Пределы

1. Предел функции на бесконечности

Пусть дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $[a; +\infty)$, и пусть прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 115). Для описания этой геометрической модели используют короткую запись:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности равен b*).

Если же дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $(-\infty; a]$, и прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 116), то в этом случае используют запись:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к минус бесконечности равен b*).

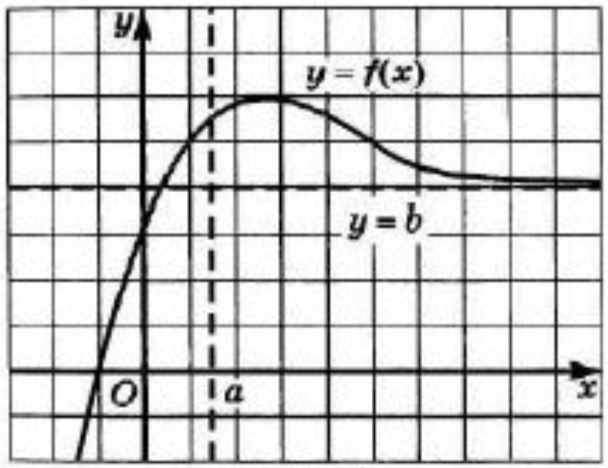


Рис. 115

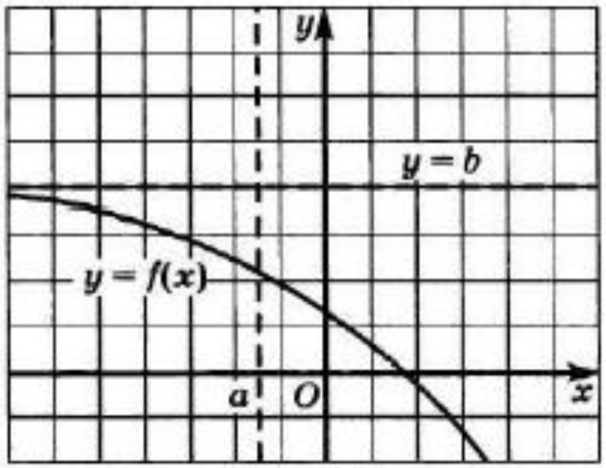


Рис. 116

Если одновременно выполняются соотношения:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{(рис. 117), —}$$

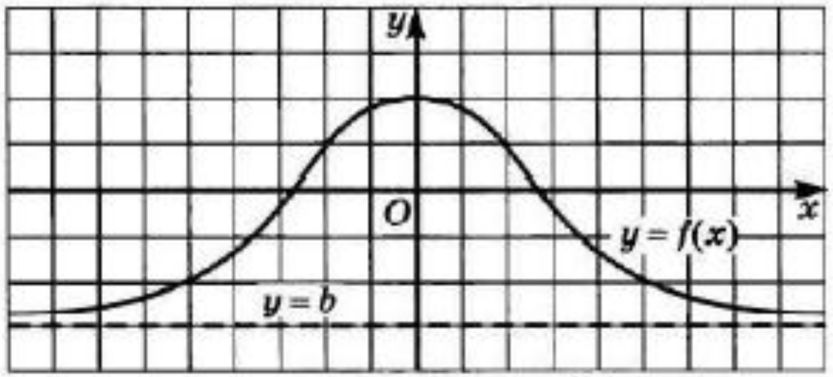


Рис. 117

Если $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$, то

а) *предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = b + c;$$

б) *предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = bc;$$

в) *предел частного равен частному пределов (разумеется, при условии, что* $c \neq 0$*):*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c};$$

г) *постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\lim_{x\to\infty} kf(x) = kb.$$

