

21.05.21.

Тема:

Формула бинома Ньютона.

Свойства биномиальных  
коэффициентов

Треугольник Паскаля.

*Учащиеся должны прислать ответы на  
вопросы и решение задач, содержащиеся в  
практической части.*

Видео

<https://www.youtube.com/watch?v=Xmy1QpKW5WU>

## Теоретическая часть:

Прочитать.

Определения

(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

Доказательства прочитайте и понять.

### Бином Ньютона

В теории многочленов часто двучлены называют **биномами**. Рассмотрим целые неотрицательные степени бинорма  $a + b$  (при условии  $a + b \neq 0$ ):

$$(a + b)^0 = 1,$$

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$$

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2,$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3,$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) =$$

$$= 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4,$$

$$(a + b)^5 = (a + b)^4 (a + b) =$$

$$= 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$$

и т. д.

Можно доказать справедливость следующей формулы, называемой биномиальной формулой Ньютона:

$$(a + b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + \\ + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \dots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \dots + \\ + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m. \quad (1)$$

Формулу (1) чаще всего называют просто **биномом Ньютона**, а числа  $C_m^n$  — **биномиальными коэффициентами**, которые могут быть найдены по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}.$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью так называемого *треугольника Паскаля* — таблицы значений  $C_m^n$ , составленной на основании рекуррентного свойства числа сочетаний  $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$  с учётом того, что  $C_m^0 = C_m^m = 1$ .

Ниже приводится фрагмент треугольника Паскаля, в котором стрелками показан процесс получения определённых членов таблицы на основании рекуррентного свойства. Например, при  $m = 4$  имеем строку 1, 4, 6, 4, 1, полученную из предыдущей строки следующим образом:  $4 = 1 + 3$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $4 = 3 + 1$  (первый и последний члены строки равны  $C_4^0 = C_4^4 = 1$ ).

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1 <sup>⊕</sup>	1									
2	1 <sup>⊕</sup>	2 <sup>⊕</sup>	1								
3	1 <sup>⊕</sup>	3 <sup>⊕</sup>	3 <sup>⊕</sup>	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	7	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Эта таблица наглядно иллюстрирует свойство 1 числа сочетаний  $C_m^n = C_m^{m-n}$ , которое можно сформулировать так: числа, одинаково удалённые от концов строки треугольника Паскаля, равны.

Записать разложение бинома  $(x - 2)^6$ .

► По формуле (1) находим

$$\begin{aligned}(x - 2)^6 &= (x + (-2))^6 = \\ &= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \cdot (-2) + C_6^2 x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3 x^3 \cdot (-2)^3 + \\ &\quad + C_6^4 x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5 x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 = \\ &= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) + \\ &\quad + 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 = \\ &= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft\end{aligned}$$

Заметим, что при записи разложения степени бинома полезно контролировать следующие моменты:

1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя  $m$  степени бинома, т. е. равно  $m + 1$ ;

2) показатели степени первого слагаемого бинома последовательно убывают на единицу от  $m$  до 0, а показатели второго последовательно возрастают на единицу от 0 до  $m$ ;

3) биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле (1), равны между собой.

Доказать свойство элементов строки треугольника Паскаля:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m. \quad (2)$$

► Равенство (2) получается из равенства (1) при  $a = b = 1$ .  $\triangleleft$

## Практическая часть.

**1092** Записать разложение бинома:

- 1)  $(1+x)^8$ ;      2)  $(x+1)^7$ ;      3)  $(a-1)^9$ ;      4)  $(y-1)^{10}$ ;  
5)  $(2x+1)^5$ ;      6)  $(x+2)^6$ ;      7)  $(3x+2)^4$ ;      8)  $(2a+3)^5$ ;  
9)  $\left(2a - \frac{1}{2}\right)^5$ ;      10)  $\left(3x - \frac{1}{3}\right)^4$ .

**1093** Записать разложение бинома:

- 1)  $(1+\sqrt{2})^6$ ;      2)  $(1+\sqrt{3})^5$ ;      3)  $\left(a - \frac{1}{3a}\right)^7$ ;      4)  $\left(b - \frac{1}{2b}\right)^6$ .

