Непрерывность функции

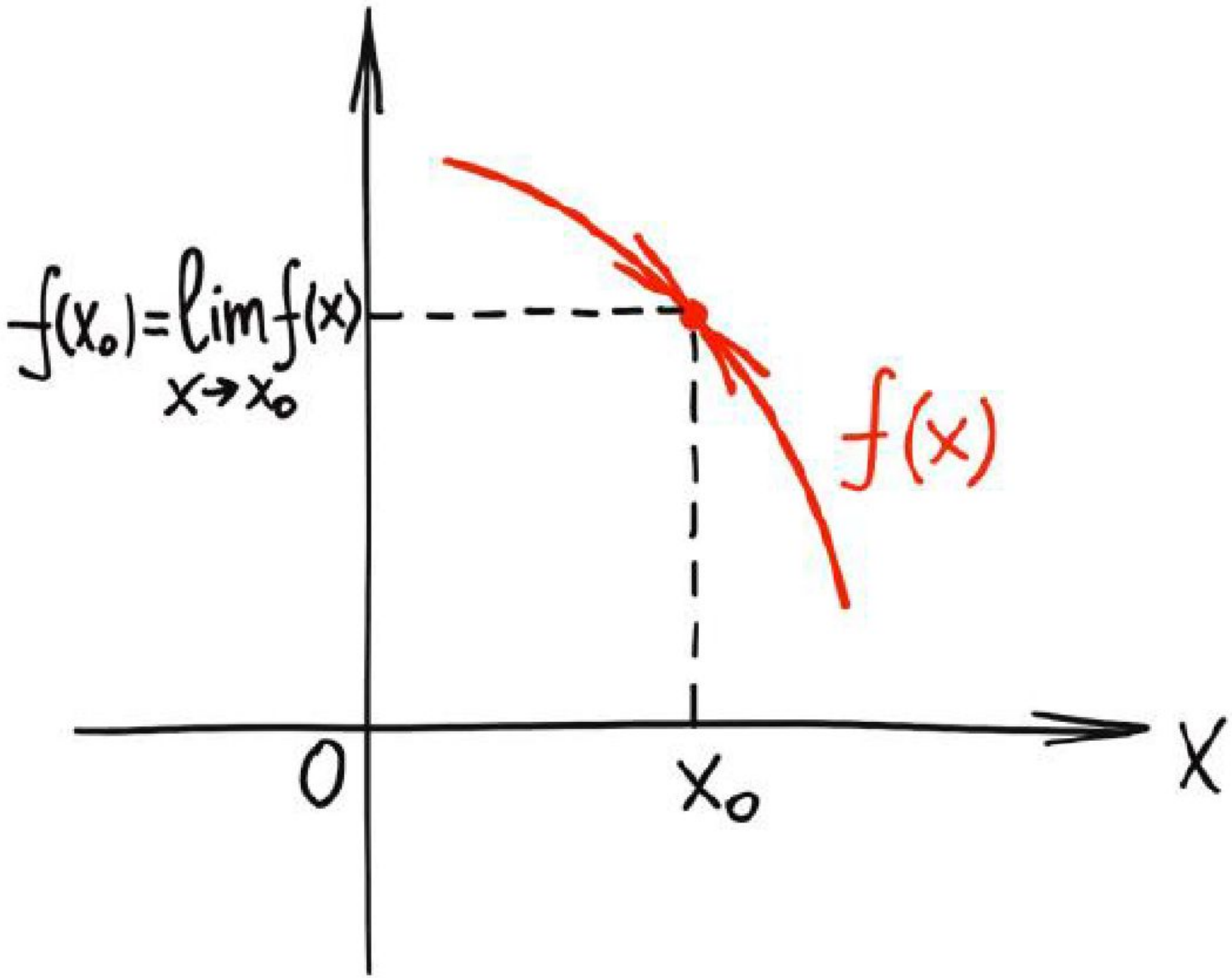
Определение непрерывности, классификация разрывов

Определение 5.1 (непрерывность в точке)

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, включающем некоторую проколотую окрестность точки x_0.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (иначе говоря, $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$).

Функция $f(x)$ называется *разрывной в точке* x_0, если она не является непрерывной, т. е. она не определена в точке x_0 или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.


$f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$
$f(x)$
0
x_0
X

1. Используем определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

2. Используем определение предела по Гейне:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \quad x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) .$$

3. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0,

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции в точке x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x - x_0 \to 0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0 .$$

4. Поскольку $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то непрерывность функции в точке x_0 означает, что можно поменять местами предельный переход и функцию: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$.

Лемма 5.2

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда в точке x_0 также непрерывны следующие функции:

$$f(x)+g(x);$$

$$\lambda f(x),\ \lambda \in \mathbb{R};$$

$$f(x)\cdot g(x);$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } g(x_0) \neq 0.$$

Лемма 5.3 (непрерывность композиции непрерывных функций)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.

Определение 5.4 (непрерывность на промежутке)

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на открытом промежутке* $(a;b)$, $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, если она определена и непрерывна в каждой точке $x_0 \in (a;b)$.

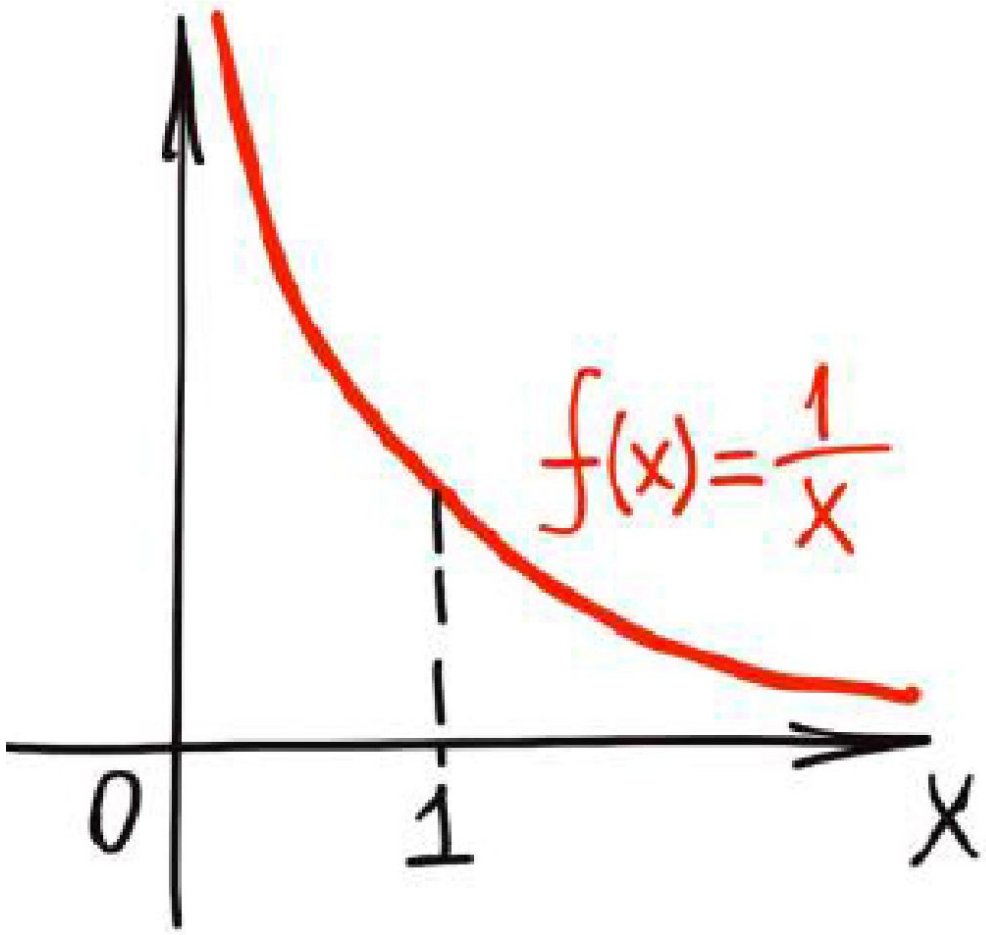
Функция $f(x)$ называется *непрерывной на замкнутом промежутке* $[a;b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, если она определена на $[a;b]$, непрерывна на $(a;b)$ и

