

Частотно-временной анализ нейрофизиологических данных в исследованиях психических феноменов

Лекция 7. Введение в частотный анализ

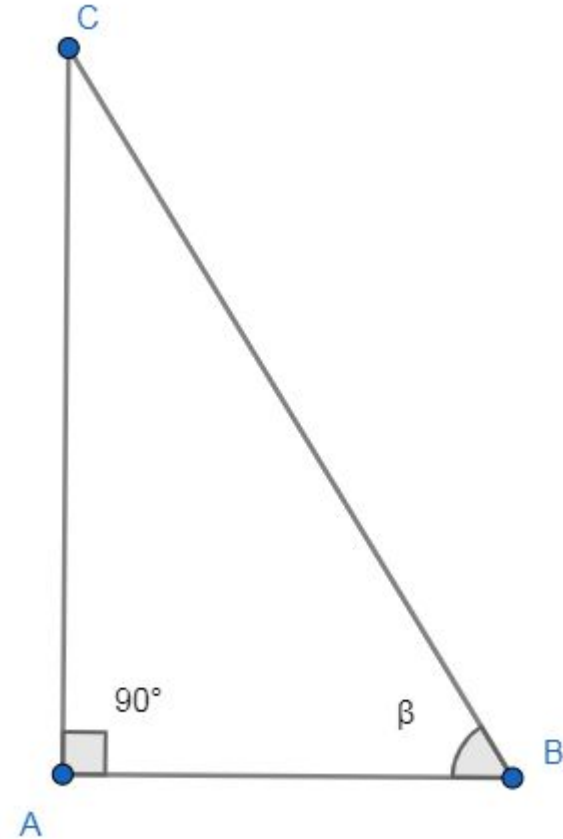
Ключевые разделы лекции

- Вспоминаем тригонометрию
- Комплексные числа
- Понятие сигнала.
- Ряд Фурье.
- Преобразование Фурье
- Анализ графиков спектров

Тригонометрия

Базовые формулы тригонометрии:

- $\sin \beta = \frac{AC}{BC}$
- $\cos \beta = \frac{AB}{BC}$
- $\operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{AB}$
- $\operatorname{ctg} \beta = \frac{AB}{AC}$
- $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$
- $\operatorname{tg} \beta \times \operatorname{ctg} \beta = 1$

