ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Определение. **Линейными однородными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами** называют уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 , \qquad (6)$$

где коэффициенты $p_1 , p_2 ,\ldots, p_{n-1} , \ p_n - \ const.$

Частные решения будем искать в виде: $\boldsymbol{y = e^{kx}}$ (7)

Определение. Уравнение

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0 \qquad (8)$$

называется **характеристическим уравнением** ЛОДУ с постоянными коэффициентами, а многочлен

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1} k + p_n -$$

характеристическим многочленом.

Алгоритм решения ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

- 1. Составить характеристическое уравнение ($y=e^{kx}$).
- 2. Найти его корни $k_1, k_2, \ldots k_n$.
- 3. По характеру корней найти частные линейно независимые решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ согласно таблице 4.
- 4. Записать общее решение

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Таблица 4 Бер Л.М.

Вид корня	Соответствующие решения
1. Действительный корень k кратности 1	e^{kx}
2. Пара сопряженных корней $a \pm bi$ кратности 1	$e^{ax}\cos bx, \;\; e^{ax}\sin bx$
3. Действительный корень k кратности α	$e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \ldots, x^{\alpha-1}e^{kx}$
4. Пара сопряженных корней $a \pm bi$ кратности α	$e^{ax}\cos bx, \;\; e^{ax}\sin bx$ $xe^{ax}\cos bx, \;\; xe^{ax}\sin bx$ $x^2e^{ax}\cos bx, \;\; x^2e^{ax}\sin bx$ $\ldots$ $x^{\alpha-1}e^{ax}\cos bx, \;\; x^{\alpha-1}e^{ax}\sin bx$

ЛНДУ с произвольными коэффициентами

Вспомним, что ЛНДУ имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x), \qquad (9)$$

где $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), f(x)$ – заданные функции аргумента x, причем $f(x) \neq 0$.

Теорема 4. (*О структуре общего решения ЛНДУ*)

Общее решение ЛНДУ есть сумма его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

При $n = 2$, ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = f(x). \qquad (9')$$

ЛНДУ с произвольными коэффициентами

Теорема 5. (*Принцип суперпозиции решений*)

Если функция $y_i(x)$ – является решением ЛНДУ

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n\text{-}1)} + \ldots + p_{n\text{-}1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f_i(x), \qquad (11)$$

то функция

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_k y_k$$

является решением уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n\text{-}1)} + \ldots + p_n(x)\, y = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_k f_k(x)\,. \qquad (12)$$

При $n = 2$, ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x).$$

ЛНДУ *n*-го порядка

Рассмотрим **ЛНДУ с постоянными коэффициентами**

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x),$$

где коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n - const$.

Метод неопределенных коэффициентов можно применить, если правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{px} [P_m(x) \cos qx + Q_l(x) \sin qx],$$

где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ – многочлены степени m и l соответственно, p и q – некоторые числа.

Форма частного решения

Таблица5 Бер Л.М.

Вид частного решения в зависимости от правой части ЛНДУ в. п.

Свободный член $f(x)$	Вид частного решения
1. $f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m$ а) Число 0 не является корнем х.у.	а) $y^*=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m$
б) Число 0 является корнем х.у. кратности α	б) $y^*=x^\alpha\left(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m\right)$
2. $f(x)=e^{px}\left(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m\right)$ а) Число p не является корнем х.у.	а) $y^*=e^{px}\left(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m\right)$
б) Число p является корнем х.у. кратности α	б) $y^*=x^\alpha e^{px}\left(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m\right)$
3. $f(x)=P_m(x)\cos qx+Q_l(x)\sin qx$ а) $(\pm qi)$ не является корнем х.у.	а) $y^*=\overline{P_s}(x)\cos qx+\overline{Q_s}(x)\sin qx$, $s=\max(m,l)$
б) $(\pm qi)$ является корнем х.у. кратности α	б) $y^*=x^\alpha\left(\overline{P_s}(x)\cos qx+\overline{Q_s}(x)\sin qx\right)$, $s=\max(m,l)$
4. $f(x)=e^{px}\left(P_m(x)\cos qx+Q_l(x)\sin qx\right)$ а) $(p\pm qi)$ не является корнем х.у.	а) $y^*=e^{px}\left[\overline{P_s}(x)\cos qx+\overline{Q_s}(x)\sin qx\right]$, $s=\max(m,l)$
	б) $y^*=x^\alpha e^{px}\left(\overline{P_s}(x)\cos qx+\overline{Q_s}(x)\sin qx\right)$,

ЛНДУ *n*-го порядка

Замечание 1. Степени многочленов $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ в случаях 3,4 таблицы 5 можно считать одинаковой ($\max\{m, l\}$). В этом случае коэффициенты при недостающих степенях одного из многочленов можно считать равными нулю.

Замечание 2. Правая часть уравнения может содержать несколько слагаемых; в этом случае частное решение также составляется из нескольких слагаемых в соответствии с теоремой 5.

Метод Лагранжа для ЛНДУ в п

Система линейных неоднородных уравнений с n неизвестными функциями $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots C_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \quad (17)$$

Алгоритм решения ЛНДУ *n*-го порядка методом Лагранжа

- 1. Найти ФСР ЛОДУ соответствующего ЛНДУ и записать его общее решение:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

- 2. Записать решение ЛНДУ в форме общего решения ЛОДУ, считая $C_i = C_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$:

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \ldots + C_n(x)\, y_n(x). \qquad (18)$$

- 3. Построить систему для определения $C_i'(x)$ и решить ее согласно (17).
- 4. Найти $C_i(x)$ и подставить их в общее решение ЛНДУ (18).

Спасибо за внимание