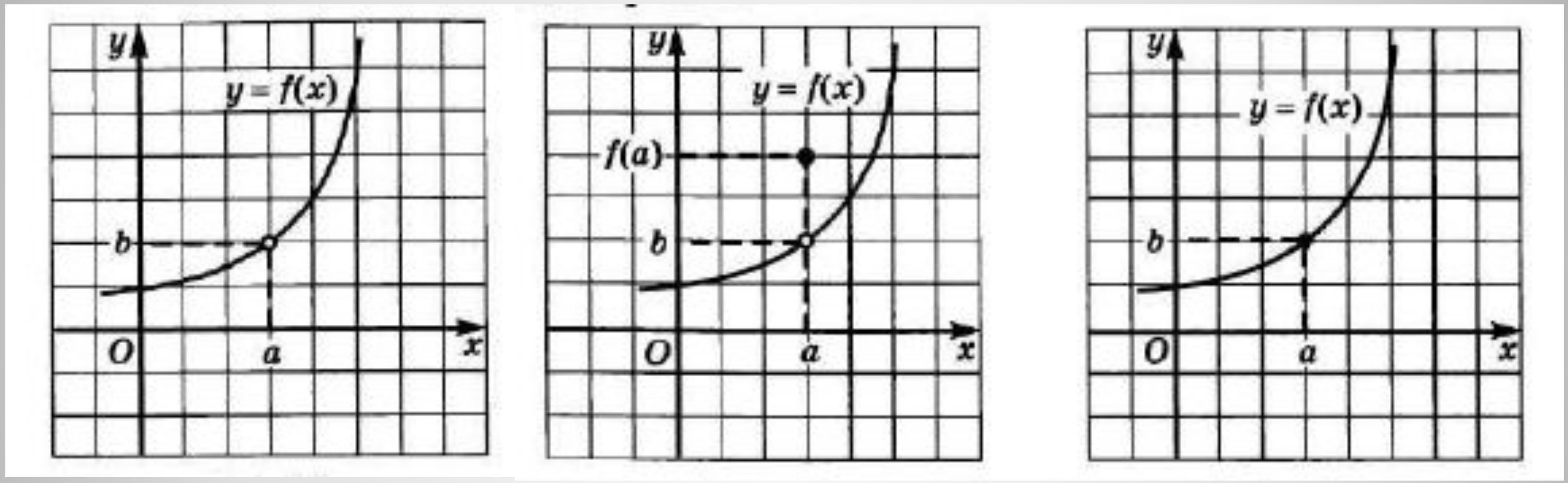
Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 - 4}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на x^2:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^2} + \dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \dfrac{3}{x^2}}{1 - \dfrac{4}{x^2}}.$$

Поскольку предел числителя равен $2 + 0 = 2$, а предел знаменателя равен $1 - 0 = 1$, то предел дроби равен $\dfrac{2}{1} = 2$.

Предел функции в точке



Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной в точке $x = a$**, если выполняется соотношение

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

Решение. Выражение $x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ определено в любой точке x, в частности в точке $x = 1$. Следовательно, функция $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$.

Решение. Выражение $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$ определено в любой точке $x \geqslant 0$, в частности в точке $x = 2$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$, а потому предел функции при стремлении x к 2 равен значению функции в точке $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2+4}} = \frac{0}{\sqrt{2+4}} = 0.$$

Вы заметили, наверное, что в рассмотренных примерах вычисление пределов не вызвало затруднений: достаточно было найти значение функции в точке, к которой стремится аргумент x. Но бывают случаи, когда этот прием не срабатывает.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

Решение. Если подставить значение $x = -3$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0, а на 0 делить нельзя. Но заданную алгебраическую дробь можно сократить:

$$\frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \frac{x-3}{4}.$$

Теорема. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то:

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$;

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = bc$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (при условии, что $c \neq 0$);

4) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = kb$.

Пример 6. Построить график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$;

3) $f(-2) = 1$, $f(0) = 4$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

5) $f(x) < 0$ при $x < -2$.

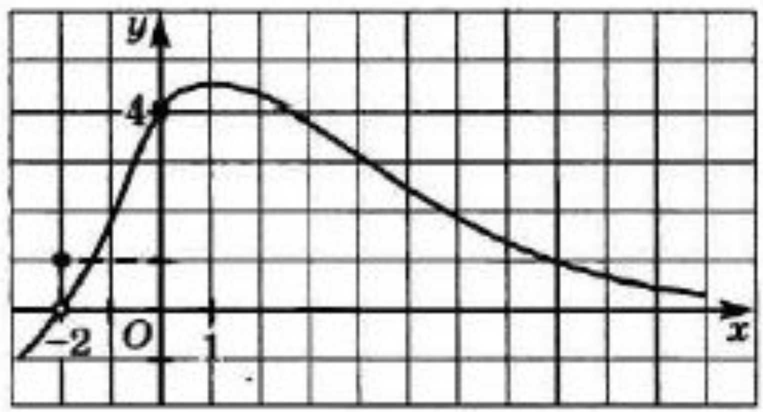


Рис. 125