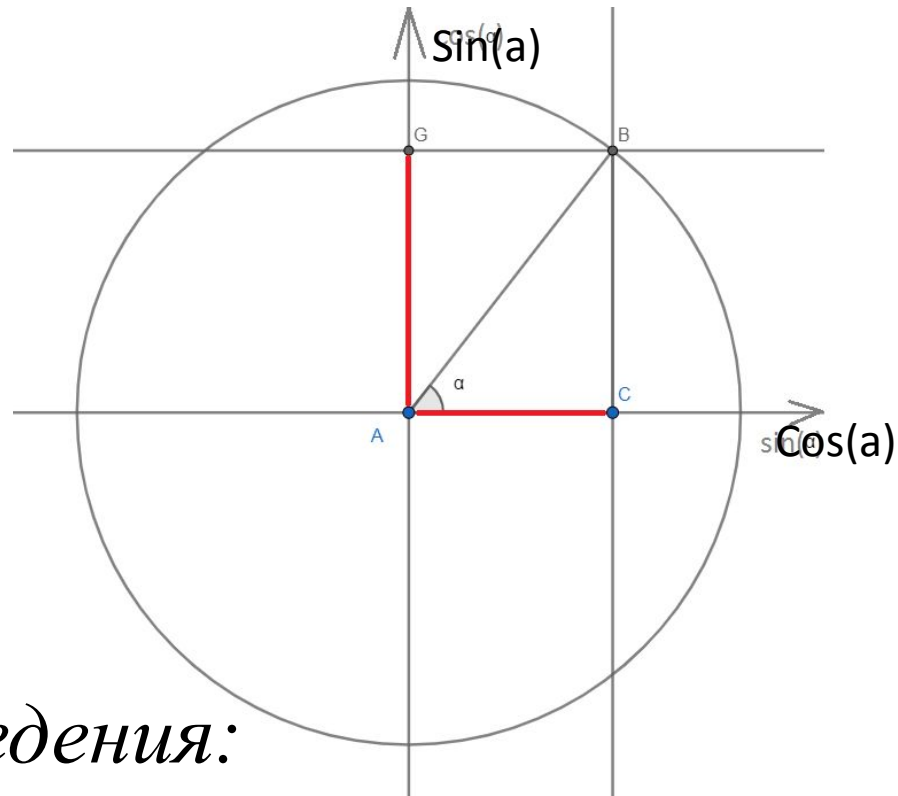


Тригонометрия

Табличные значения тригонометрических функций:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

Тригонометрия



Формулы приведения:

Угол / Функция	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$	$2\pi \pm \alpha$
sin	$-\sin a$	$\cos a$	$\mp \sin a$	$-\cos a$	$\pm \sin a$
cos	$\cos a$	$\mp \sin a$	$-\cos a$	$\pm \sin a$	$\cos a$
tg	$-\text{tg } a$	$\mp \text{ctg } a$	$\pm \text{tg } a$	$\mp \text{ctg } a$	$\pm \text{tg } a$
ctg	$-\text{ctg } a$	$\mp \text{tg } a$	$\pm \text{ctg } a$	$\mp \text{tg } a$	$\pm \text{ctg } a$

Тригонометрия

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Тригонометрия

Задача 1: Вычислите $\sin(90)$

Задача 2: Вычислите $\cos(180)$

Задача 3: Вычислите $\sin(135)$

Задача 4: Вычислите $\cos(120)$

Задача 5: Вычислите $\sin(270)$

Задача 6: Вычислите $\cos(75)$

Задача 7: Вычислите $\sin(15)$

Комплексные числа

Числовые множества:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

\mathbb{Z} - множество целых чисел (не имеет операции деления)

\mathbb{Q} - множество рациональных чисел (не всегда извлекается корень, даже из положительных чисел)

\mathbb{R} - множество действительных чисел (не извлекается корень из отрицательных чисел)

Комплексные числа

Вот для этих целей и было впервые
множество комплексных чисел:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Комплексное число C состоит из двух частей:

$$C = A + B \cdot i$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Действительной (Real)

Мнимой (Imaginative)

Комплексные числа

Операции над комплексными числами:

Пусть $C_1 = A_1 + B_1 \cdot i$; $C_2 = A_2 + B_2 \cdot i$, тогда:

$$1. C_1 \pm C_2 = (A_1 + B_1 \cdot i) \pm (A_2 + B_2 \cdot i) = (A_1 \pm A_2) + (B_1 \pm B_2) \cdot i$$

$$2. C_1 \times C_2 = (A_1 + B_1 \cdot i) \times (A_2 + B_2 \cdot i) = A_1 \times A_2 + A_1 \times B_2 \cdot i + B_1 \times A_2 \cdot i - B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2 - B_1 \times B_2) + (A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2) \cdot i$$

Комплексные числа

Операции над комплексными числами:

Пусть $C_1 = A_1 + B_1 \cdot i$; $C_2 = A_2 + B_2 \cdot i$, тогда:

$$\begin{aligned} 3. \frac{C_1}{C_2} &= \frac{A_1 + B_1 \cdot i}{A_2 + B_2 \cdot i} = \frac{(A_1 + B_1 \cdot i) \times (A_2 - B_2 \cdot i)}{(A_2 + B_2 \cdot i) \times (A_2 - B_2 \cdot i)} = \\ &= \frac{(A_1 + B_1 \cdot i) \times (A_2 - B_2 \cdot i)}{(A_2 + B_2 \cdot i) \times (A_2 - B_2 \cdot i)} = \frac{A_1 \times A_2 - A_1 \times B_2 \cdot i + B_1 \times A_2 \cdot i - B_1 \times B_2}{A_2^2 + B_2^2} \end{aligned}$$

