

Непрерывность функции

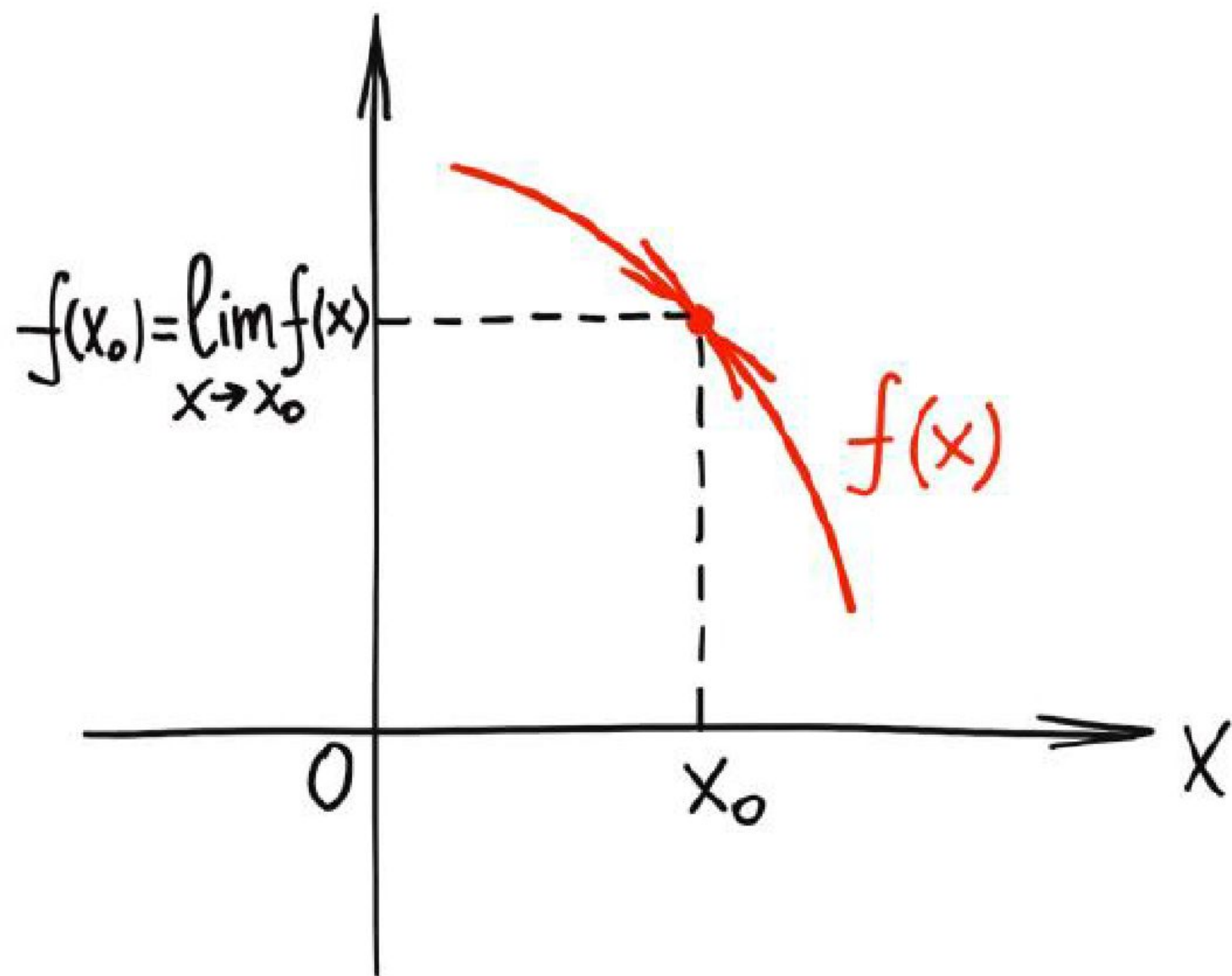
**Определение
непрерывности,
классификация разрывов**

Определение 5.1 (непрерывность в точке)

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, включающем некоторую проколотую окрестность точки x_0 .

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если она определена в точке x_0 и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (иначе говоря, $f(x) \rightarrow f(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$).

Функция $f(x)$ называется *разрывной в точке x_0* , если она не является непрерывной, т. е. она не определена в точке x_0 или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.



1. Используем определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

2. Используем определение предела по Гейне:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \quad x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) .$$

3. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0 ,

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции в точке x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 .$$

4. Поскольку $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$, то непрерывность функции в точке x_0 означает, что можно

поменять местами предельный переход и функцию: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$.

Лемма 5.2

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда в точке x_0 также непрерывны следующие функции:

$$f(x) + g(x);$$

$$\lambda f(x), \lambda \in \mathbb{R};$$

$$f(x) \cdot g(x);$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } g(x_0) \neq 0.$$

Лемма 5.3 (непрерывность композиции непрерывных функций)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Определение 5.4 (непрерывность на промежутке)

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на открытом промежутке* $(a;b)$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, если она определена и непрерывна в каждой точке $x_0 \in (a;b)$.

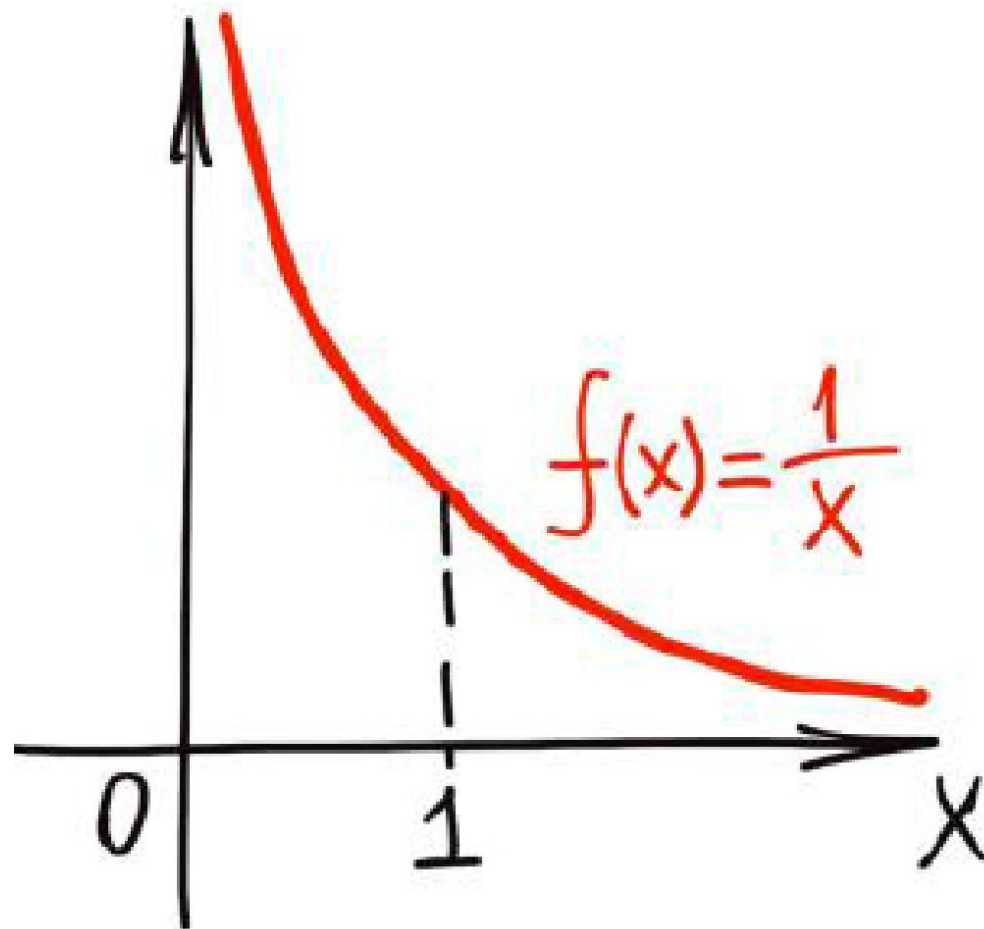
Функция $f(x)$ называется *непрерывной на замкнутом промежутке* $[a;b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, если она определена на $[a;b]$, непрерывна на $(a;b)$ и