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \text{ (\textit{непрерывна справа} в точке } a\text{)},$$

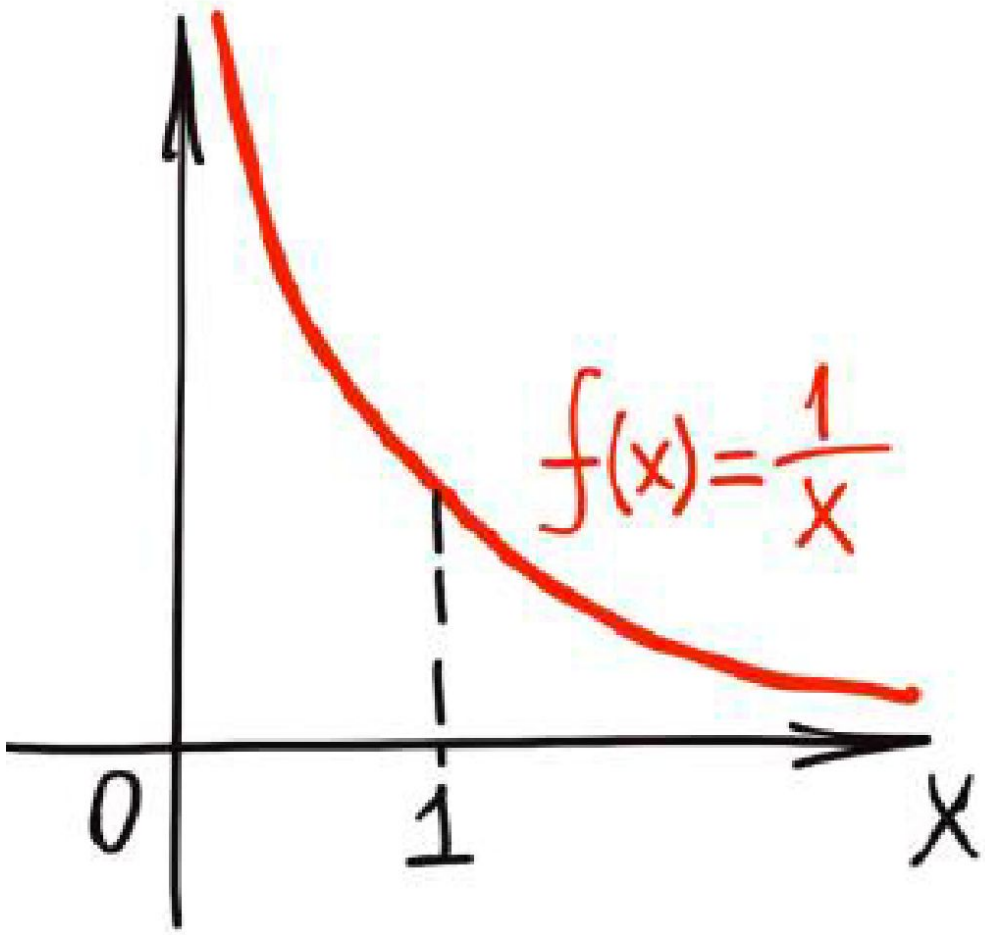
$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b) \text{ (\textit{непрерывна слева} в точке } b\text{)}.$$

Аналогичным образом определяется непрерывность функции на полуоткрытых промежутках $[a;b)$, $(a;b]$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

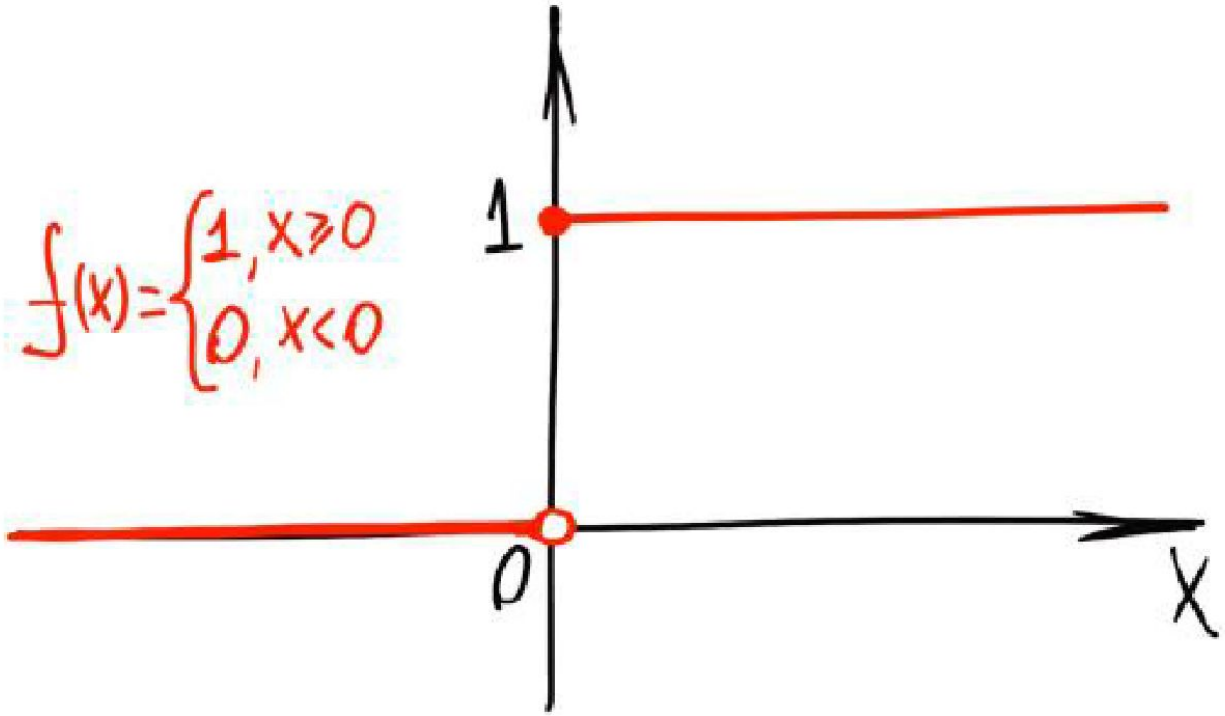


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

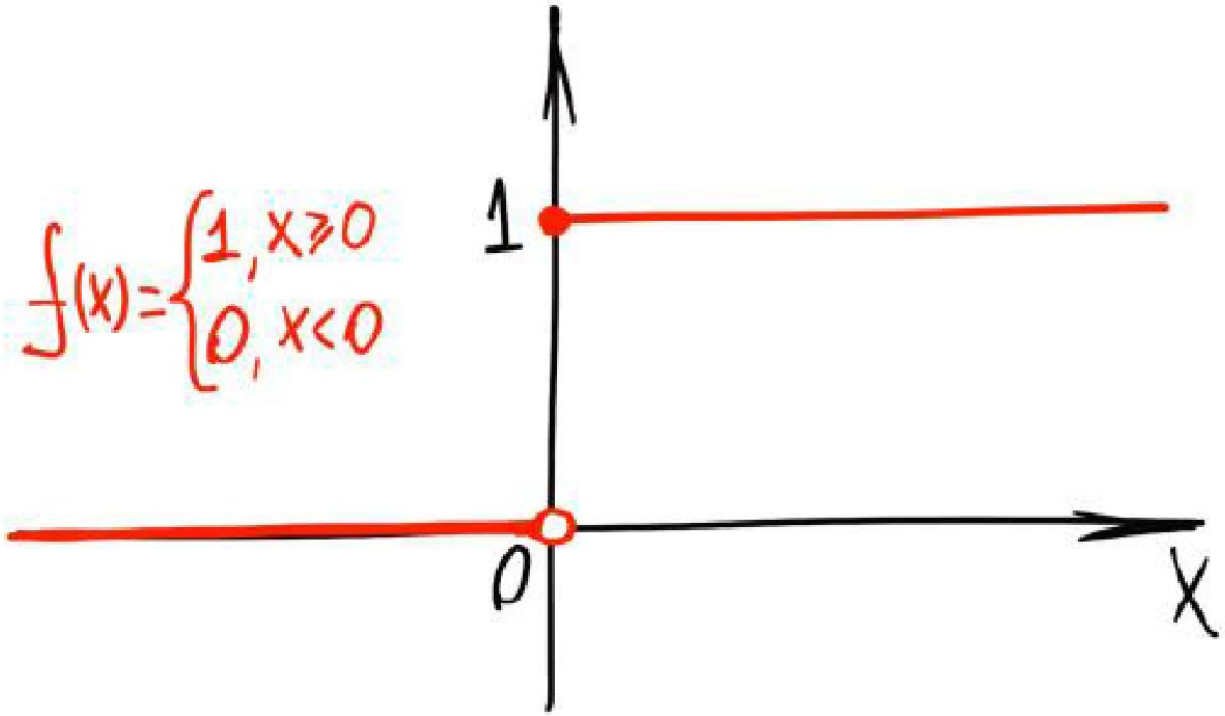


непрерывна на $(0;1)$, но не является непрерывной на $[0;1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$