Комплексные числа

Задача 1: $A = 3 + 3i$; $B = 5 + 2i$

Найти: $C = A + B$

Ответ: $C = 8 + 5i$

Задача 2: $A = 6 - 4i$; $B = -5 + 8i$

Найти: $C = A + B$

Ответ: $C = 1 + 4i$

Задача 3: $A = 9 - 6i$; $B = 4 + 5i$

Найти: $C = A - B$

Ответ: $C = 5 - 11i$

Комплексные числа

Задача 4: $A = 2 + 4i$; $B = 1 - 3i$

Найти: $C = A \times B$

Ответ: $C = 14 - 2i$

Задача 5: $A = 7 - 5i$; $B = -3 - 2i$

Найти: $C = A \times B$

Ответ: $C = -31 + i$

Задача 6: $A = 11 - 3i$; $B = -5 + 4i$

Найти: $C = A \times B$

Ответ: $C = -43 - 59i$

Комплексные числа

Задача 7: $A = 2 + 4i$; $B = 1 - 3i$

Найти: $C = \frac{A}{B}$

Ответ: $C = -1 + i$

Задача 8: $A = 7 - 5i$; $B = -3 - 2i$

Найти: $C = A/B$

Ответ: $C = -\frac{11}{13} + \frac{29}{13}i$

Задача 9: $A = 11 - 3i$; $B = -5 + 4i$

Найти: $C = A/B$

Ответ: $C = -\frac{67}{41} + \frac{29}{41}i$

Комплексные числа

Формы представления комплексных чисел:

1. $C = A + B \cdot i$ – алгебраическая

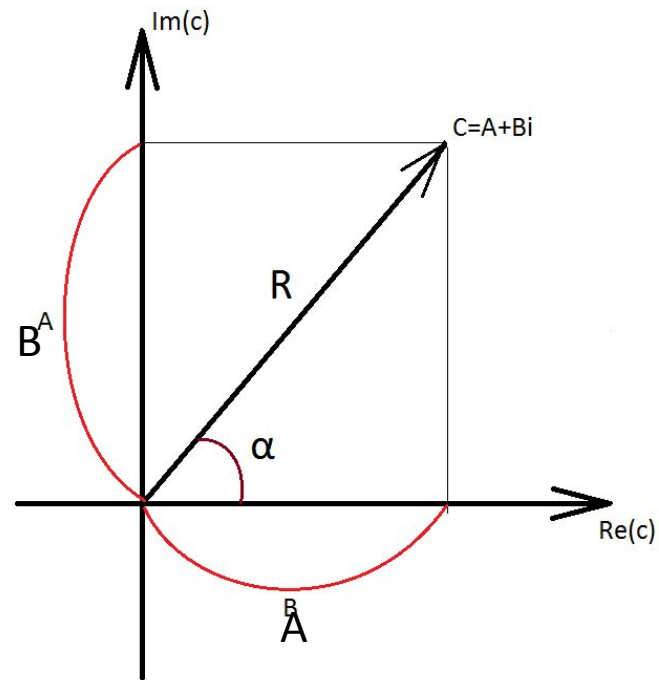
2. $C = R(\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot i)$

– тригонометрическая

3. $C = R e^{i\alpha}$ – показательная

$R = \sqrt{A^2 + B^2}$ - модуль

$\alpha = \arctg\left(\frac{B}{A}\right)$ - аргумент или фаза



Комплексные числа

Возведение в степень комплексных чисел

Формула Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

Комплексные числа

Задача 1: Преобразовать к триг. виду: $A = 3 + 3i$; $B = 5 + 2i$

Задача 2: Преобразовать к показ. виду:
 $A = 6 - 4i$; $B = -5 + 8i$

Задача 3: Преобразовать к алг. виду: $A = 6\sqrt{2}(\cos(45) + \sin(45)i)$;

$B = 4\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$; $C = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$; $D = 4e^{\pi i}$;

Комплексные числа

Задача 4: Найти все числа A , такие что $A^3 = 8$

Задача 5: Найти все числа A , такие что $A^3 = -27$

Задача 6: Возведите в степень в третью степень:

$$A = 1 + \sqrt{3}i; B = -2\sqrt{3} - 2i;$$