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \text{ (непрерывна справа в точке } a),$$

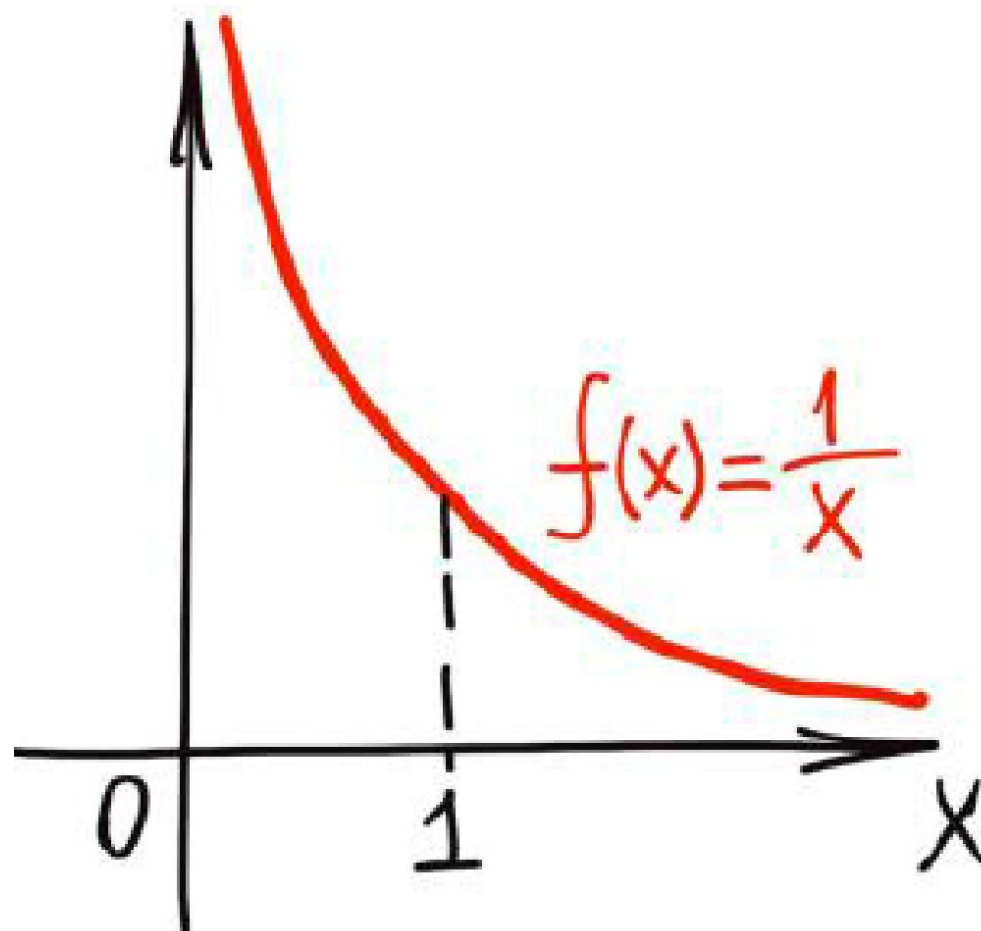
$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b) \text{ (непрерывна слева в точке } b).$$

Аналогичным образом определяется непрерывность функции на *полуоткрытых промежутках* $[a;b)$, $(a;b]$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

