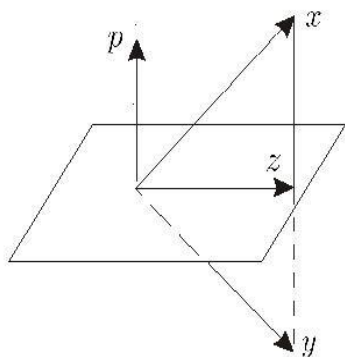


# Метод ортогональных исключений

## Ортогональные отражения



Отражение вектора  $x$  относительно гиперплоскости  $(z, p) = 0$ .

$$y = x - 2 \frac{(x, p)}{\|p\|^2} p = Px$$

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{2p_i p_j}{\|p\|^2} \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

$$P^* P = P P^* = P^2 = I$$

**Задача**  $\|x\| = \|y\|$ ,

$x \rightarrow y$

**Ответ**  $p = y - x$ ,

$y = Px$

**Двухдиагонализация,  $A - N \times N$**

Найти ортогональные  $P$  и  $Q$ :

$PAQ = D$ , где

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ & & d_{N-1} & b_N \\ 0 & & & d_N \end{pmatrix}$$

**Алгоритм решения.**

$A^{(0)} = A, P^{(1)}, A^{(1)} = P^{(1)}A^{(0)}$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{N1}^{(1)} \end{pmatrix} = P^{(1)} \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} \\ \vdots \\ a_{N1}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} d_1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

$Q^{(1)}$ :

$$(a_{11}^{(2)}, a_{12}^{(2)}, \dots, a_{1N}^{(2)}) = (a_{11}^{(1)}, a_{12}^{(1)}, \dots, a_{1N}^{(1)})Q^{(1)} = (d_1, b_2, 0, \dots, 0).$$

$$Q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(2)} = A^{(1)}Q^{(1)} = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

# Симметрическая спектральная задача

$$Av = \lambda v, \quad A = A^*$$

Теорема [Вейль]

$$A = A^*, \quad \Delta A = \Delta A^*, \quad \tilde{A} = A + \Delta A$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M \quad - \text{с.зн. } A, \\ \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_M \quad - \text{с. зн. } \tilde{A} \end{array} \implies |\tilde{\lambda}_n - \lambda_n| \leq \mathbf{1} \|\Delta A\|$$

## Вариационный принцип Фишера-Куранта

$$A = A^*$$

$$\lambda_{n-k} = \min_{\substack{\|q_i\| = 1, \\ i = 1, \dots, k}} \max_{\substack{\|x\| \neq 0 \\ (q_i, x) = 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

$$\lambda_{k+1} = \max_{\substack{\|q_i\| = 1, \\ i = 1, \dots, k}} \min_{\substack{\|x\| \neq 0 \\ (q_i, x) = 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

Следствие вариационного принципа

$$A = A^*, B = B^*, (Ax, x) \geq (Bx, x) \implies \lambda_j(A) \geq \lambda_j(B)$$

## Доказательство теоремы Вейля

$$(\tilde{A}x, x) = ((A + \Delta A)x, x) = (Ax, x) + (\Delta Ax, x) \leq (Ax, x) + (\|\Delta A\|x, x)$$

$$\implies \tilde{\lambda}_j \leq \lambda_j + \|\Delta\|$$

аналогично  $\tilde{\lambda}_j \geq \lambda_j - \|\Delta\|$

Упрощение

$$PAP^* = S = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & & 0 \\ b_2 & d_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & b_M \\ 0 & & b_M & d_M \end{pmatrix}$$

$$Sw = SPv = PAP^*Pv = \lambda Pv = \lambda w$$

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & c_2 & & 0 \\ b_2 & d_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & c_M \\ 0 & & b_M & d_M \end{pmatrix}, \quad b_j c_j > 0$$

$$D_M(\lambda) = \det(T - \lambda I) = 0.$$

Полагаем

$$c_{M+1} = 1, \quad D_0(\lambda) = 1 \implies D_k(\lambda) = (d_k - \lambda)D_{k-1}(\lambda) - b_k c_k D_{k-2}(\lambda)$$

Лемма Нули  $D_k(\lambda)$  вещественны и различны.

