Частотно-временной анализ нейрофизиологических данных в исследованиях психических феноменов

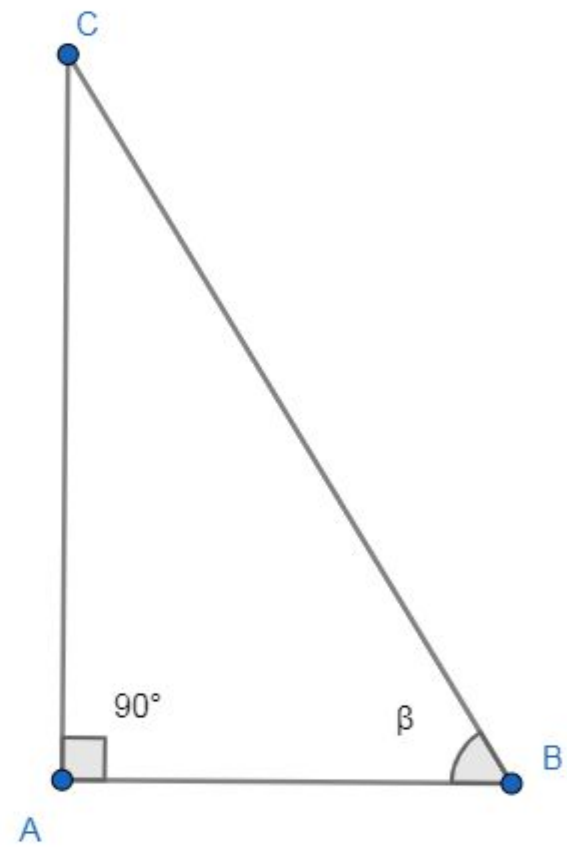
Лекция 7. Введение в частотный анализ

Ключевые разделы лекции

- Вспоминаем тригонометрию
- Комплексные числа
- Понятие сигнала.
- Ряд Фурье.
- Преобразование Фурье
- Анализ графиков спектров

Тригонометрия

- *Базовые формулы тригонометрии:*
- $\sin\beta = \frac{AC}{BC}$
- $\cos\beta = \frac{AB}{BC}$
- $\operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{AB}$
- $\operatorname{ctg}\beta = \frac{AB}{AC}$
- $\sin\beta^2 + \cos\beta^2 = 1$
- $\operatorname{tg}\beta \times \operatorname{ctg}\beta = 1$

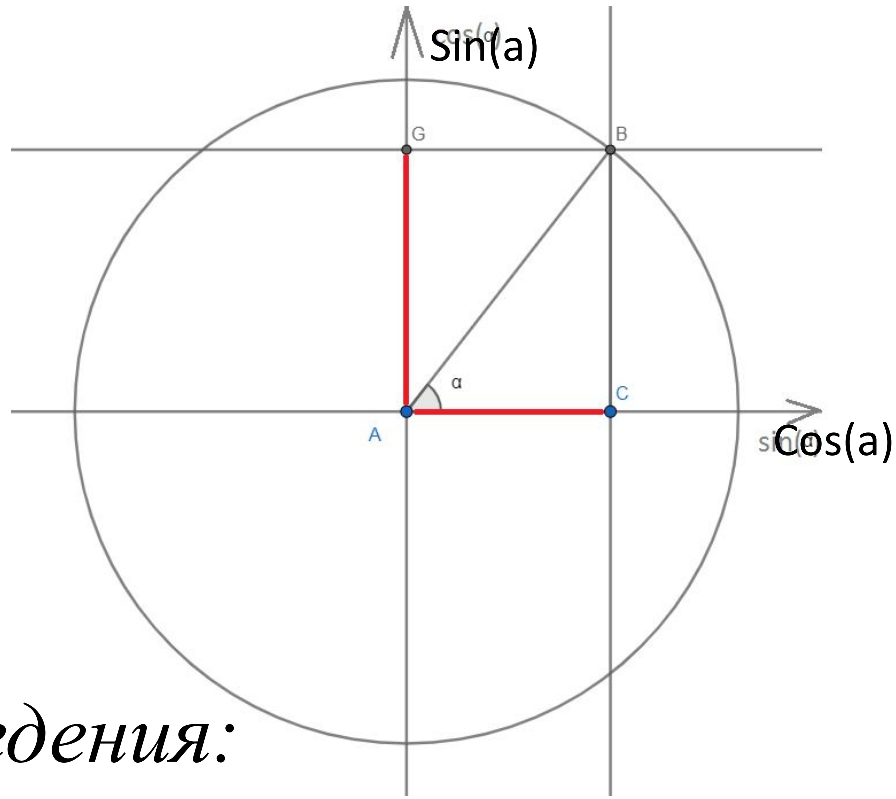


Тригонометрия

Табличные значения тригонометрических функций:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