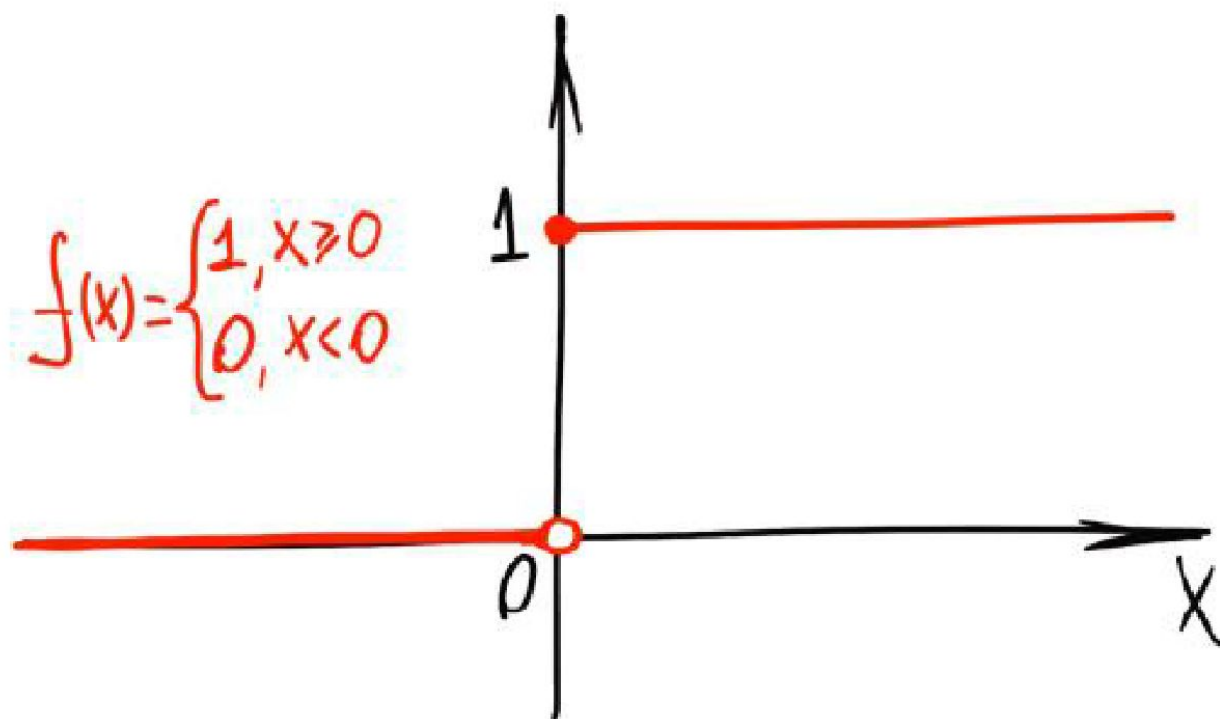


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

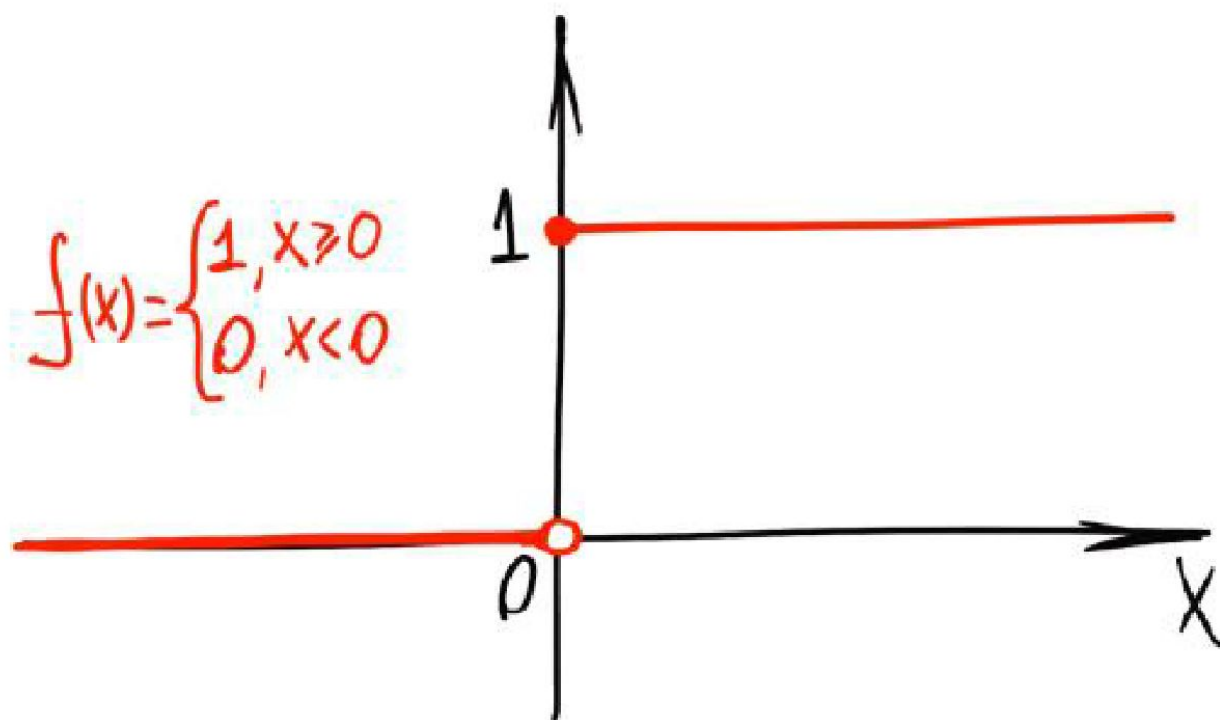


непрерывна на $(0;1)$, но не является непрерывной на $[0;1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



непрерывна на $[0; 1]$, но не является непрерывной на $[-1; 0]$

Лемма 5.5 (непрерывность элементарных функций) [без подробного доказательства]
Пусть $f(x)$ – элементарная функция. Тогда она непрерывна на каждом (невырожденном) промежутке своей области определения.

Лемма 5.5 (непрерывность элементарных функций) [без подробного доказательства]
Пусть $f(x)$ – элементарная функция. Тогда она непрерывна на каждом (невырожденном) промежутке своей области определения.

Идея доказательства:

утверждение леммы проверяется непосредственно для основных элементарных функций; затем используется определение элементарной функции как результата конечного числа арифметических операций и композиций над основными элементарными функциями

Классификация разрывов

```
graph TD; A[Классификация разрывов] --> B[Разрывы I рода]; A --> C[Разрыв II рода]; B --> D[Устранимый разрыв I рода]; B --> E[Неустранимый разрыв I рода];
```