Между двумя соседними нулями  $D_{j+1}(\lambda)$  есть в точности один нуль  $D_j(\lambda)$

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_j < \mu_j < \lambda_{j+1}$$



Доказательство по индукции:

$$D_1(\lambda) \implies \lambda = \lambda^* = d_1$$

Коэффициент при старшей степени  $D_2$  положителен  $\implies$  ветви параболы направлены вверх.

$$D_2(\lambda) = \lambda^2 + \dots$$

$$D_2(\lambda^*) = (d_1 - \lambda^*)(d_2 - \lambda^*) - b_2c_2 = -b_2c_2 < 0$$

– парабола пересекает ось абцисс –основание для индукции

Пусть для  $D_j(\lambda)$  ( $j \leq k - 1$ ) лемма доказана.

1)  $\lambda < 0$ ,  $|\lambda| \gg 1 \implies D_j(\lambda) > 0$ , т.к.  $D_j(\lambda) = (-\lambda)^j + \dots$

2) Пусть  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-2} < \lambda_{k-1}$  — корни  $D_{k-1}(\lambda) \implies \forall (\lambda_i, \lambda_{i+1}) \exists!$   
нуль  $D_{k-2}(\lambda)$ :

$$D_{k-2}(\lambda_1) > 0$$

$$D_{k-2}(\lambda_i)D_{k-2}(\lambda_{i+1}) < 0$$

Вычисляем  $D_k(\lambda_1)$ , разлагая по  $k$ -ой строке ( $k$ -му столбцу)

$$D_k(\lambda_1) = -b_k c_k D_{k-2}(\lambda_1) + d_k D_{k-2}(\lambda_1) = -b_k c_k D_{k-2}(\lambda_1) < 0$$

$$\Rightarrow D_k(-\infty) > 0$$

$\Rightarrow$  на интервале  $(-\infty, \lambda_1)$  есть хотя бы один корень  $D_k(\lambda)$ .

---

$$D_k(\lambda_i) = -b_k c_k D_{k-2}(\lambda_i), \quad D_{k-2}(\lambda_i) D_{k-2}(\lambda_{i+1}) < 0 \quad \Rightarrow \quad D_k(\lambda_i) D_k(\lambda_{i+1}) < 0$$

Значит между точек  $\lambda_i$   $D_k$  меняет знак  $\Rightarrow$  имеем  $n - 1$  корень.

При  $\lambda \rightarrow \infty$   $D_k(\lambda)D_{k-2}(\lambda) > 0$ , т.к.  $(-\lambda)^k(-\lambda)^{k-2} = \lambda^{2k-2}$

Но  $D_k(\lambda_{k-1})D_{k-2}(\lambda_{k-1}) < 0 \implies$  на интервале  $(\lambda_{k-1}, \infty)$  есть хотя бы один корень полинома  $D_k(\lambda)$ .

Лемма доказана

## Определение последовательности Штурма

$$D_k(\lambda) = (d_k - \lambda)D_{k-1}(\lambda) - b_k c_k D_{k-2}(\lambda)$$

$$\frac{|c_{k+1}|D_{k-1}(\lambda)}{D_k(\lambda)} = \frac{|c_{k+1}|}{d_k - \lambda - |b_k|c_k|D_{k-2}(\lambda)/D_{k-1}(\lambda)}$$

$$\mathcal{P}_k(\lambda) = \frac{|c_{k+1}|D_{k-1}(\lambda)}{D_k(\lambda)} \quad (1 \leq k \leq M)$$

## Последовательность Штурма

$$\mathcal{P}_1(\lambda) = \frac{|c_2|}{d_1 - \lambda}$$

$$\mathcal{P}_k(\lambda) = \frac{|c_{k+1}|}{d_k - \lambda - |b_k|\mathcal{P}_{k-1}(\lambda)}$$