непрерывна на $[0;1]$, но не является непрерывной на $[-1;0]$

Лемма 5.5 (непрерывность элементарных функций) [без подробного доказательства]
Пусть $f(x)$ – элементарная функция. Тогда она непрерывна на каждом (невырожденном) промежутке своей области определения.

Лемма 5.5 (непрерывность элементарных функций) [без подробного доказательства]
Пусть $f(x)$ – элементарная функция. Тогда она непрерывна на каждом (невырожденном) промежутке своей области определения.

Идея доказательства:

утверждение леммы проверяется непосредственно для основных элементарных функций; затем используется определение элементарной функции как результата конечного числа арифметических операций и композиций над основными элементарными функциями

Классификация разрывов

Разрывы I рода

Разрыв II рода

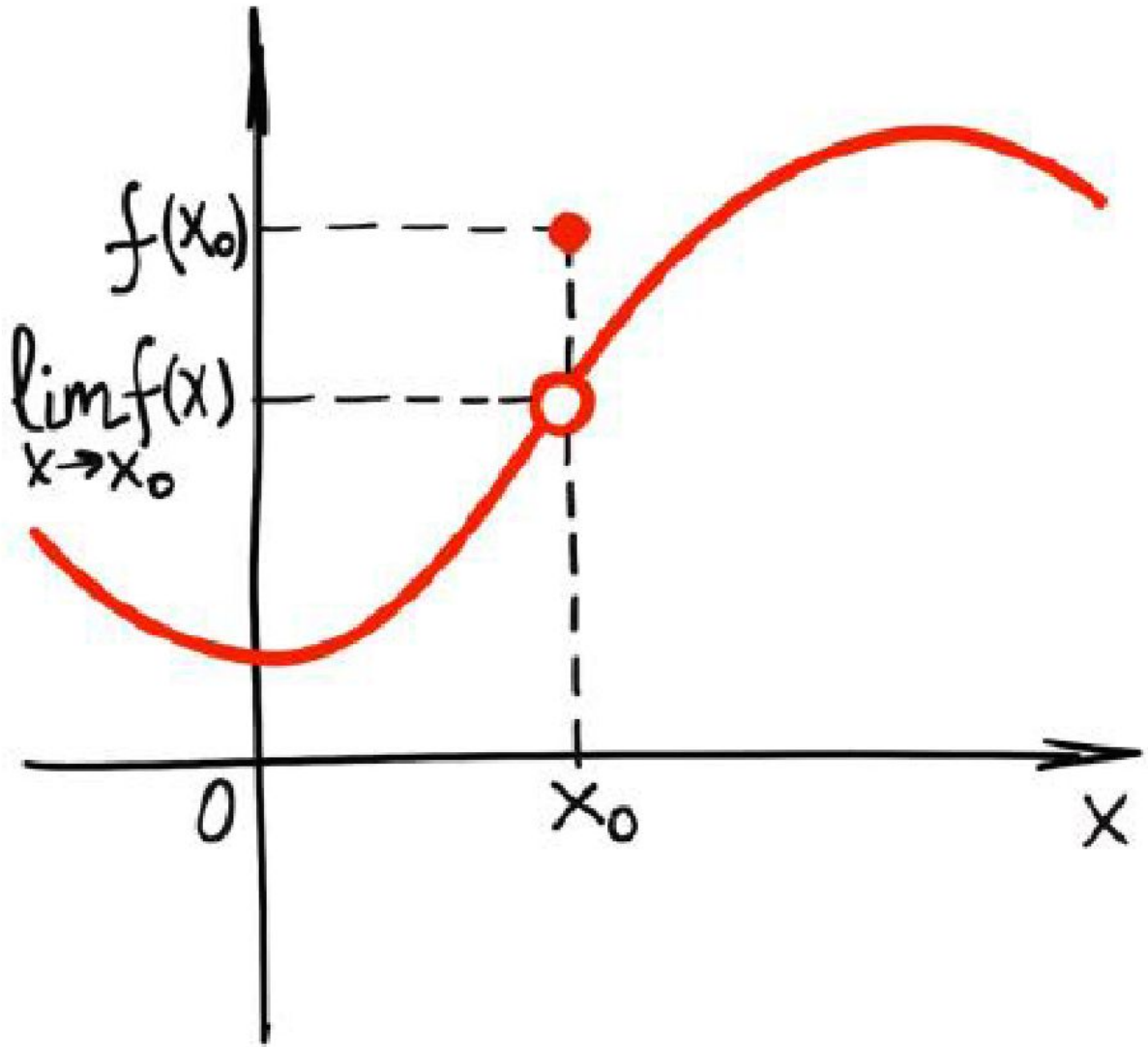
(всегда неустранимый)