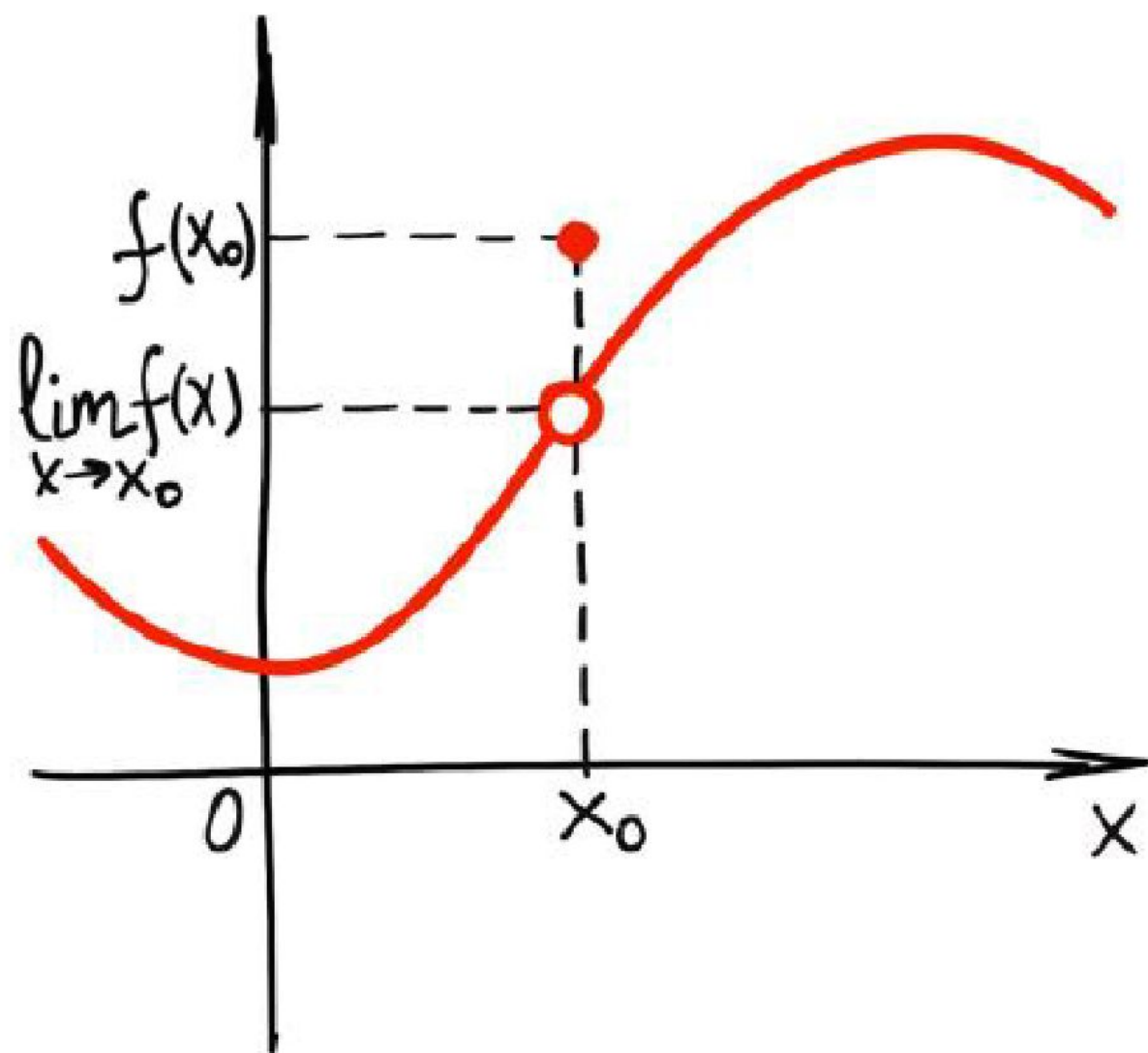
Разрывы I рода

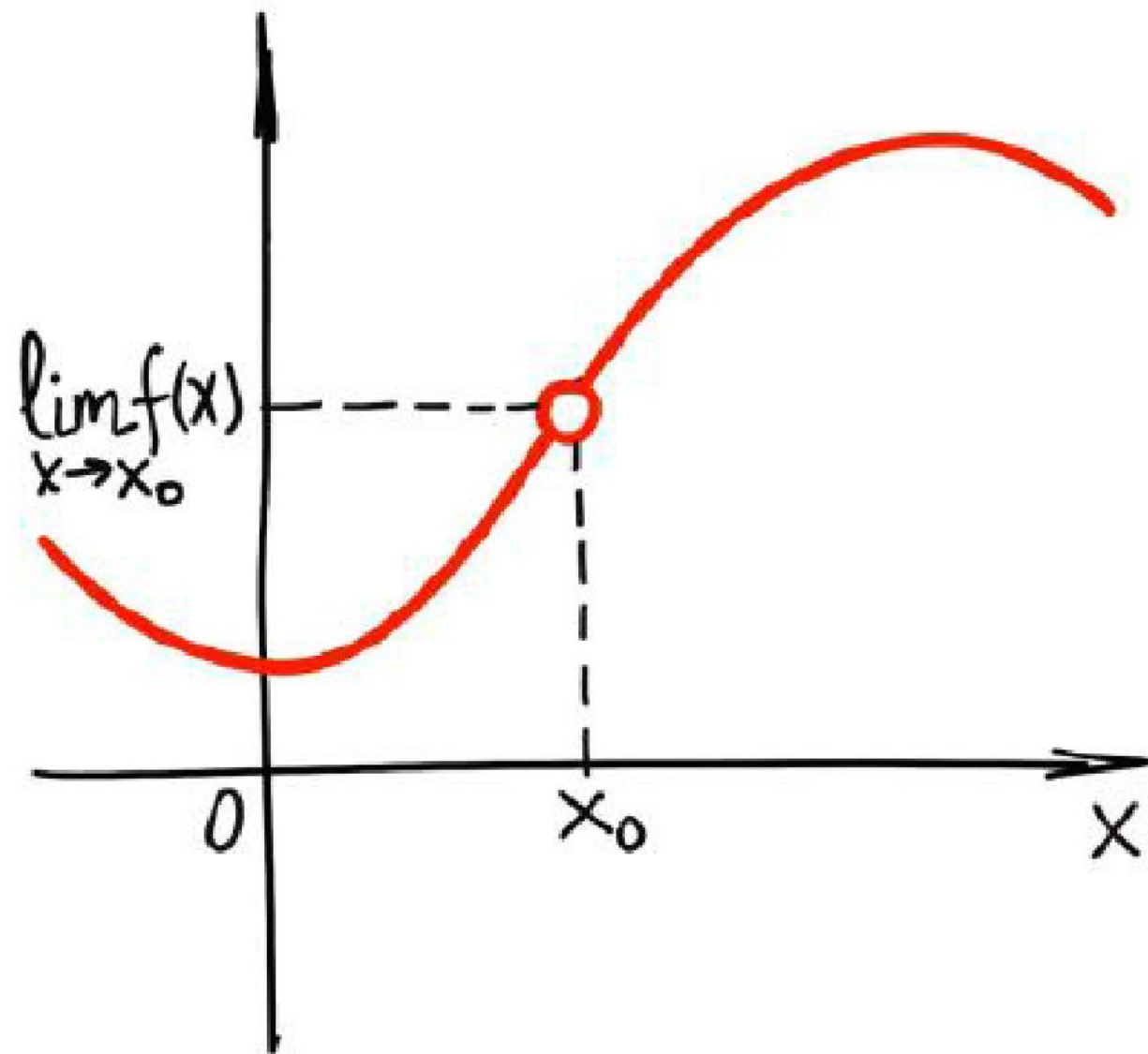
Разрыв II рода

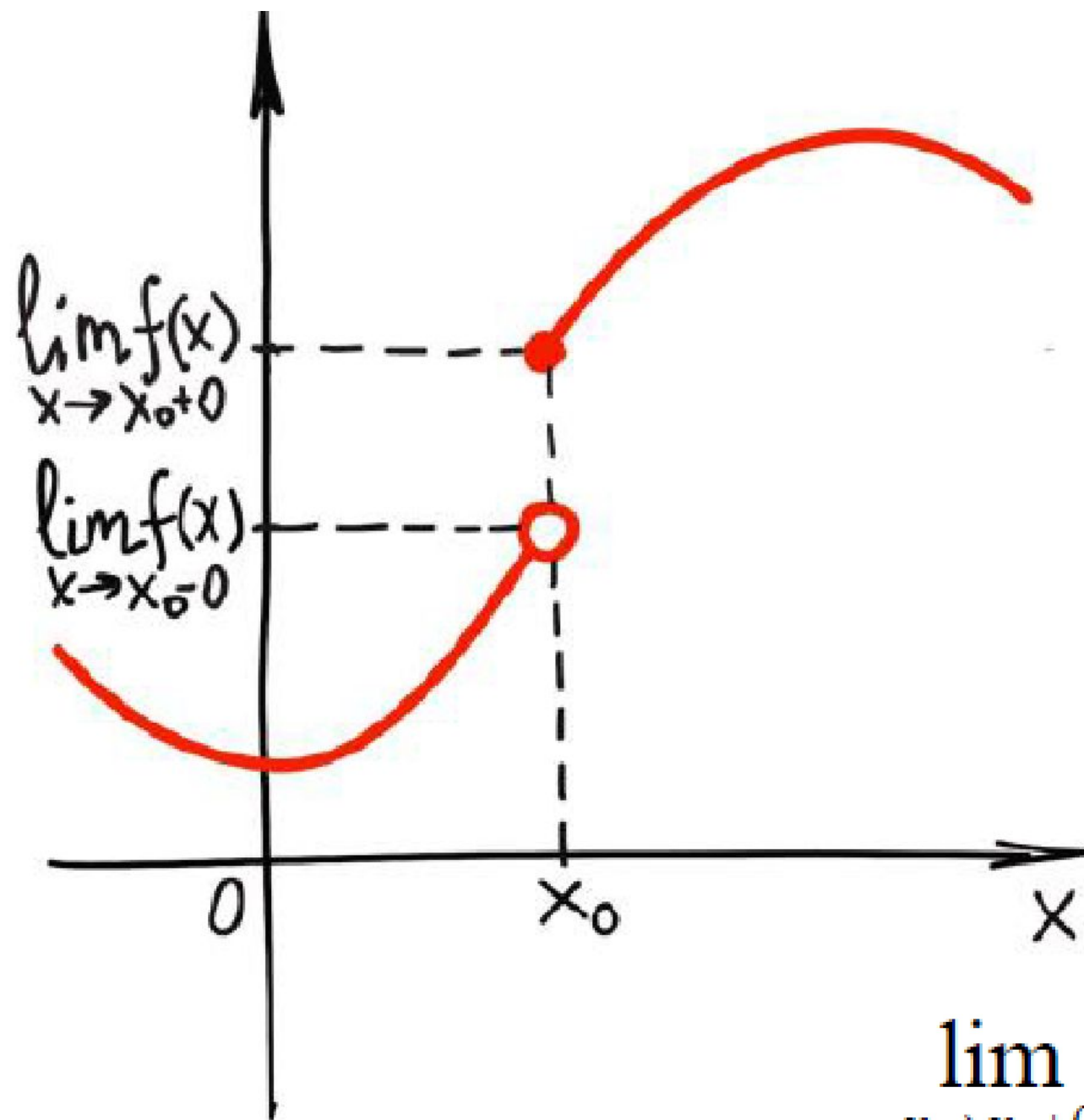
(всегда неустранимый)

Устранимый разрыв I рода
(выколота точка)