## Теорема (Штурм)

$\forall \lambda_0$  число  $\lambda < \lambda_0 : D_M(\lambda) = 0$  (с.зн.  $T$ ) = числу  $\mathcal{P}_j(\lambda_0) \leq 0, j = 1, \dots, M$

---

Задача: вычислить  $\lambda_j(S)$

Метод бисекций:

1)  $\lambda_j(S) \in [X^-, X^+]$

2)  $y = \frac{X^+ - X^-}{2}, \mathcal{P}_j(y)$

$+ - - + \dots + - + \Rightarrow l$  минусов

3) if  $l \geq j \Rightarrow X^+ := y$

if  $l < j \Rightarrow X^- := y$

## Доказательство теоремы Штурма

$$\mathcal{P}_1(\lambda), \mathcal{P}_2(\lambda), \dots, \mathcal{P}_M(\lambda) \Leftrightarrow + - - + \dots - - +$$

$$\mathcal{P}_j(\lambda) = |c_{j+1}| \frac{D_{j-1}(\lambda)}{D_j(\lambda)}, \quad D_j(\lambda) = (-\lambda)^j + \dots$$

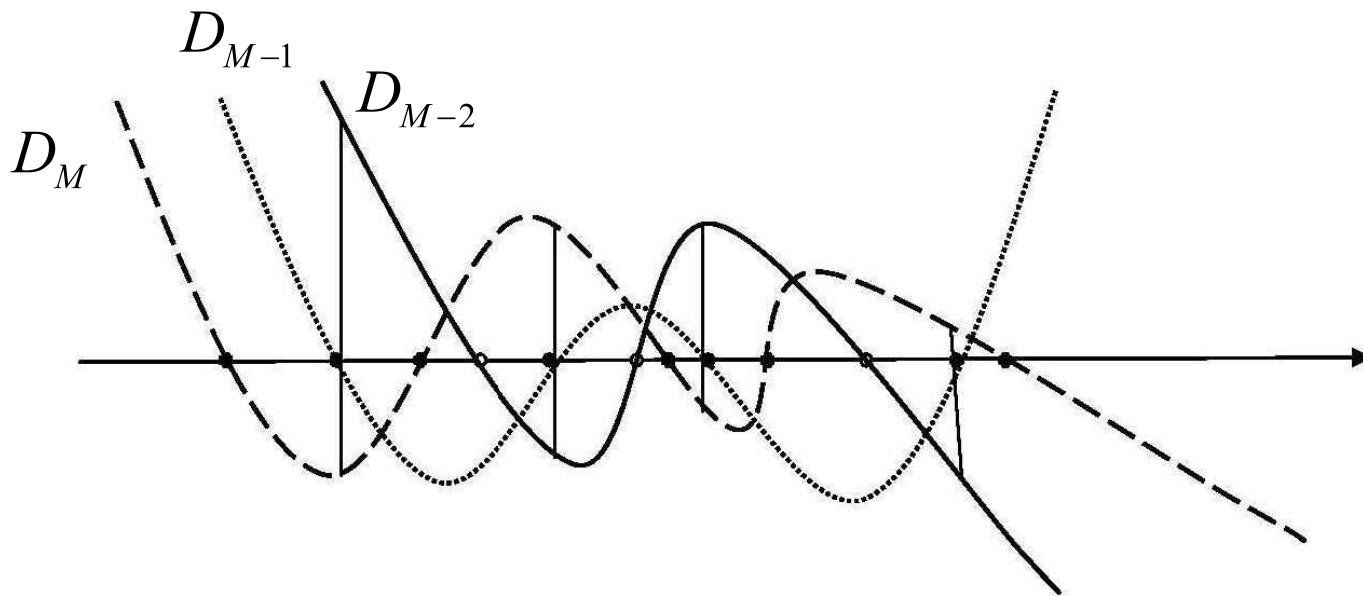
If  $\lambda_0 < 0, |\lambda_0| \gg 1 \Rightarrow +, +, \dots, +$

If  $\lambda_0 > 0, |\lambda_0| \gg 1 \Rightarrow -, -, \dots, -$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$  – корни  $D_M(\lambda), \quad (\lambda_k, \lambda_{k+1}] \quad (\lambda_{k-1}, \lambda_k]$

