- 2. Умножение строки на ненулевое число.** Для того, чтобы умножить i -ю строку матрицы на число c , нужно умножить ее слева на матрицу $T_i(c)$, т.е. $T_i(c)A$:

The diagram shows a square matrix with dashed lines indicating its structure. The main diagonal consists of 1s. The i -th row is multiplied by a scalar c . In the i -th row, the element at column i is c . All other elements on the diagonal are 1. Labels on the right indicate the i -th row, and a label at the bottom indicates the i -th column.

Матрицы Элементарных преобразований

3. Прибавление к строке другой, умноженной на число.

Для того, чтобы к j -й строке A прибавить i -ю строку, умноженную на число c , Нужно умножить ее слева на матрицу $T_{i,j}(c)$, т.е. $T_{i,j}(c)A$.

The diagram shows a square matrix enclosed in large square brackets. A vertical dashed line is drawn through the matrix, labeled at the bottom as " i -й столбец". A horizontal dashed line is drawn through the matrix, labeled on the right as " j -я строка". The intersection of these two lines is the element c . The elements on the main diagonal are all 1's. Specifically, there is a 1 in the top-left corner, a 1 in the row above the horizontal dashed line and to the left of the vertical dashed line, and a 1 in the bottom-right corner. Ellipses (\dots) are placed on the diagonal between the 1 in the row above the horizontal dashed line and the 1 in the bottom-right corner.

Матрицы Элементарных преобразований

Теорема 2. Если A' получена из A в результате элементарного преобразования, тогда

$$A' = TA,$$

где T – матрица соответствующего элемент. преобразования.

Доказательство следует из правила умножения матриц.

Лемма 1. Если A' получена из A в результате элементарного преобразования, тогда существует другое элемент. преобразование, переводящее A' в A .

Доказательство. Если это элемен. преобразование первого типа, то обратное преобразование – та же самая перестановка. Для умножения строки на число k , обратное преобразование – это умножение той же строки на $1/k$.
Наконец, для третьего типа преобразования $A'_j = A_j + \lambda A_i$, обратное преобразование – это $A_j = A'_j - \lambda A'_i$.

Матрицы Элементарных преобразований

Теорема 3. Пусть некоторые столбцы A^{i_1}, \dots, A^{i_k} матрицы A линейно зависимы, и

$$\alpha_1 A^{i_1} + \dots + \alpha_k A^{i_k} = \mathbf{0}.$$

Если матрица B получена из A в результате серии элементарных преобразований, тогда соответствующая лин. комбинация столбцов матрицы B также равна нулю:

$$\alpha_1 B^{i_1} + \dots + \alpha_k B^{i_k} = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Пусть T_1, \dots, T_q - матрицы элементарных преобразований, композиция которых переводит A в B . Тогда $B = TA = T_q \cdots T_2 T_1$ и каждый столбец B^j равен TA^j . Тогда $\alpha_1 B^{i_1} + \dots + \alpha_k B^{i_k} = \alpha_1 TA^{i_1} + \dots + \alpha_k TA^{i_k} = T(\alpha_1 A^{i_1} + \dots + \alpha_k A^{i_k}) = T\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Матрицы Элементарных преобразований

Следствие из теоремы 3. Если матрица B получена из A в результате серии элементарных преобразований, тогда столбцы A^{i_1}, \dots, A^{i_k} линейно зависимо тогда и только тогда, когда соответствующие столбцы B^{i_1}, \dots, B^{i_k} матрицы B линейно зависимы.

Доказательство в одну сторону, по части «только тогда» непосредственно следует из Теоремы 3.

Для доказательства в другую сторону, (т.е. условие «тогда») сперва применяем лемму 1 об обратимости элементарных преобразований к матрице B . А потом еще раз применяем теорему 3 для столбцов B^{i_1}, \dots, B^{i_k} .

В частности из этой теоремы следует, что

$$\text{rank } A = \text{rank } B.$$

Матрицы Элементарных преобразований

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ с помощью элем. преобразований.

Заменяем строку A_3 на $A_3 - 2A_2$ и получим

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Далее, заменим A'_3 на $A'_3 + A'_1$ и A'_2 на $A'_2 - 4A'_1$, в результате чего получим

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, заменим A''_1 на $A''_1 + 2/3A''_2$ и A''_2 умножим на $-1/3$, и получим

$$A''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 2.