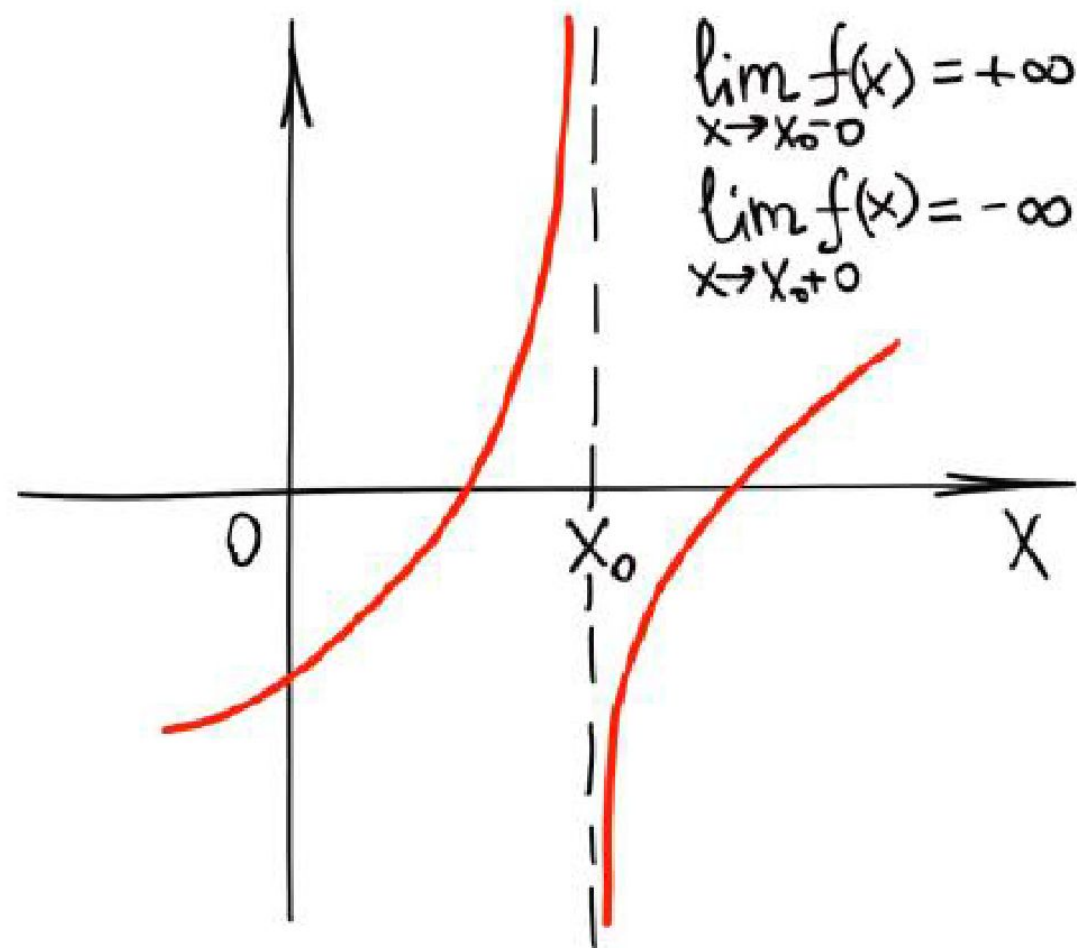
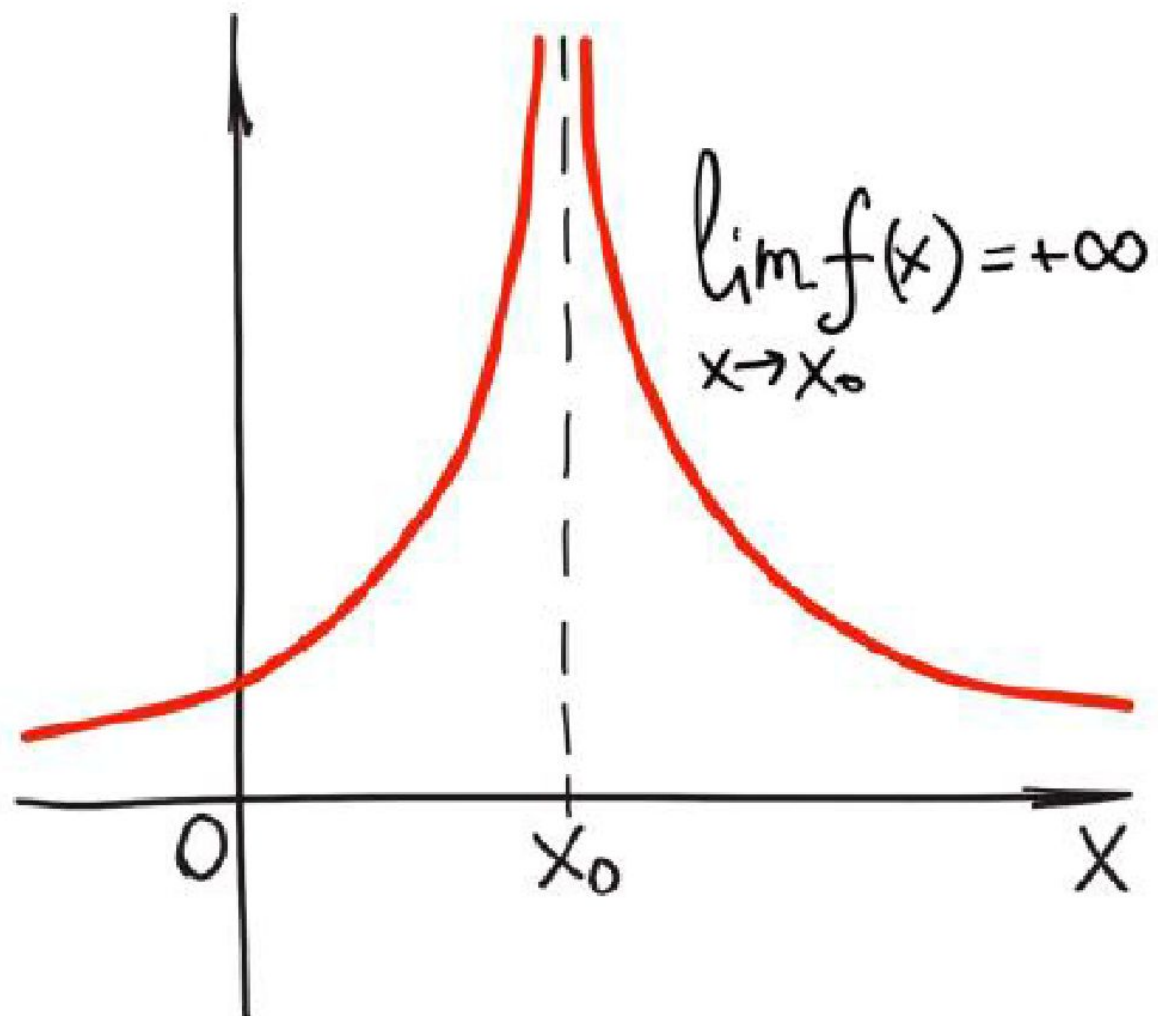
Неустранимый разрыв I рода
(скачок)