$\lambda^* \in (\lambda_{k-1}, \lambda_k]$  – один из корней полиномов  $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \dots, D_M(\lambda)$

1.  $\lambda^*$  корень  $D_M(\lambda)$  и не корень  $D_j(\lambda)$  ( $1 \leq j \leq M-1$ )  $\implies$   
 в  $\lambda^*$   $\mathcal{P}_M(\lambda)$  меняет знак с "+" на "-"  $\mathcal{P}_j(\lambda)$  ( $1 \leq j \leq M-1$ ) сохраняют  
 знаки

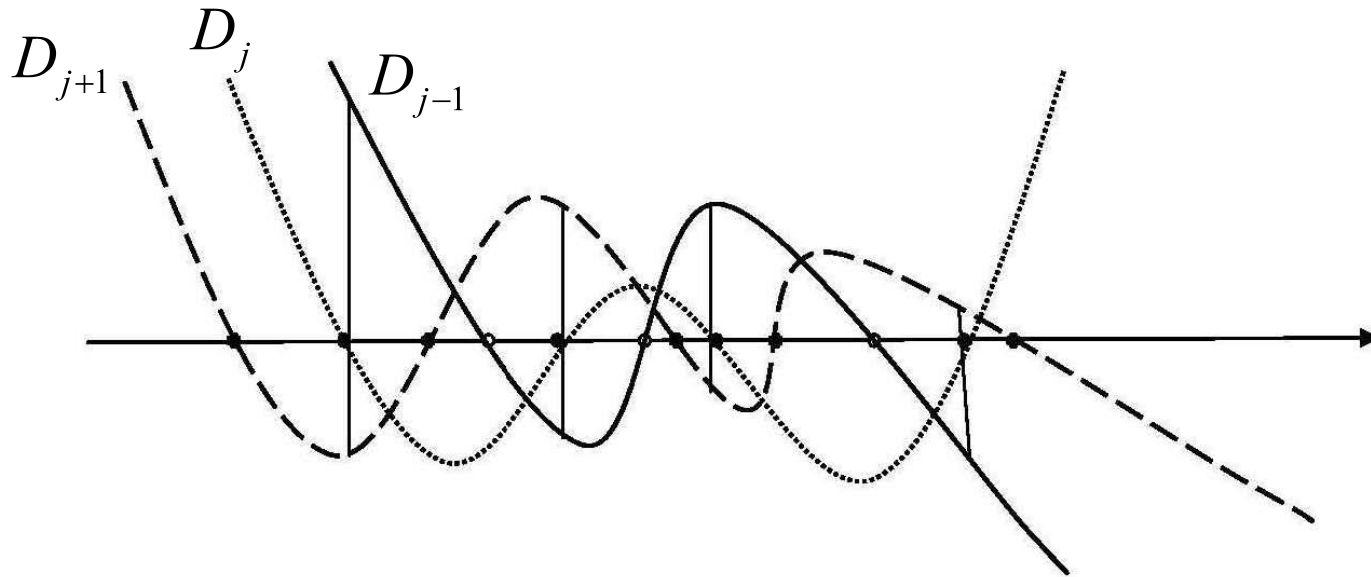




2.  $\lambda^*$  корень  $D_j(\lambda)$  ( $j < M$ ) и не корень  $D_k(\lambda)$  для  $k \neq j$ .

$$\mathcal{P}_j(\lambda) = |c_{j+1}| \frac{D_{j-1}(\lambda)}{D_j(\lambda)}, \quad \mathcal{P}_{j+1}(\lambda) = |c_{j+2}| \frac{D_j(\lambda)}{D_{j+1}(\lambda)}$$

в  $\lambda^*$ :  $\mathcal{P}_j(\lambda) \quad + \rightarrow -$ ,  $\mathcal{P}_{j+1}(\lambda) \quad - \rightarrow +$