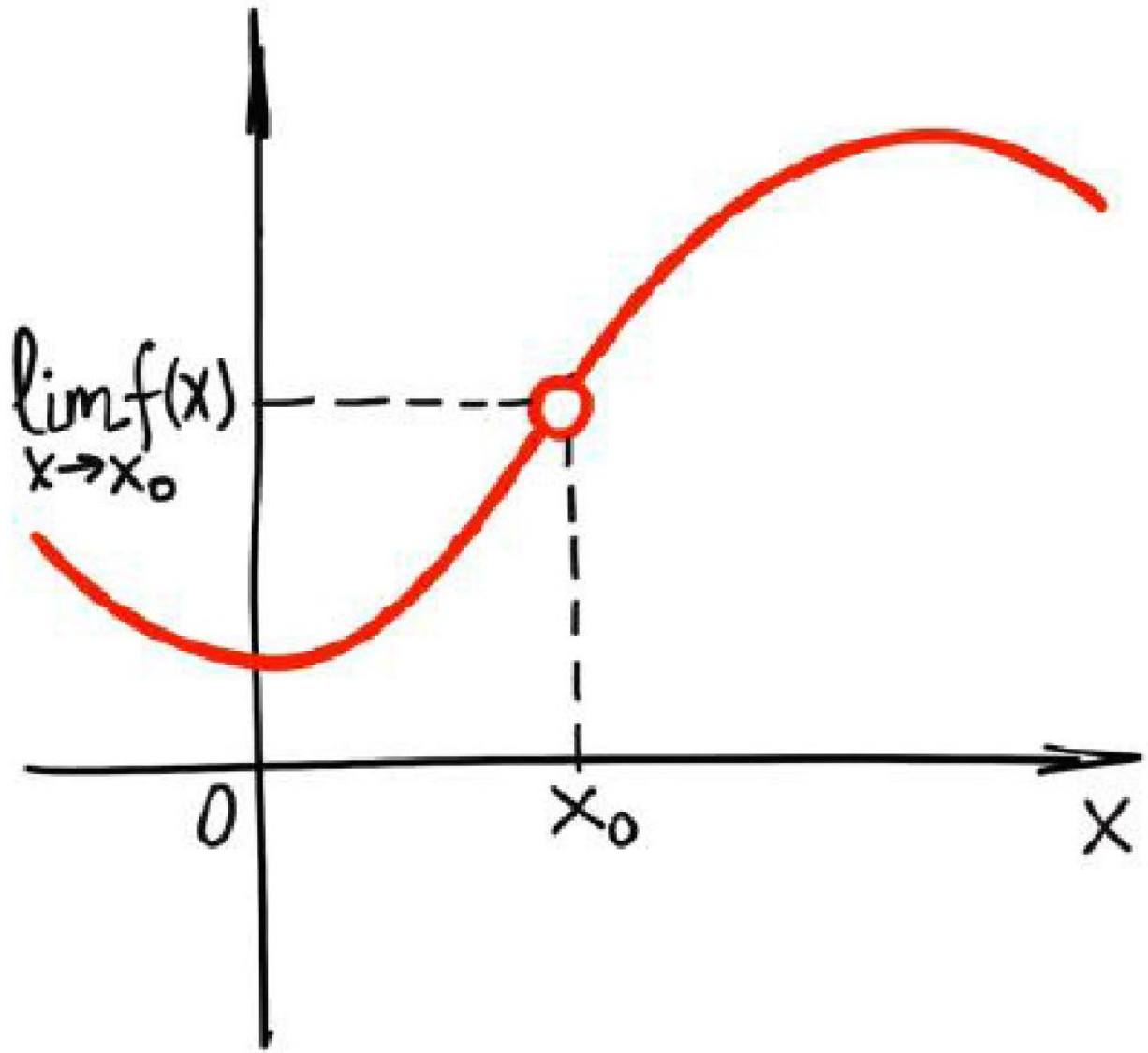
Устранимый разрыв I рода

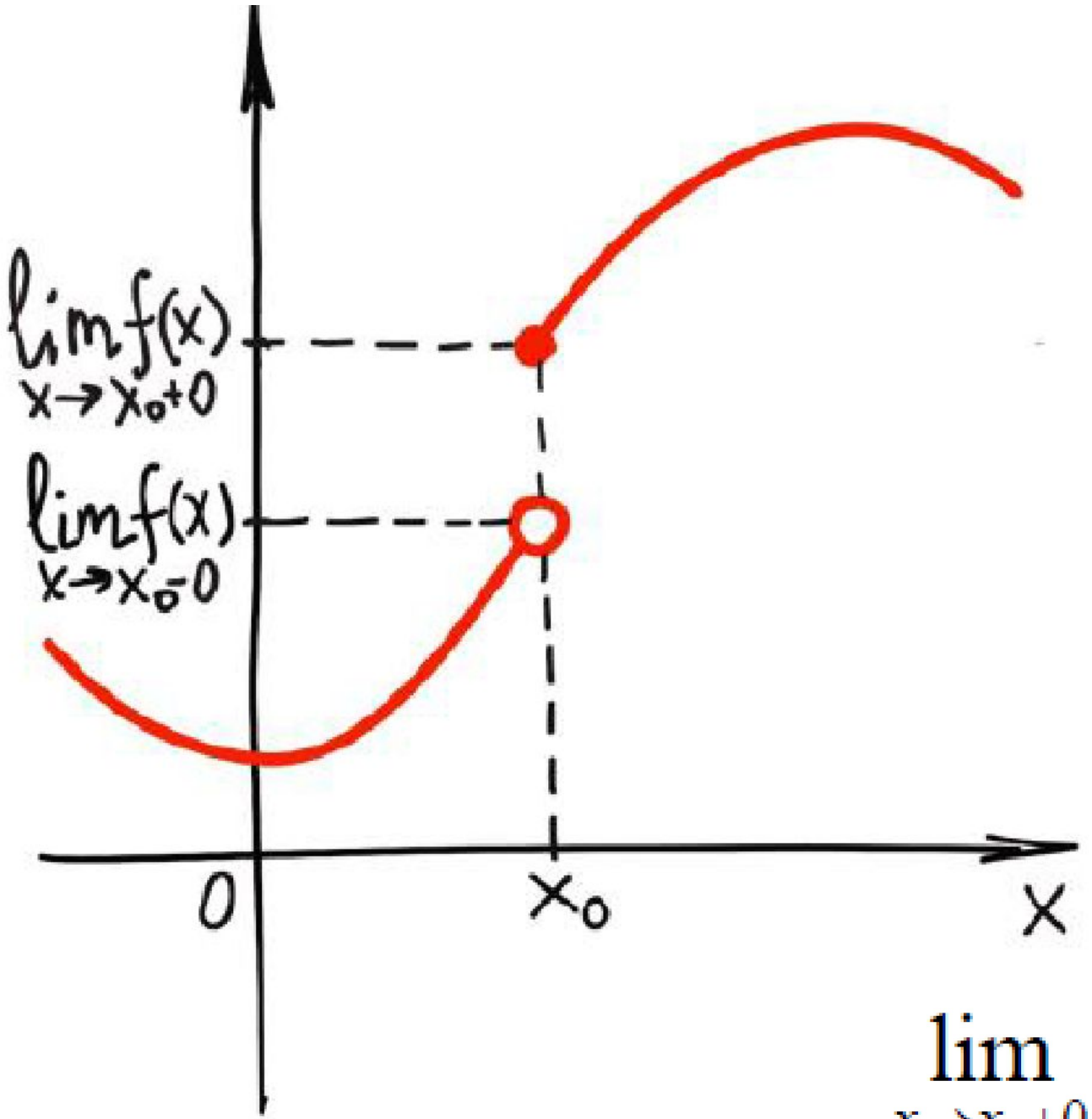
(выколотая точка)

Неустранимый разрыв I рода

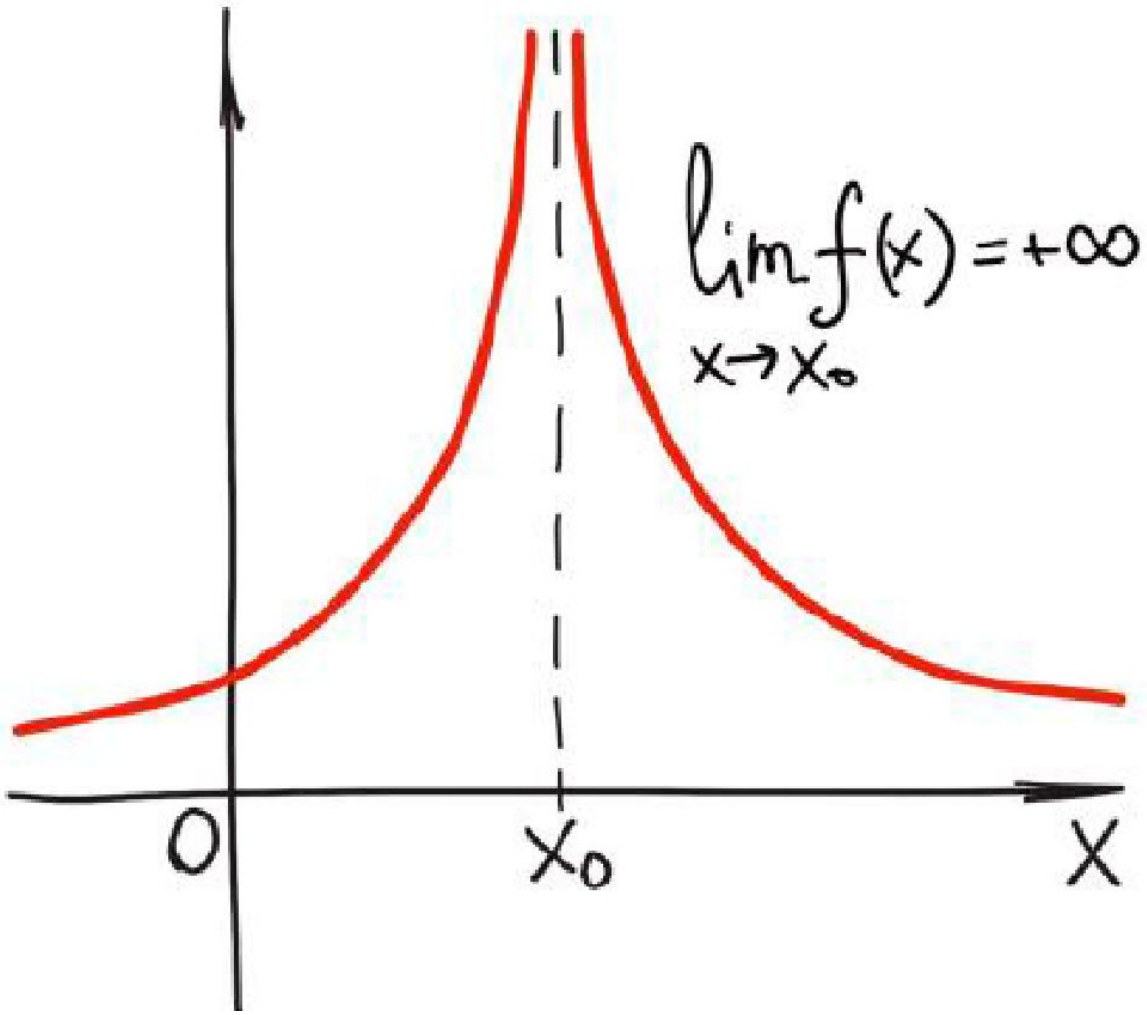
(скачок)