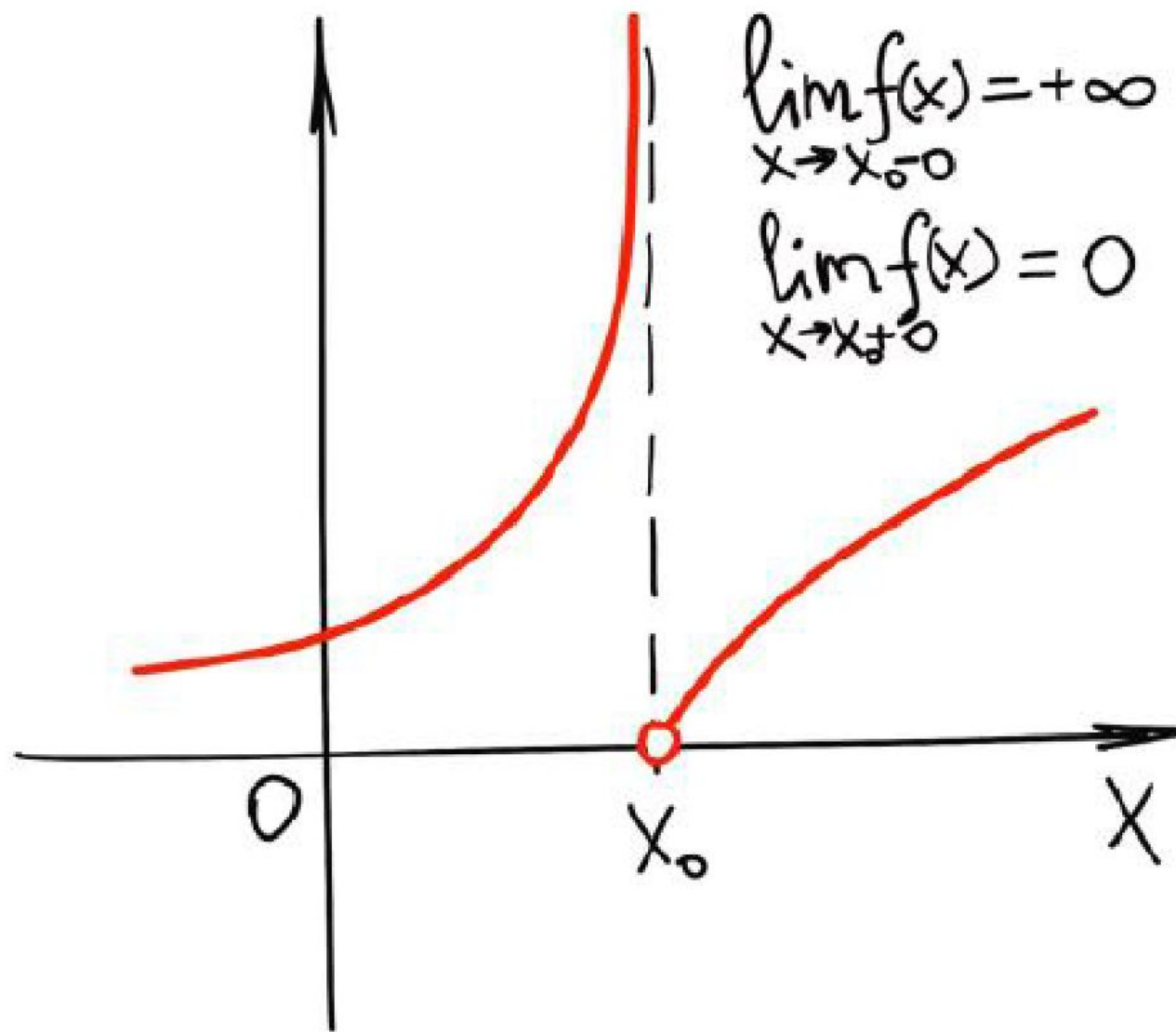


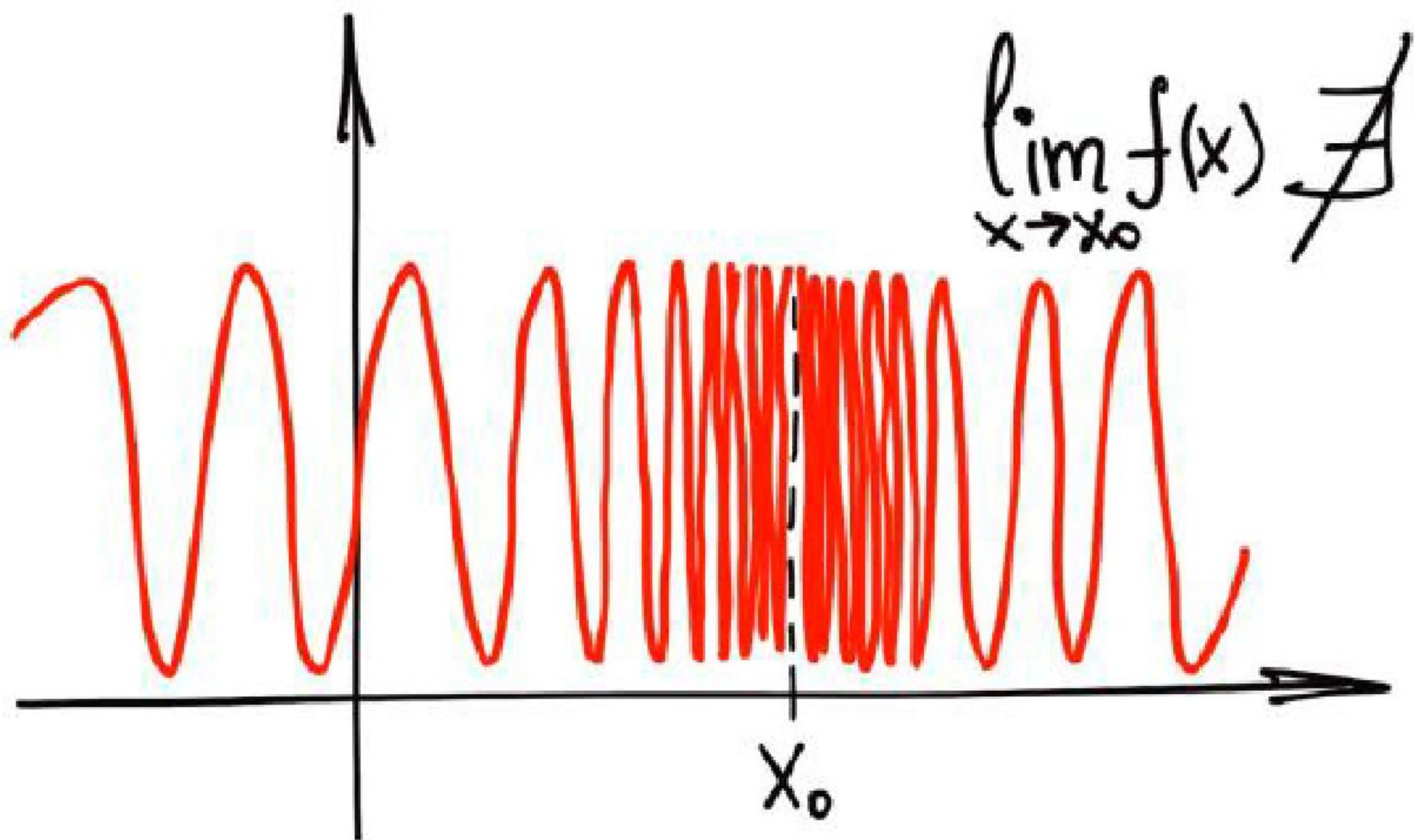




$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$







$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \nexists$

x_0

Задача. Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{3-x}$$

Задача. Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{3-x}$$

Область определения функции $f(x) : \frac{x^2}{3-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$

Задача. Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{3-x}$$

$$\text{Область определения функции } f(x) : \frac{x^2}{3-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$$

Поскольку данная функция является элементарной, то она непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; 3)$.