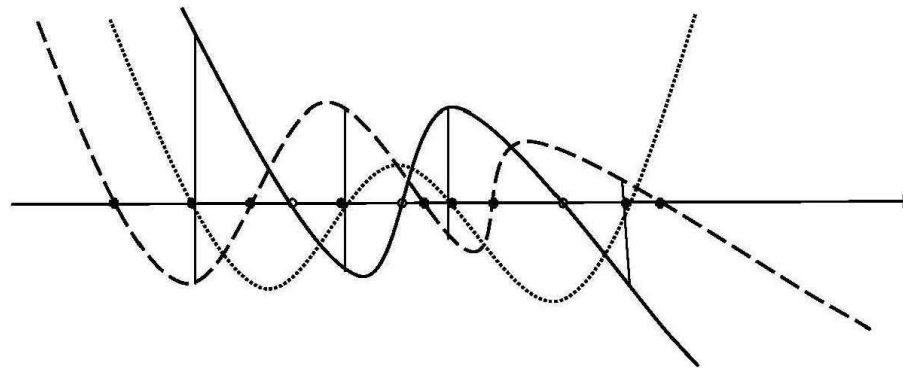
3.  $\lambda^*$  корень двух полиномов  $D_j(\lambda)$  и  $D_k(\lambda)$  при  $j < k$  ( $\implies k \neq j + 1$ )

If  $k = M$ , то правее  $\lambda^*$ : на  $M$ -м месте добавляется "-" ( $j + 1$ )-й на  $j$ -ю позицию "-" сдвигается.

If  $k < M$ , то рассматриваем две пары функций

$$\mathcal{P}_j(\lambda), \mathcal{P}_{j+1}(\lambda), \quad \mathcal{P}_k(\lambda), \mathcal{P}_{k+1}(\lambda)$$

$\implies$  два "-" сдвигаются влево с ( $j + 1$ )-й на  $j$ -ю, с ( $k + 1$ )-й на  $k$ -ю.



## Вычисление последовательности Штурма

$$S = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & & 0 \\ b_2 & d_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & b_M \\ 0 & & b_M & d_M \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1^{[c]}(\lambda) = |b_2| \ominus (d_1 \ominus_0 \lambda),$$

$$\mathcal{P}_j^{[c]}(\lambda) = |b_{j+1}| \ominus (d_j \ominus_0 \lambda \ominus_0 |b_j| \otimes \mathcal{P}_{j-1}^{[c]}(\lambda)),$$

$$\mathcal{P}_M^{[c]}(\lambda) = 1 \ominus (d_M \ominus_0 \lambda \ominus_0 |b_M| \otimes \mathcal{P}_{M-1}^{[c]}(\lambda)).$$

[c] – "computation"

$$a \ominus_0 b = \begin{cases} a \ominus b & \text{при } a \ominus b \neq 0, \\ \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \max\{|a|, |b|\} & \text{при } a \ominus b = 0, \end{cases}$$

Лемма. Пусть

$$\varepsilon_1 \geq 2\gamma \max \left\{ \sqrt[4]{\varepsilon_0}, \sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon_\infty}} \right\},$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |d_i| \leq 1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |b_j| \leq 1,$$

$$-3 \leq \lambda \leq 3$$

$\Rightarrow$  нет ПЕРЕПОЛНЕНИЙ:

$$\varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_1^4}{2\gamma^4} \leq \left| \varphi_j^{[c]} \right| \leq \frac{\gamma^3}{\varepsilon_1^3} < \varepsilon_\infty.$$

Замечание. If  $S$  удовл. усл. леммы

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |d_i| \leq 1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |b_j| \leq 1,$$

$\Rightarrow \|S\| \leq \mathcal{M}(S) \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \lambda \leq 3$