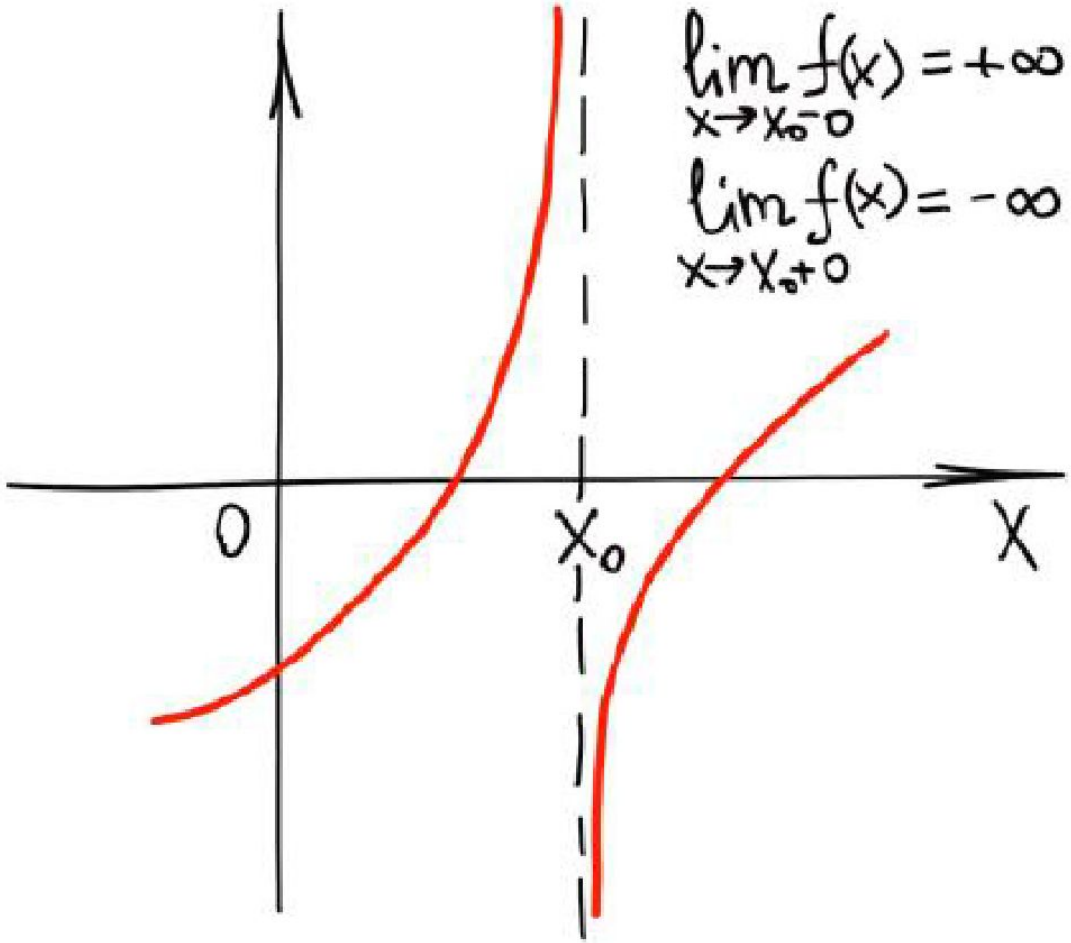

$f(x_0)$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
0
x_0
x

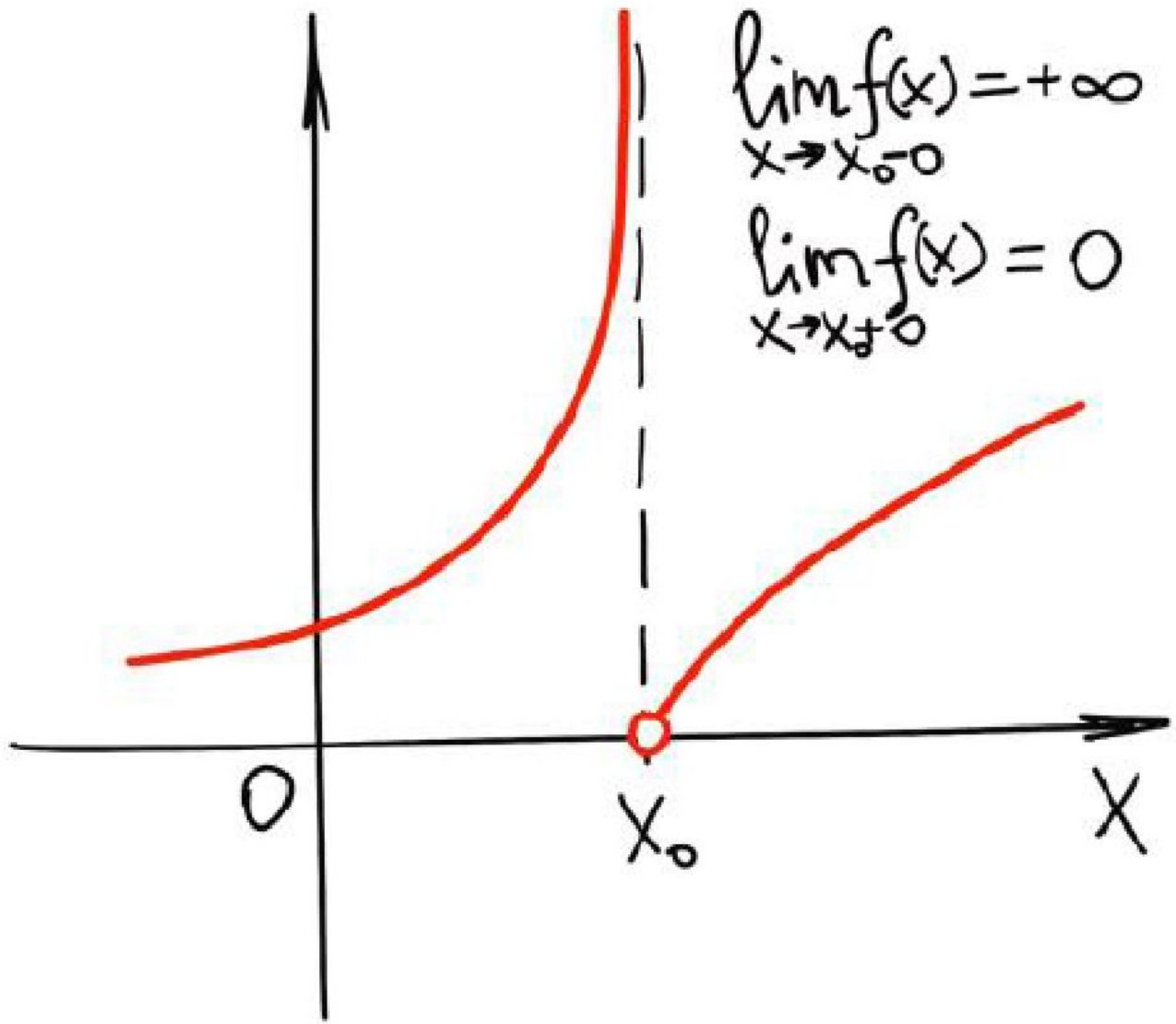

$\lim_{x \to x_0} f(x)$
0
x_0
x

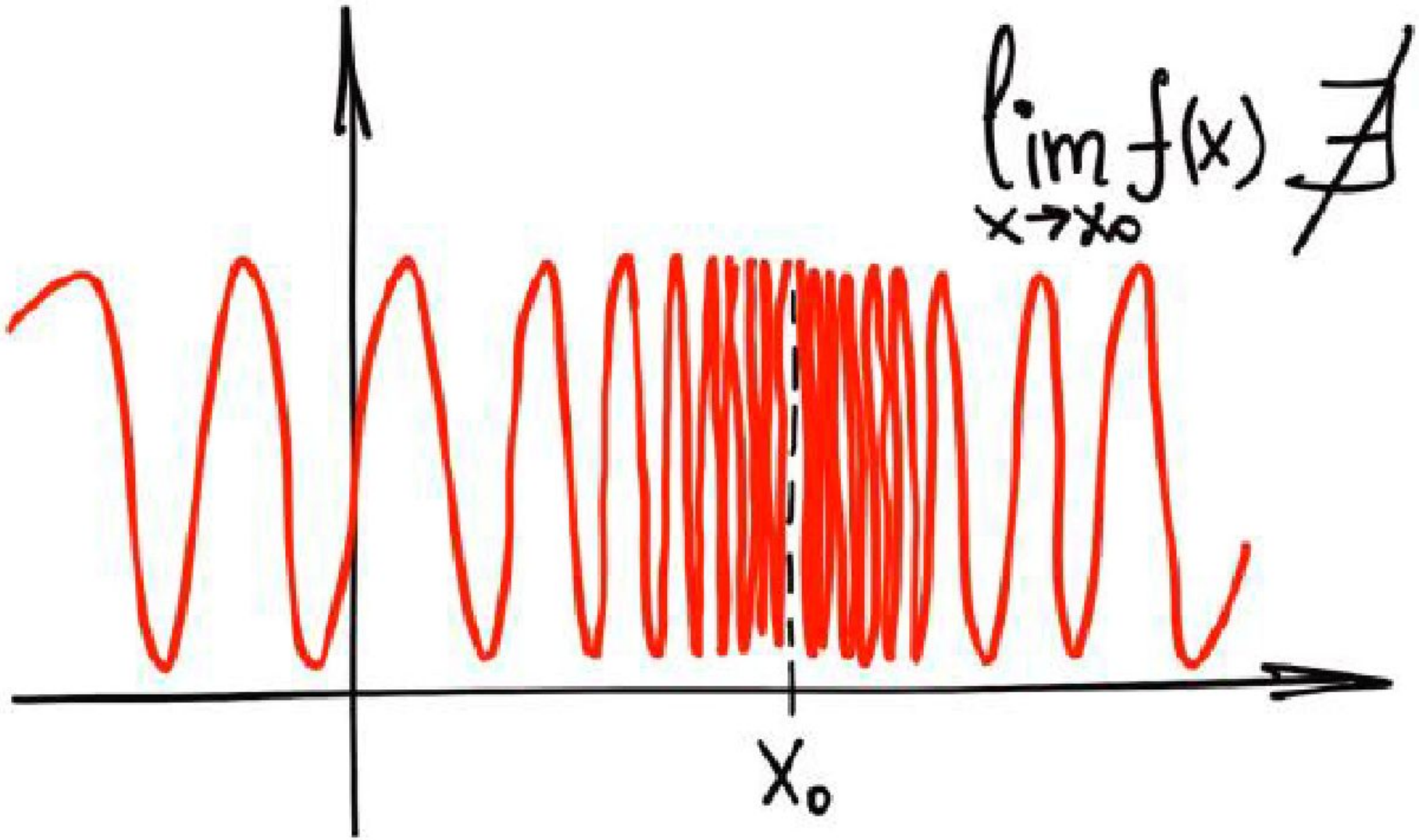


$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$


$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
0
x_0
x


$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$
0
x_0
x


$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = 0$
0
x_0
x


$\lim_{x \to x_0} f(x) \nexists$
x_0

Задача. Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{3 - x}$$

Задача. Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{3-x}$$