Задача. Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{3-x}$$

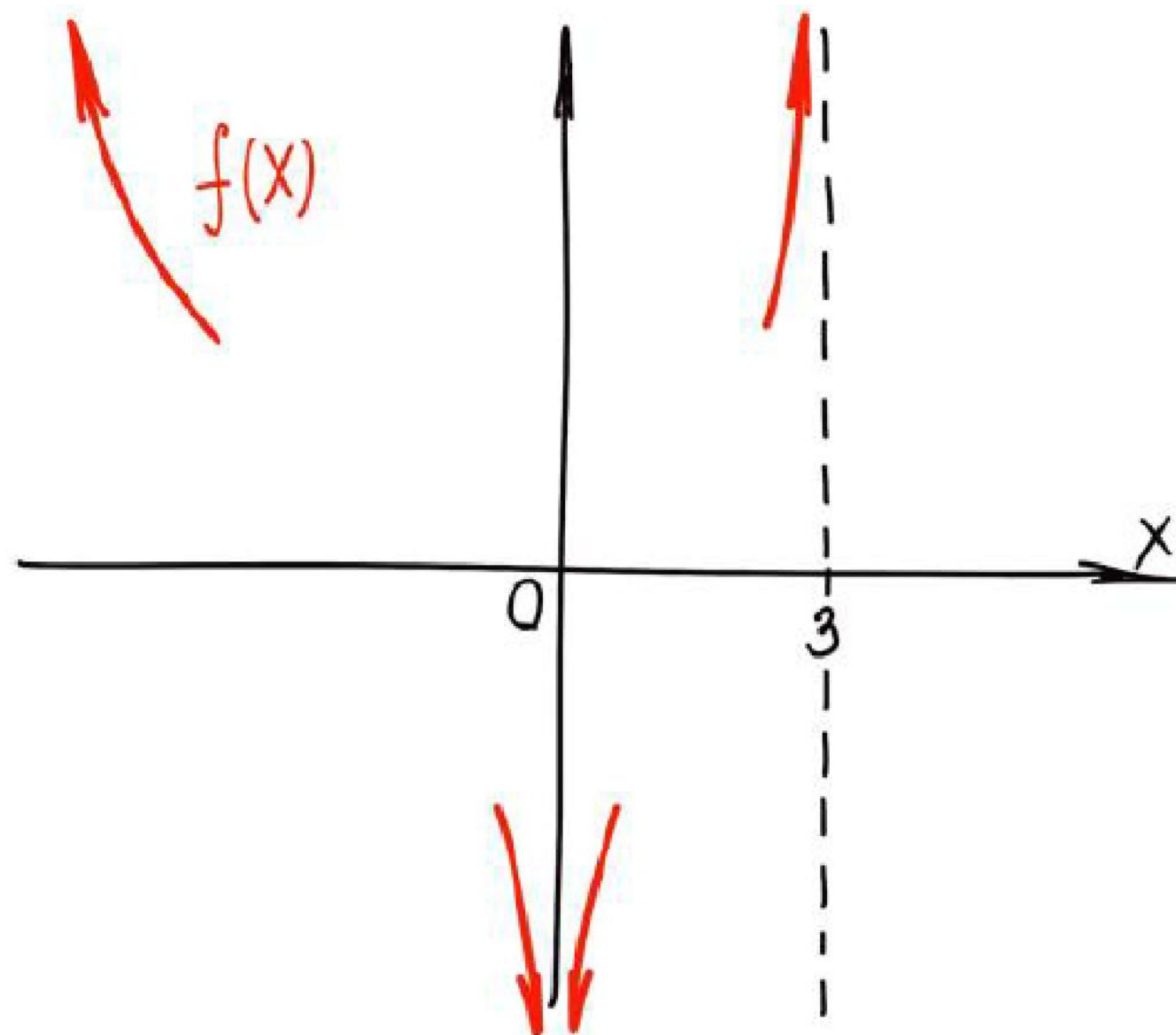
$$\text{Область определения функции } f(x) : \frac{x^2}{3-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$$

Поскольку данная функция является элементарной, то она непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; 3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{x^2}{3-x} = -\infty \quad \text{Значит, в точке } x = 0 \text{ имеется разрыв второго рода}$$

Определим предельное поведение функции на оставшихся краях области определения, которые не являются точками разрыва:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \ln \frac{x^2}{3-x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^2}{3-x} = +\infty$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos \pi x + 1}{x - 1}, & x > 1 \\ \arcsin x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{x^2}{1 - x^2}, & x < -1 \end{cases}$$

Исследуем точку $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \arcsin x = -\frac{\pi}{2} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

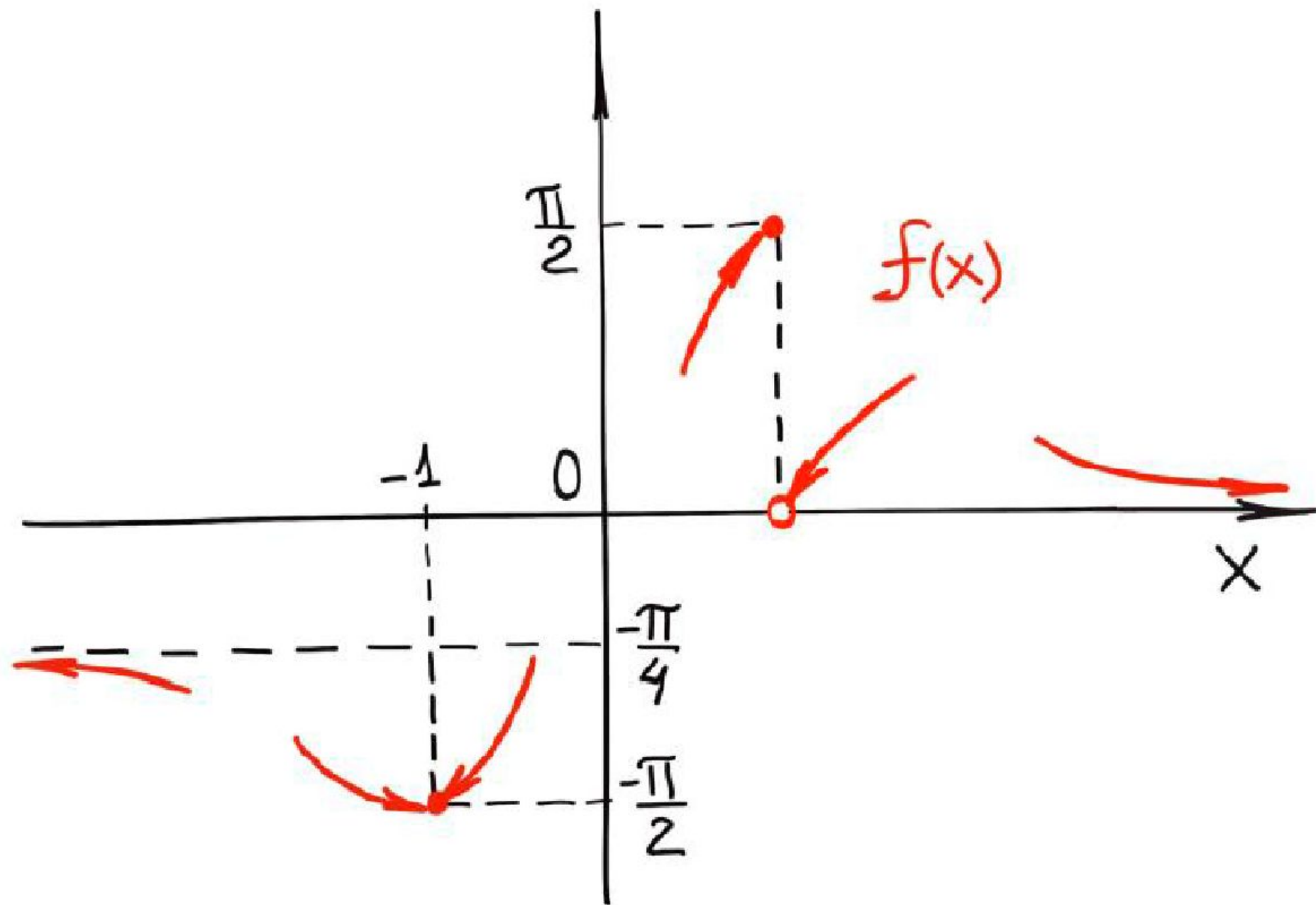
Поскольку $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = -1$

Исследуем точку $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\cos \pi x + 1}{x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \frac{\pi}{2} .$$