Ступенчатая и каноническая формы матрицы

Определение 1. Матрицу называют **строчно-ступенчатой**, если она обладает следующими свойствами:

- 1) все ненулевые строки находятся выше нулевых строк;
- 2) первый ненулевой элемент (**ведущий коэффициент**) каждой строки всегда находится левее ведущего элемента строки, находящейся ниже.

Определение 2. Ступенчатая матрица называется канонической, если для нее дополнительно выполняются следующие условия:

- 3) все ведущие коэффициенты равны 1;
- 4) все числа, находящиеся выше ведущих, равны 0.

ступенчатая матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 9 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

каноническая матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ступенчатая и каноническая формы матрицы

Метод исключения Гаусса

Теорема. Каждую матрицу A элементарными преобразованиями можно перевести в ступенчатую (а также в каноническую) матрицу B .

Рассмотрим **метод Гаусса**, приводящий матрицу A к ступенчатому виду.

Предположим, что подматрица первых $(j-1)$ столбцов и $(i-1)$ строк имеет ступенчатый вид.

На следующем шаге выполняем след. операции:

1. Если все элементы j -го столбца начиная с элемента a_{ij} и ниже равны нулю, то алгоритм прерывается. Поскольку подматрица с j столбцами и i строками уже имеет ступенчатую форму и переходим к следующему шагу.

План лекции 1

2. В противном случае (т.е. если в столбце j ниже строки $i - 1$ есть ненулевой элемент) находим первый ненулевой элемент столбца j ниже строки $(i-1)$. Если это не a_{ij} (например, a_{kj} , где $k > i$), то переставляя строки i и k добиваемся условия $a_{ij} \neq 0$. (См. рисунок слева)

3. Для всех $p > i$, заменив строку A_p на строку $A_p - \frac{a_{pj}}{a_{ij}} A_i$

(рис. справа) получим $a_{pj} = 0$.

4. Повторяем шаги 1-3 до получения ступенчатого вида.

			j		
	*	*	*	...	*
	0	*	*	...	⋮
i	⋮	0	0	$a_{i,j+1} \dots$	*
k	0	...	$a_{k,j}$	$a_{k,j+1} \dots$	*
k+1	0	...	*	*	... *

			j		
	*	*	*	...	*
	0	*	*	...	⋮
i	⋮	0	a_{ij}	$a_{i,j+1} \dots$	*
k	0	...	0	$a_{k,j+1} \dots$	*
k+1	0	...	*	*	... *

$-A_i^* a_{k+1,j} / a_{ij}$

Пример

Для получения канонического вида каждую строку i делим на ведущее число a_{ip} (это первый ненулевой элемент слева в i -й строке). После этого, ко всем строкам с номерами $k < i$ добавляем i -ю строку, умноженную на $-a_{kp}$.

Есть и другое определение канонического вида!

Найти канонический вид матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_2 - 5A_1, A_3 + 2A_1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_3 - 0.5A_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задачи к лекции 1 из [1]

1. Докажите, что если один из векторов набора z_1, \dots, z_p - нулевой $\mathbf{0}$, то векторы z_1, \dots, z_p линейно зависимы.
2. Проверить на линейную зависимость систему векторов

$$z_1 = \{1, 0, 0, 2, 5\},$$

$$z_2 = \{0, 1, 0, 3, 4\},$$

$$z_3 = \{0, 0, 1, 4, 7\},$$

$$z_4 = \{2, -3, 4, 11, 12\}.$$

3. Пусть z_1, \dots, z_p - система линейно независимых векторов. А вектор \mathbf{x} выражен через z_1, \dots, z_p :

$$\mathbf{x} = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_p z_p,$$

где λ_i - действительные числа. Докажите, что данное представление - единственное.