Область определения функции $f(x)$: $\dfrac{x^2}{3-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$

Задача. Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{3-x}$$

Область определения функции $f(x): \dfrac{x^2}{3-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$

Поскольку данная функция является элементарной, то она непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; 3)$.

Задача. Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{3-x}$$

Область определения функции $f(x): \dfrac{x^2}{3-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$

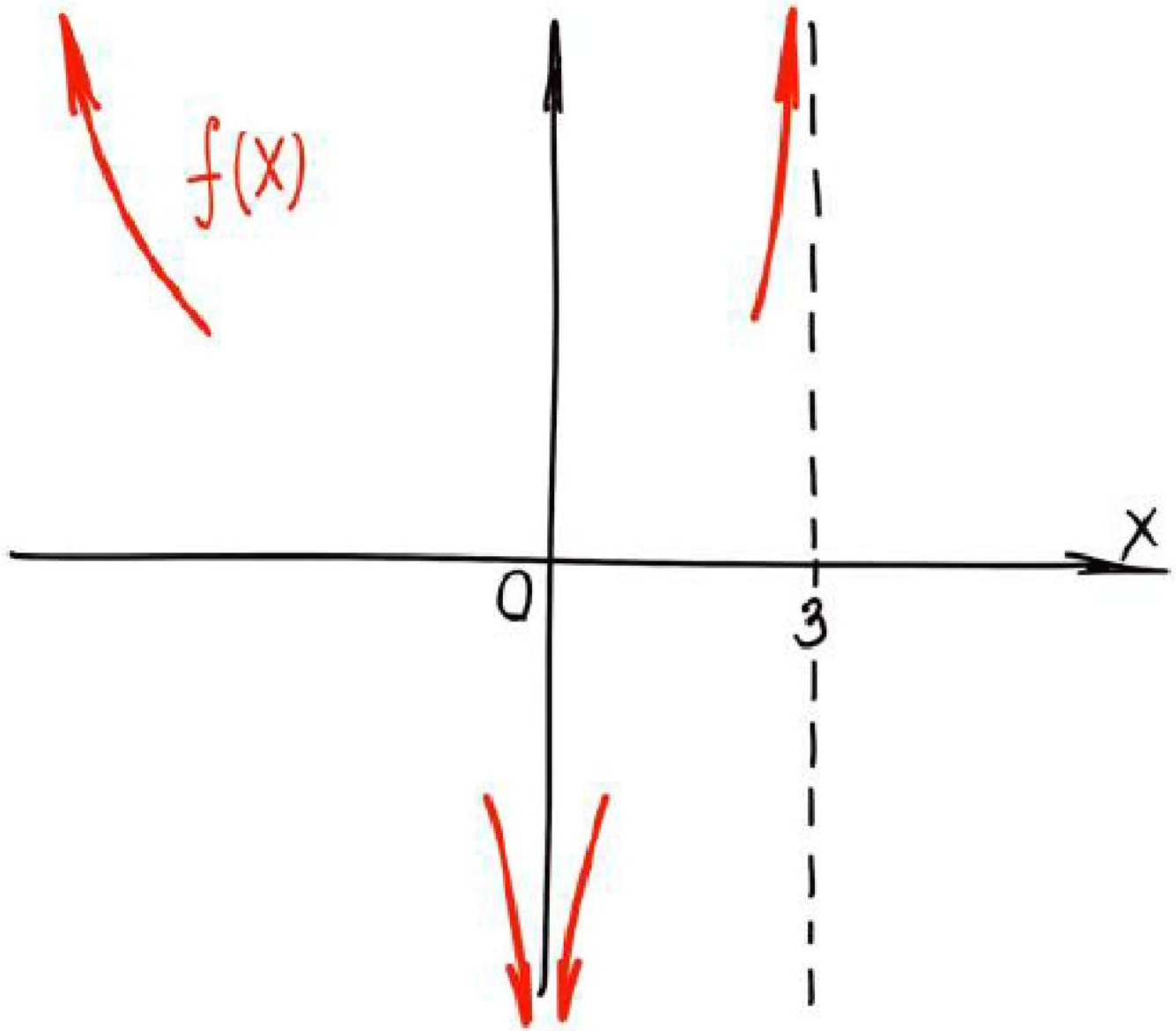
Поскольку данная функция является элементарной, то она непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; 3)$.