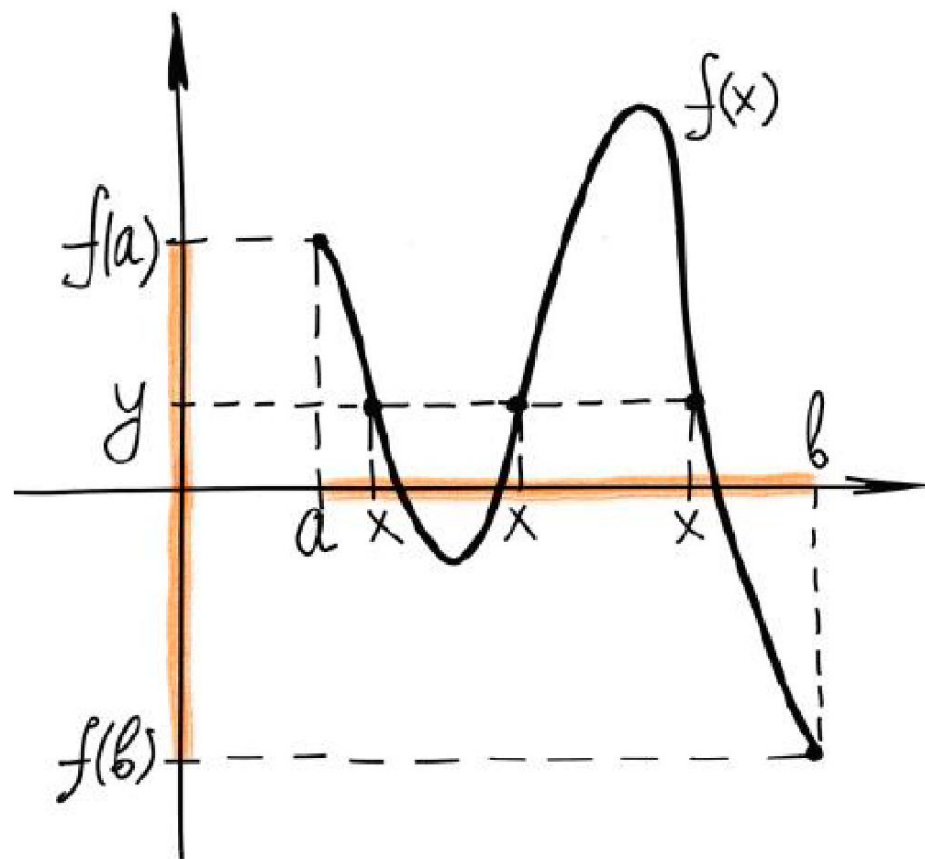
Свойства непрерывных функций на замкнутом промежутке

Теорема 5.6 (Больцано – Коши) [без доказательства, очевидно по рисунку]

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Тогда на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$:

$$\forall y \in (f(a); f(b)) \exists x \in (a; b): f(x) = y \quad (\text{в случае } f(a) < f(b)).$$

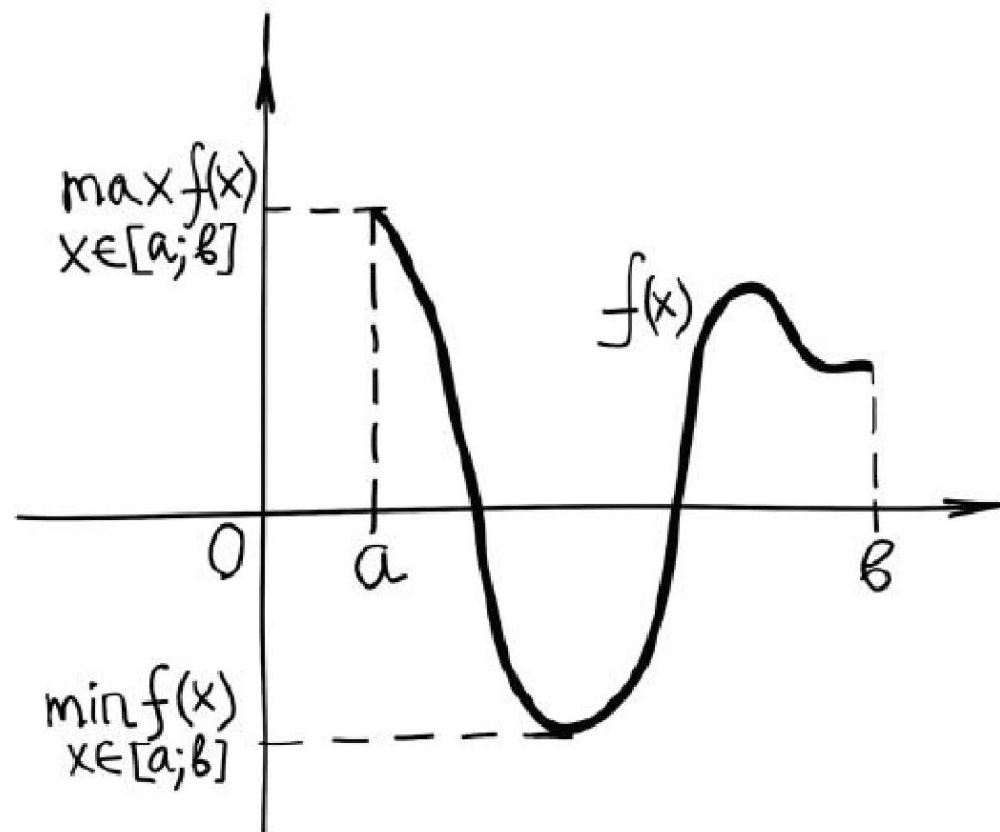
В частности, если $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (или наоборот), то $\exists x \in (a; b): f(x) = 0$.



Теорема 5.6 (Вейерштрасса) [без доказательства, очевидно по рисунку]

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда $f(x)$ ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений на $[a;b]$:

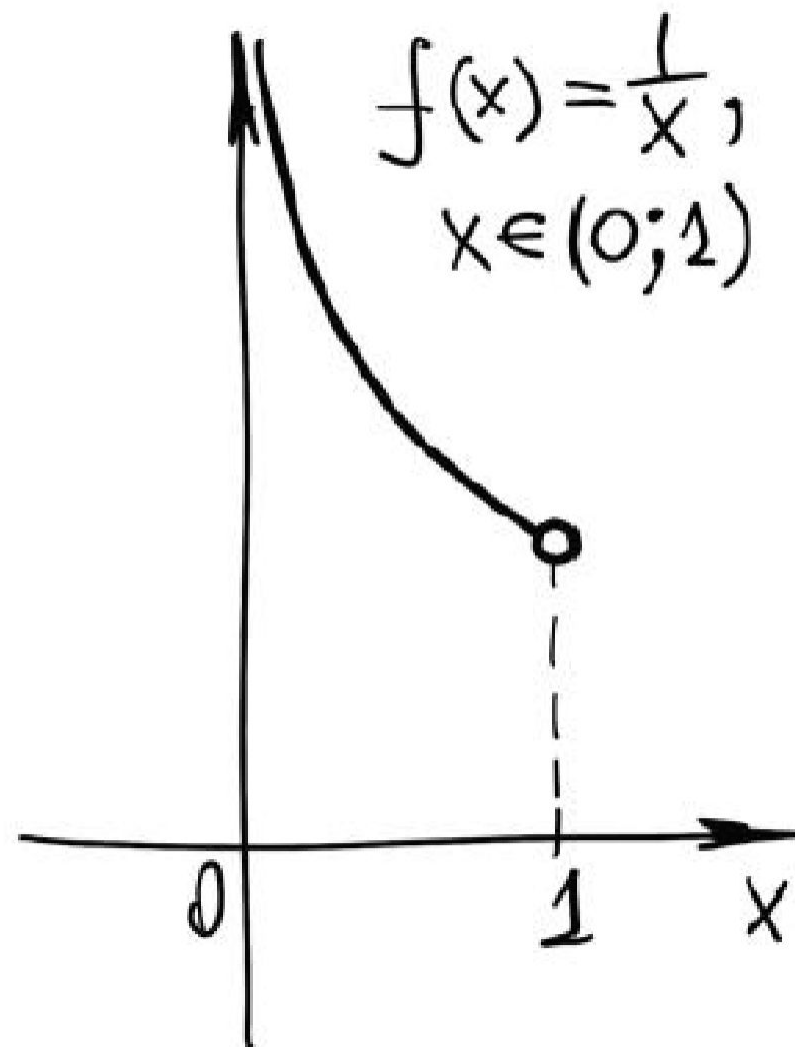
$$\exists \max_{x \in [a,b]} f(x), \exists \min_{x \in [a,b]} f(x).$$



$f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на $(0;1)$

$\max_{x \in (0;1)} \frac{1}{x} = \max(1; +\infty)$ не существует;

$\min_{x \in (0;1)} \frac{1}{x} = \min(1; +\infty)$ не существует.



Теорема 5.7 (непрерывность обратной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на промежутке $[a; b]$ (допустим, возрастает). Тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая непрерывна на промежутке $[f(a); f(b)]$.

