21.05.21.

Тема:
Формула бинома Ньютона. Свойства биноминальных коэффициентов Треугольник Паскаля.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео https://www.youtube.com/watch?v=Xmy1QpKW5WU

Теоретическая часть:

Прочитать.

Определения

(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

Доказательства прочитать и понять.

Бином Ньютона

В теории многочленов часто двучлены называют *биномами*. Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома $a + b$ (при условии $a + b \neq 0$):

$(a + b)^0 = 1,$

$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$

$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2,$

$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3,$

$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) =$

$= 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4,$

$(a + b)^5 = (a + b)^4 (a + b) =$

$= 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$

и т. д.

Можно доказать справедливость следующей формулы, называемой биномиальной формулой Ньютона:

$$(a + b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m. \qquad (1)$$

Формулу (1) чаще всего называют просто *биномом Ньютона*, а числа C_m^n — *биномиальными коэффициентами*, которые могут быть найдены по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}.$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью так называемого *треугольника Паскаля* — таблицы значений C_m^n, составленной на основании рекуррентного свойства числа сочетаний $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ с учётом того, что $C_m^0 = C_m^n = 1$.

Ниже приводится фрагмент треугольника Паскаля, в котором стрелками показан процесс получения определённых членов таблицы на основании рекуррентного свойства. Например, при $m = 4$ имеем строку 1, 4, 6, 4, 1, полученную из предыдущей строки следующим образом: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$ (первый и последний члены строки равны $C_4^0 = C_4^4 = 1$).

n / m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1 ⊕	1									
2	1 ⊕	2 ⊕	1								
3	1 ⊕	3 ⊕	3 ⊕	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	7	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Эта таблица наглядно иллюстрирует свойство 1 числа сочетаний $C_m^n = C_m^{m-n}$, которое можно сформулировать так: числа, одинаково удалённые от концов строки треугольника Паскаля, равны.

Записать разложение бинома $(x-2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$
$$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5 \cdot (-2) + C_6^2x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3x^3 \cdot (-2)^3 +$$
$$+ C_6^4x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) +$$
$$+ 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft$$

Заметим, что при записи разложения степени бинома полезно контролировать следующие моменты:
1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя m степени бинома, т. е. равно $m+1$;

2) показатели степени первого слагаемого бинома последовательно убывают на единицу от m до 0, а показатели второго последовательно возрастают на единицу от 0 до m;
3) биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле (1), равны между собой.

Доказать свойство элементов строки треугольника Паскаля:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m. \qquad (2)$$

▶ Равенство (2) получается из равенства (1) при $a = b = 1$. ◁

Практическая часть.

1092 Записать разложение бинома:

1) $(1+x)^8$; 2) $(x+1)^7$; 3) $(a-1)^9$; 4) $(y-1)^{10}$;
5) $(2x+1)^5$; 6) $(x+2)^6$; 7) $(3x+2)^4$; 8) $(2a+3)^5$;
9) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^5$; 10) $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^4$.

1093 Записать разложение бинома:

1) $\left(1+\sqrt{2}\right)^6$; 2) $\left(1+\sqrt{3}\right)^5$; 3) $\left(a-\frac{1}{3a}\right)^7$; 4) $\left(b-\frac{1}{2b}\right)^6$.