## Моделирование погрешностей

$$a \otimes b = ab(1 + \psi) + \xi.$$

$$a \oslash b = \frac{a}{b}(1 + \varphi), \quad |\varphi| \leq \varepsilon_1,$$

$$a \ominus_0 b = (1 + \alpha)a - (1 + \bar{\alpha})b,$$

где  $|\alpha| \leq \varepsilon_1$ ,  $|\bar{\alpha}| \leq \varepsilon_1$ ,  $|(1 + \alpha)/(1 + \bar{\alpha}) - 1| \leq \varepsilon_1/\gamma$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^{[c]} &= \frac{|\bar{c}_2|}{\bar{d}_1 - \lambda}, \\ \mathcal{P}_j^{[c]} &= \frac{|\bar{c}_{j+1}|}{\bar{d}_j - \lambda - |\bar{b}_j| \mathcal{P}_{j-1}^{[c]}}, \\ \mathcal{P}_M^{[c]} &= \frac{|\bar{c}_{M+1}|}{\bar{d}_M - \lambda - |\bar{b}_M| \mathcal{P}_{M-1}^{[c]}}. \end{aligned} \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 & \bar{c}_2 & & 0 \\ \bar{b}_2 & \bar{d}_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \bar{c}_M \\ 0 & & \bar{b}_M & \bar{d}_M \end{pmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 & \bar{c}_2 & & 0 \\ \bar{b}_2 & \bar{d}_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \bar{c}_M \\ 0 & & \bar{b}_M & \bar{d}_M \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 & \tilde{b}_2 & & 0 \\ \tilde{b}_2 & \tilde{d}_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \tilde{b}_M \\ 0 & & \tilde{b}_M & \tilde{d}_M \end{pmatrix}$$

$$\tilde{d}_i = \bar{d}_i \quad \tilde{b}_j = \text{sign}(b_j) \sqrt{|\bar{b}_j \bar{c}_j|}$$

$$\bar{D}_M(\lambda) = \tilde{D}_M(\lambda)$$

$$\Delta S = S - \tilde{S} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \eta_2 & & 0 \\ \eta_2 & \beta_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \eta_M \\ 0 & & \eta_M & \beta_M \end{pmatrix}$$

$$|\eta_j| \leq \varepsilon_1 \frac{3 - \varepsilon_1}{1 - 2\varepsilon_1}, \quad |\beta_i| \leq \frac{\varepsilon_1}{\gamma} + \frac{\varepsilon_0}{1 - 2\varepsilon_1} \Rightarrow \|\Delta S\| \leq \mathcal{M}(\Delta S) \leq 7\varepsilon_1$$

1) нормировать  $S$ :

$$\rho = \gamma^k, \quad \frac{1}{\gamma} \leq \max_{i,j} \{|\rho d_i|, |\rho b_j|\} < 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \rho S, \quad \|S_1\| \leq 3$$

2) "возмутить" матрицу  $S_1 \rightarrow S_2$ ,

т. е. if  $|\rho d_i|, |\rho b_j| < \varepsilon_1/\gamma$   $\rho d_i, \rho b_j \rightarrow \pm \varepsilon_1/\gamma$

3) метод бисекций для  $S_2$

Теорема. Пусть в  $\{\mathcal{P}_j^{[c]}(\lambda)\}$  ( $j = 1, \dots, M$ )  $p$  неположительных  $\Rightarrow$

$$\lambda_p(S_2) < \lambda + 7\varepsilon_1, \quad \lambda - 7\varepsilon_1 \leq \lambda_{p+1}(S_2).$$

Критерий остановки итераций

$$\lambda_n \in [X^-, X^+], X^+ - X^- \leq \varepsilon$$

$$|\tilde{\lambda}_n - \lambda_n| \leq \|\tilde{S}_2 - S_2\| \implies \varepsilon \approx \|\tilde{S}_2 - S_2\| \implies \varepsilon = 3 \cdot 7\varepsilon_1 = 21\varepsilon_1$$

$$\lambda_n^{[c]}(S_2) = (X^+ - X^-)/2 \implies \lambda_n(S_2) \in [\lambda_n^{[c]}(S_2) - \delta, \lambda_n^{[c]}(S_2) + \delta] \quad \delta = 10.5\varepsilon_1$$



## Примеры

$$S_k = \begin{pmatrix} d & b & & & 0 \\ b & d & b & & \\ & b & d & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & b \\ 0 & & & b & d \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} D_1(\lambda) &= d - \lambda, \\ D_2(\lambda) &= (d - \lambda)^2 - b^2, \\ &\dots \\ D_k(\lambda) &= (d - \lambda)D_{k-1}(\lambda) - b^2D_{k-2}(\lambda). \end{aligned}$$