$$\lim_{x \to 0} \ln \frac{x^2}{3-x} = -\infty$$

Значит, в точке $x = 0$ имеется разрыв второго рода

Определим предельное поведение функции на оставшихся краях области определения, которые не являются точками разрыва:

$$\lim_{x \to 3-0} \ln \frac{x^2}{3-x} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \ln \frac{x^2}{3-x} = +\infty$$


f(x)
x
0
3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\pi x+1}{x-1}, & x>1\\ \arcsin x, & -1\le x\le 1\\ \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{1-x^2}, & x<-1\end{cases}$$

Исследуем точку $x = -1$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \arcsin x = -\frac{\pi}{2} \ ;$$

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{1 - x^2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

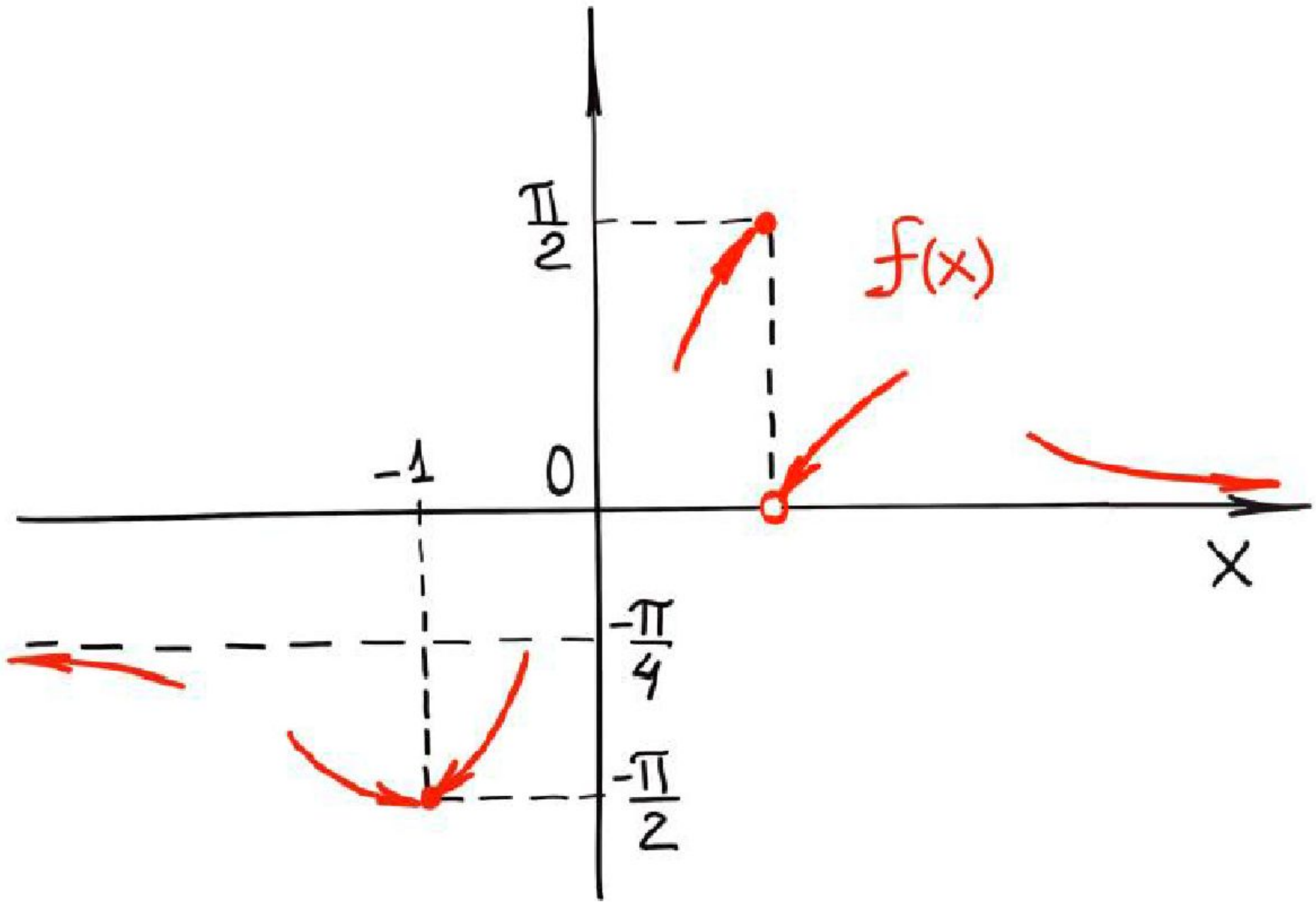
Поскольку $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = -1$

Исследуем точку $x = 1$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{\cos \pi x + 1}{x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \frac{\pi}{2} \ .$$

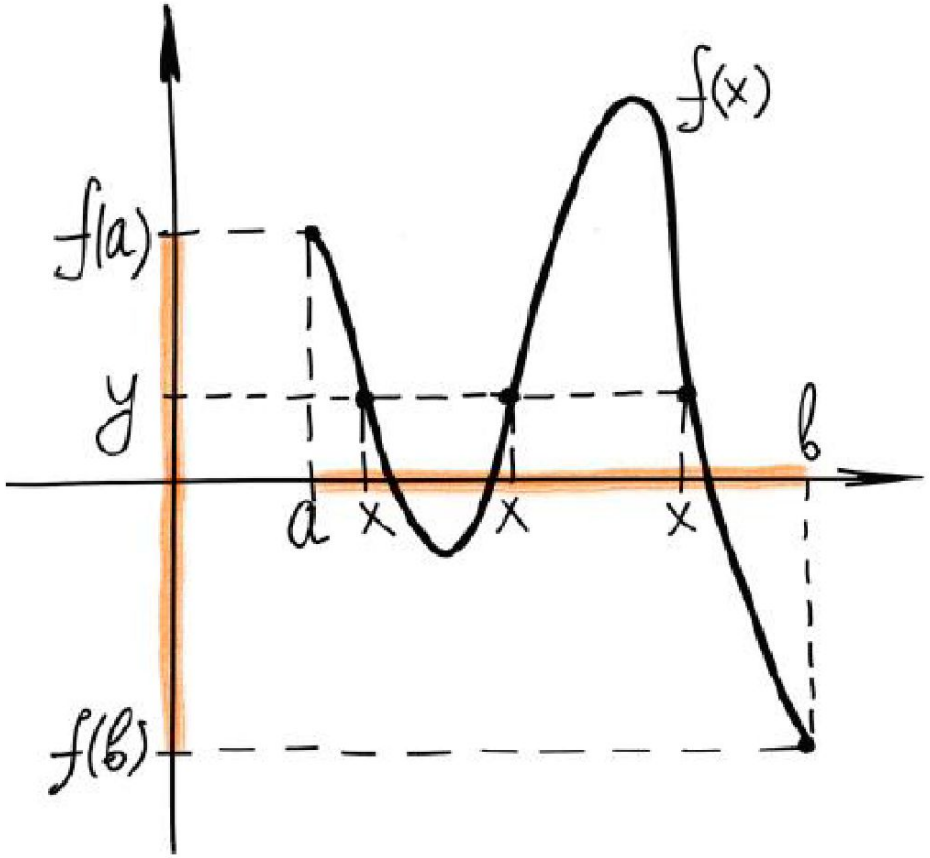

$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$
-1
0
x
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$

Свойства непрерывных функций на замкнутом промежутке

Теорема 5.6 (Больцано – Коши) [без доказательства, очевидно по рисунку]
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$:

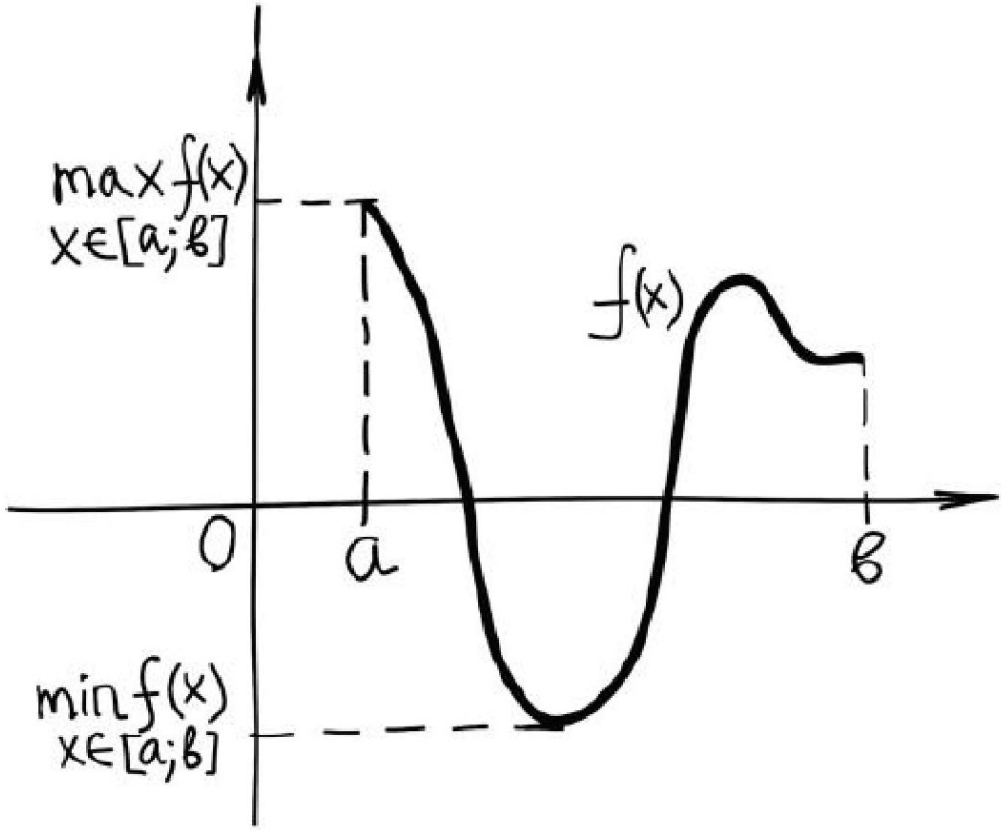
$$\forall y \in \left(f(a); f(b)\right)\ \exists x \in (a;b):\ f(x) = y \quad \text{(в случае } f(a) < f(b)\text{)}.$$

В частности, если $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (или наоборот), то $\exists x \in (a;b):\ f(x) = 0$.



Теорема 5.6 (Вейерштрасса) [без доказательства, очевидно по рисунку]
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда $f(x)$ ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений на $[a;b]$:

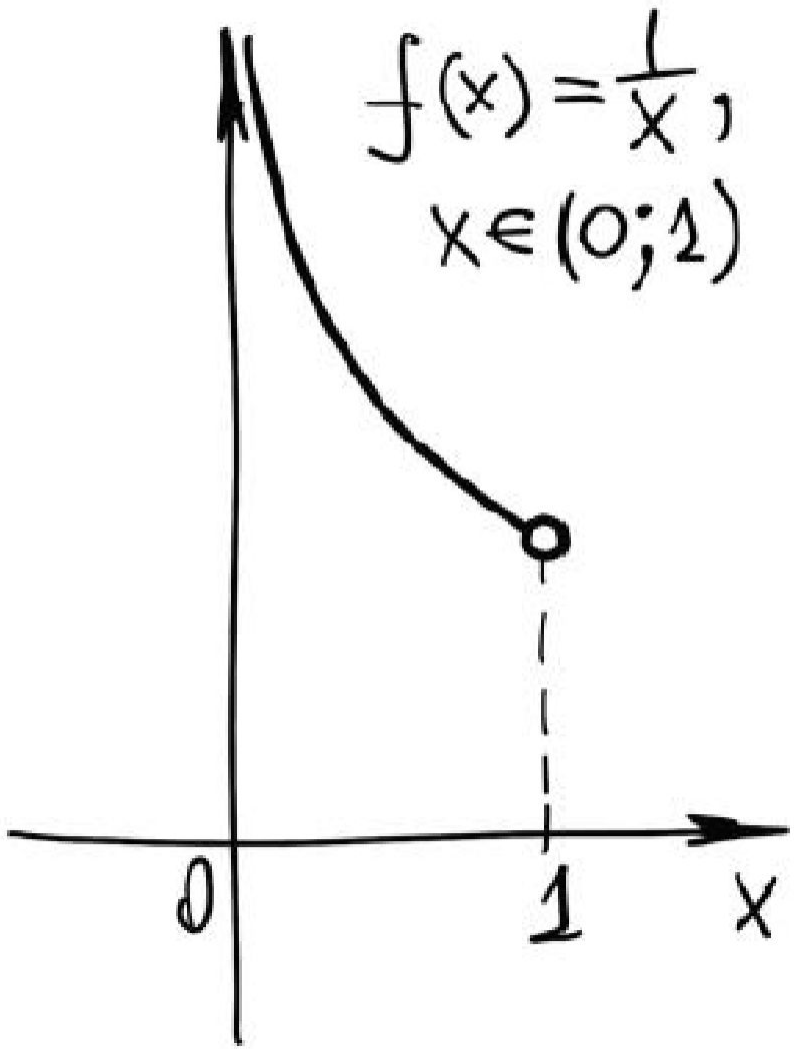
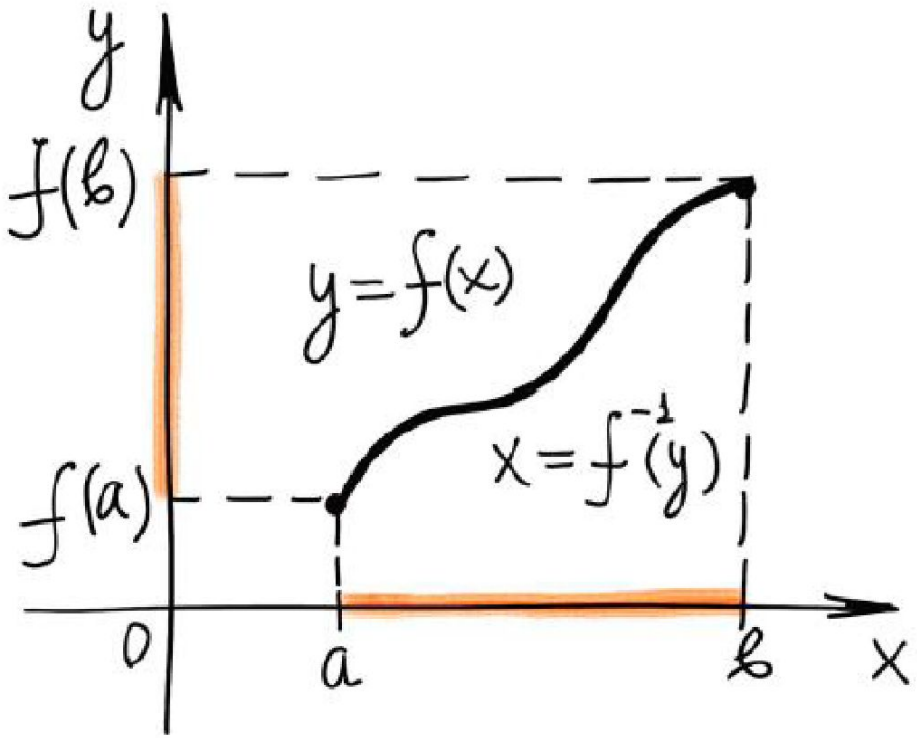
$$\exists \max_{x\in[a,b]} f(x),\ \exists \min_{x\in[a,b]} f(x).$$



$f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на $(0;1)$

$$\max_{x\in(0;1)}\frac{1}{x}=\max(1;+\infty)$$ не существует;

$$\min_{x\in(0;1)}\frac{1}{x}=\min(1;+\infty)$$ не существует.



Теорема 5.7 (непрерывность обратной функции)
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на промежутке $[a;b]$ (допустим, возрастает). Тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая непрерывна на промежутке $[f(a); f(b)]$.