

# ЛОДУ с постоянными коэффициентами

**Определение.** Линейными однородными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами называют уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad (6)$$

где коэффициенты  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n - \text{const.}$

Частные решения будем искать в виде:  $y = e^{kx}$  (7)

**Определение.** Уравнение

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-1} k + p_n = 0 \quad (8)$$

называется **характеристическим уравнением** ЛОДУ с постоянными коэффициентами, а многочлен

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-1} k + p_n -$$

**характеристическим многочленом.**

## Алгоритм решения ЛОДУ $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

- ❖ 1. Составить характеристическое уравнение ( $y = e^{kx}$ ).
- ❖ 2. Найти его корни  $k_1, k_2, \dots, k_n$ .
- ❖ 3. По характеру корней найти частные линейно независимые решения  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  согласно таблице 4.
- ❖ 4. Записать общее решение

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Таблица 4

Бер Л.М.



| Вид корня  | Соответствующие решения  |
|--|--|
| 1. Действительный корень $k$ кратности 1                 | $e^{kx}$   |
| 2. Пара сопряженных корней $a \pm bi$ кратности 1        | $e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx$   |
| 3. Действительный корень $k$ кратности $\alpha$          | $e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \dots, x^{\alpha-1} e^{kx}$  |
| 4. Пара сопряженных корней $a \pm bi$ кратности $\alpha$ | $e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx$<br>$xe^{ax} \cos bx, xe^{ax} \sin bx$<br>$x^2 e^{ax} \cos bx, x^2 e^{ax} \sin bx$<br><p style="text-align: center;">....</p> $x^{\alpha-1} e^{ax} \cos bx, x^{\alpha-1} e^{ax} \sin bx$ |

# ЛНДУ с произвольными коэффициентами

Вспомним, что ЛНДУ имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x), \quad (9)$$

где  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$  – заданные функции аргумента  $x$ , причем  $f(x) \neq 0$ .

**Теорема 4.** *(О структуре общего решения ЛНДУ)*

Общее решение ЛНДУ есть сумма его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

При  $n = 2$ , ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x). \quad (9')$$

# ЛНДУ с произвольными коэффициентами

## Теорема 5. (Принцип суперпозиции решений)

Если функция  $y_i(x)$  – является решением ЛНДУ

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f_i(x), \quad (11)$$

то функция

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_k y_k$$

является решением уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_k f_k(x). \quad (12)$$

При  $n = 2$ , ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x).$$

# ЛНДУ $n$ -го порядка

Рассмотрим **ЛНДУ с постоянными коэффициентами**

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x),$$

где коэффициенты  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n - \text{const}$ .

**Метод неопределенных коэффициентов** МОЖНО применить, если правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{px} [P_m(x) \cos qx + Q_l(x) \sin qx],$$

где  $P_m(x)$  и  $Q_l(x)$  – многочлены степени  $m$  и  $l$  соответственно,  $p$  и  $q$  – некоторые числа.

# Форма частного решения

Таблица 5

Бер Л.М.

Вид частного решения в зависимости от правой части ЛНДУ | в. п.

| Свободный член $f(x)$   | Вид частного решения  |
|---|---|
| 1. $f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$<br>а) Число 0 не является корнем х.у.<br>б) Число 0 является корнем х.у. кратности $\alpha$              | а) $y^* = B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_{m-1}x + B_m$<br>б) $y^* = x^\alpha (B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_{m-1}x + B_m)$   |
| 2. $f(x) = e^{px} (A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m)$<br>а) Число $p$ не является корнем х.у.<br>б) Число $p$ является корнем х.у. кратности $\alpha$ | а) $y^* = e^{px} (B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_{m-1}x + B_m)$<br>б) $y^* = x^\alpha e^{px} (B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_{m-1}x + B_m)$   |
| 3. $f(x) = P_m(x) \cos qx + Q_l(x) \sin qx$<br>а) $(\pm qi)$ не является корнем х.у.<br>б) $(\pm qi)$ является корнем х.у. кратности $\alpha$                     | а) $y^* = \overline{P}_s(x) \cos qx + \overline{Q}_s(x) \sin qx,$<br>$s = \max(m, l)$<br>б) $y^* = x^\alpha (\overline{P}_s(x) \cos qx + \overline{Q}_s(x) \sin qx),$<br>$s = \max(m, l)$ |
| 4. $f(x) = e^{px} (P_m(x) \cos qx + Q_l(x) \sin qx)$<br>а) $(p \pm qi)$ не является корнем х.у.   | а) $y^* = e^{px} [\overline{P}_s(x) \cos qx + \overline{Q}_s(x) \sin qx],$<br>$s = \max(m, l)$<br>б) $y^* = x^\alpha e^{px} (\overline{P}_s(x) \cos qx + \overline{Q}_s(x) \sin qx),$     |

# ЛНДУ $n$ -го порядка

**Замечание 1.** Степени многочленов  $P_m(x)$  и  $Q_l(x)$  в случаях 3,4 таблицы 5 можно считать одинаковой ( $\max\{m, l\}$ ). В этом случае коэффициенты при недостающих степенях одного из многочленов можно считать равными нулю.

**Замечание 2.** Правая часть уравнения может содержать несколько слагаемых; в этом случае частное решение также составляется из нескольких слагаемых в соответствии с теоремой 5.



# Метод Лагранжа для ЛНДУ в п

Система линейных неоднородных уравнений с  $n$  неизвестными функциями  $C_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots C_n'(x)y_n' = 0 \\ \dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array} \right. \quad (17)$$

## Алгоритм решения ЛНДУ $n$ -го порядка методом Лагранжа

❖ 1. Найти ФСР ЛОДУ соответствующего ЛНДУ и записать его общее решение:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

❖ 2. Записать решение ЛНДУ в форме общего решения ЛОДУ, считая  $C_i = C_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x). \quad (18)$$

❖ 3. Построить систему для определения  $C_i'(x)$  и решить ее согласно (17).

❖ 4. Найти  $C_i(x)$  и подставить их в общее решение ЛНДУ (18).



**Спасибо за внимание**