Тригонометрия



Формулы приведения:

Угол / Функция	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$	$2\pi \pm \alpha$
sin	$-\sin a$	$\cos a$	$\mp \sin a$	$-\cos a$	$\pm \sin a$
cos	$\cos a$	$\mp \sin a$	$-\cos a$	$\pm \sin a$	$\cos a$
tg	$-\mathrm{tg}\, a$	$\mp \mathrm{ctg}\, a$	$\pm \mathrm{tg}\, a$	$\mp \mathrm{ctg}\, a$	$\pm \mathrm{tg}\, a$
ctg	$-\mathrm{ctg}\, a$	$\mp \mathrm{tg}\, a$	$\pm \mathrm{ctg}\, a$	$\mp \mathrm{tg}\, a$	$\pm \mathrm{ctg}\, a$

Тригонометрия

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

Тригонометрия

- Задача 1: Вычислите $\sin(90)$
Задача 2: Вычислите $\cos(180)$
Задача 3: Вычислите $\sin(135)$
Задача 4: Вычислите $\cos(120)$
Задача 5: Вычислите $\sin(270)$
Задача 6: Вычислите $\cos(75)$
Задача 7: Вычислите $\sin(15)$

Комплексные числа

- Числовые множества:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел (не имеет операции деления)

$\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел (не всегда извлекается корень, даже из положительных чисел)

$\mathbb{R}$ - множество действительных чисел (не извлекается корень из отрицательных чисел)

Комплексные числа

- Вот для этих целей и было впервые множество комплексных чисел:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Комплексное число ***C*** состоит из двух частей:

$$C = A + B \cdot i$$

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Действительной (Real) **Мнимой (Imaginative**)

Комплексные числа

- Операции над комплексными числами:

Пусть $\mathrm{C}_1 = A_1 + B_1 \cdot i$; $\mathrm{C}_2 = A_2 + B_2 \cdot i$, тогда:

1. $\mathrm{C}_1 \pm \mathrm{C}_2 = (A_1 + B_1 \cdot i) \pm (A_2 + B_2 \cdot i) = (A_1 \pm A_2) + (B_1 \pm B_2) \cdot i$

2. $\mathrm{C}_1 \times \mathrm{C}_2 = (A_1 + B_1 \cdot i) \times (A_2 + B_2 \cdot i) = A_1 \times A_2 + A_1 \times B_2 \cdot i + B_1 \times A_2 \cdot i - B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2 - B_1 \times B_2) + (A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2) \cdot i$

Комплексные числа

- Операции над комплексными числами:

Пусть $\mathrm{C}_1 = A_1 + B_1 \cdot i$; $\mathrm{C}_2 = A_2 + B_2 \cdot i$, тогда:

3. $\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2} = \frac{A_1+B_1\cdot i}{A_2+B_2\cdot i} = \frac{(A_1+B_1\cdot i)\times(A_2-B_2\cdot i)}{(A_2+B_2\cdot i)\times(A_2-B_2\cdot i)} =$

$$= \frac{(A_1+B_1\cdot i)\times(A_2-B_2\cdot i)}{(A_2+B_2\cdot i)\times(A_2-B_2\cdot i)} = \frac{A_1\times A_2-A_1\times B_2\cdot i+B_1\times A_2\cdot i-B_1\times B_2}{{A_2}^2+{B_2}^2}$$