Задачи к лекции 1

4. Докажите, что следующ. n векторов линейно независимы:

$$\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\mathbf{x}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

5. Найти ранг следующих матриц:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Докажите, что следующ. векторы лин. независимы тогда и только тогда, когда $\eta_{ii} \neq 0$ для всех i .

$$\mathbf{x}_1 = (\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1,n-1}, \eta_{1n})$$

$$\mathbf{x}_2 = (0, \eta_{22}, \dots, \eta_{2,n-1}, \eta_{2n})$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\mathbf{x}_n = (0, 0, \dots, 0, \eta_{nn})$$

Задачи к лекции 1

7. Докажите, что условие Коши

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq |\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

превратится в равенство, если \mathbf{x} и \mathbf{y} – линейно зависимы.

8. Найти пример матриц $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq C$, такие, что $AB=AC$.

9. Найдите пример матриц A , B , такие, что $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq \mathbf{0}$, но $AB=\mathbf{0}$.

10. Докажите, что если $AC=CA$ и $BC=CB$, то $ABC=CAB$.

11. Вычислить произведение:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{bmatrix}$$

Задачи к лекции 1

12. Докажите, что $\text{rank}(AB) \leq \text{rank} A$ и $\text{rank}(AB) \leq \text{rank} B$.
13. Докажите сумма элементов матрицы произведения Адамара двух матриц A, B порядка n равна $\text{Tr} AB^T$.
14. Докажите, что любую матрицу A всегда можно представить как $A = B + C$, где A – симметрична, а C – кососимметрична: $C^T = -C$.
15. Найти все матрицы A порядка 2, для которых $A^2 = 0$.
16. Найти все матрицы A порядка 2, для которых $A^2 = I$, где I – единичная матрица.
17. Найти ступенчатый вид матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Домашнее задание 1

18*. [ик]

1.2.8. Пусть вектор y линейно выражается через линейно зависящую систему x_1, \dots, x_m . Показать, что y имеет бесконечно много различных разложений по этой системе.

1.2.9. Пусть x, y, z — линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимы следующие системы векторов:
а) $x, x + y, x + y + z$;

19. а) [ик] Проверить следующие системы векторов на линейную зависимость:

$$\begin{aligned} \mathbf{1.2.23.} \quad x_1 &= (1, 2, 3), \\ x_2 &= (2, 5, 7), \\ x_3 &= (3, 7, 10). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1.2.24.} \quad x_1 &= (1, 2, 3), \\ x_2 &= (2, 5, 7), \\ x_3 &= (3, 7, 11). \end{aligned}$$

Домашнее задание 1

б) [ик] Проверить следующие системы векторов на линейную зависимость:

$$\begin{aligned}1.2.26. \quad x_1 &= (1, 1, 1, 1), \\ x_2 &= (1, -1, -1, 1), \\ x_3 &= (1, -1, 1, -1), \\ x_4 &= (1, 1, -1, -1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1.2.27. \quad x_1 &= (5, -3, 2, 1, 10), \\ x_2 &= (-1, 8, 1, -4, 7), \\ x_3 &= (2, 1, 9, -3, 6), \\ x_4 &= (1, 3, -5, 9, 11).\end{aligned}$$

20) Найти скалярное произведение и угол между векторами:

а) $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$; $\mathbf{b} = (3, 0, 4)$;

б) $\mathbf{a} = (1, 1, 2, 1, 0)$; $\mathbf{b} = (-2, -2, 4, 1)$;

с) $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$; $\mathbf{b} = (-2, 4, -4)$.

Домашнее задание 1

21) Вычислить произведение двух матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (4 \ 0 \ -2 \ 3 \ 1);$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

22) [r] Привести матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1,5 & 6 \\ 2 & 3 & 2,5 & 4 \\ 1 & -2 & 3,5 & -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

23) [r] Привести матрицу к каноническому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

24*. Заданы вершины треугольника:
 $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -1, 2)$, $C(-5, 6, -4)$. $|BD|$ - его высота,
проведенная через вершину B . Найти координаты точки D .
(при решении используется свойство ортогональности
соответствующих векторов). (ответ: $D(-2, 0, 2)$).

Литература к данной лекции

1. Fuad Aleskerov, Hasan Ersel, Dmitri Piontkovski.
Linear Algebra for Economists. Springer. 2011. (2-я глава)
2. Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов. Линейная Алгебра. М.
Юрайт – 2014.
3. Р. Хорн, Ч. Джонсон. Матричный анализ (0-я глава).