Комплексные числа

- Задача 1: $A = 3 + 3i$; $\mathrm{B} = 5 + 2i$

Найти: $C = A + B$

Ответ: C = 8 + 5i

Задача 2: $A = 6 - 4i$; $\mathrm{B} = -5 + 8i$

Найти: $C = A + B$

Ответ: C = 1 + 4i

Задача 3: $A = 9 - 6i$; $\mathrm{B} = 4 + 5i$

Найти: $C = A - B$

Ответ: C = 5 -11i

Комплексные числа

- Задача 4: $A = 2 + 4i$; $\mathrm{B} = 1 - 3i$

Найти: $C = A \times B$

Ответ: C = 14 - 2i

Задача 5: $A = 7 - 5i$; $\mathrm{B} = -3 - 2i$

Найти: $C = A \times B$

Ответ: C = -31 + i

Задача 6: $A = 11 - 3i$; $\mathrm{B} = -5 + 4i$

Найти: $C = A \times B$

Ответ: C = -43 -59i

Комплексные числа

- Задача 7: $A = 2 + 4i$; $\mathrm{B} = 1 - 3i$

Найти: $C = \frac{A}{B}$

Ответ: C = -1 + i

Задача 8: $A = 7 - 5i$; $\mathrm{B} = -3 - 2i$

Найти: $C = A/B$

Ответ: $C = -\frac{11}{13} + \frac{29}{13}i$

Задача 9: $A = 11 - 3i$; $\mathrm{B} = -5 + 4i$

Найти: $C = A/B$

Ответ: $C = -\frac{67}{41} + \frac{29}{41}i$

Комплексные числа

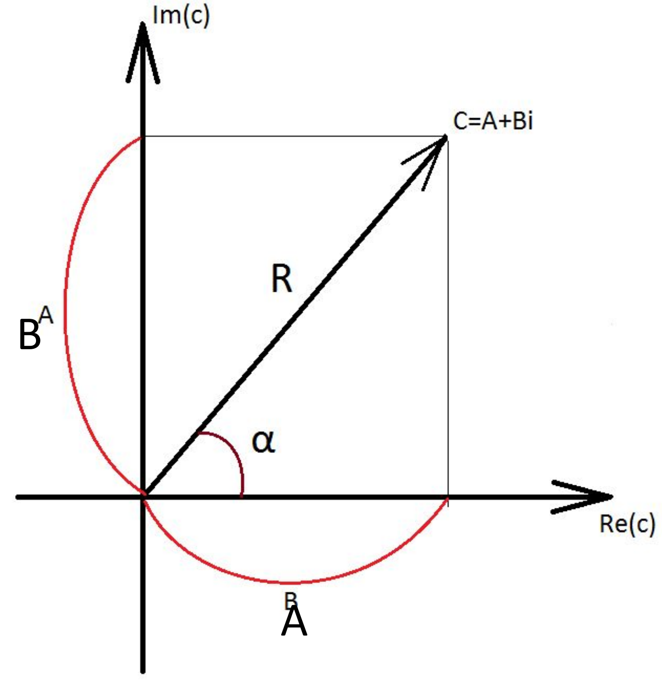
Формы представления комплексных чисел:

1. $C = A + B \cdot i$ – алгебраическая

2. $C = R(\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot i)$

– тригонометрическая

3. $C = Re^{i\alpha}$ – показательная



$R = \sqrt{A^2 + B^2}$ - модуль

$\alpha = arctg\left(\frac{B}{A}\right)$ - аргумент или фаза

Комплексные числа

Возведение в степень комплексных чисел

Формула Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Комплексные числа

- Задача 1:Преобразовать к триг. виду: $A = 3 + 3i$; $\mathrm{B} = 5 + 2i$

Задача 2: Преобразовать к показ. виду:
$A = 6 - 4i$; $\mathrm{B} = -5 + 8i$

Задача 3: Преобразовать к алг. виду: $A = 6\sqrt{2}(\cos(45) + \sin(45)i)$;

$\mathrm{B} = 4\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{3}i}$; $\mathrm{C} = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$; $\mathrm{D} = 4e^{\pi i}$;

Комплексные числа

- Задача 4: Найти все числа **A**, такие что $\mathbf{A^3 = 8}$

Задача 5: Найти все числа **A**, такие что
$\mathbf{A^3 = -27}$

Задача 6: Возведите в степень в третью степень:

$\boldsymbol{A = 1 + \sqrt{3}i; B = -2\sqrt{3} - 2i;}$