Разностные уравнения

$$D_k(\lambda) - (d - \lambda)D_{k-1}(\lambda) - b^2D_{k-2}(\lambda) = 0$$

начальные значения:

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= d - \lambda, \\ D_2(\lambda) &= (d - \lambda)^2 - b^2. \end{aligned}$$

Решение уравнений

$$au_{k+1} + bu_k + cu_{k-1} = 0$$

имеет вид

$$u_k = \alpha q_1^k + \beta q_2^k,$$

$\alpha, \beta = \text{const}$ ;  $q_1$  и  $q_2$  — корни характ. ур-я

$$aq^2 + bq + c = 0.$$

В нашем случае характ. ур-е:

$$q^2 - (d - \lambda)q + b^2 = 0,$$

его корни

$$q_{1,2} = |b| \left[ (d - \lambda)/2|b| \pm i \sqrt{1 - ((d - \lambda)/2|b|)^2} \right]$$

Ищем  $\lambda$  – с.зн.  $S_k \Rightarrow d - 2|b| \leq \lambda \leq d + 2|b| \Rightarrow |d - \lambda|/2|b| \leq 1$

$\Rightarrow q_{1,2} = |b|(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$ , где  $\cos \varphi = (d - \lambda)/2|b| \Rightarrow$

$$D_k = (\alpha + \beta)|b|^k \cos k\varphi + i(\alpha - \beta)|b|^k \sin k\varphi$$

Из начальных условий

$$\begin{aligned} D_1 &= d - \lambda = 2|b| \cos \varphi, \\ D_2 &= (d - \lambda)^2 - b^2 = b^2(4 \cos^2 \varphi - 1), \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ i(\alpha - \beta) = \cos \varphi / \sin \varphi. \end{cases}$$

$$D_k = |b|^k(\cos k\varphi + \cos \varphi \sin k\varphi / \sin \varphi) = |b|^k \sin(k + 1)\varphi / \sin \varphi.$$

$\lambda$  с.зн.  $S_k \Leftrightarrow D_k(\lambda) = 0$ , т. е.  $\varphi = n\pi/(k + 1)$  ( $n = 1, 2, \dots, k$ )

Из  $D_1 = d - \lambda = 2|b| \cos \varphi \Rightarrow (d - \lambda)/2|b| = \cos n\pi/(k + 1)$ .

$$\lambda_n = d - 2|b| \cos \frac{n\pi}{k + 1} \quad (n = 1, 2, \dots, k)$$

При  $d = 0, b = 1/2$   $D_k(-\lambda)$  – полиномы Чебышева второго рода

$n$	$\lambda_n^{[c]}(S_{10})$	$\lambda_n(S_{10})$	$\delta$
1	-0.959492973614496	-0.959492973614497	$10^{-16}$
2	-0.841253532831179	-0.841253532831181	$10^{-15}$
3	-0.654860733945285	-0.654860733945285	$10^{-16}$
4	-0.415415013001885	-0.415415013001886	$10^{-15}$
5	-0.142314838273284	-0.142314838273285	$10^{-16}$
6	0.142314838273284	0.142314838273285	$10^{-16}$
7	0.415415013001885	0.415415013001886	$10^{-15}$
8	0.654860733945286	0.654860733945284	$10^{-15}$
9	0.841253532831180	0.841253532831181	$10^{-16}$
10	0.959492973614496	0.959492973614497	$10^{-16}$
$\epsilon_\lambda$	$5.77316 \cdot 10^{-15}$		

Пример: с.зн. оператора Лапласа

$D = [0 \leq x, y \leq 1]$   $\Delta u = \lambda u$ ,  $u|_{\Gamma_D} = 0$ . Дискретная модель:

$U = R^s$ ;  $s = (M - 1) \times (N - 1)$ ,  $u_{mn} = u\left(\frac{m}{M}, \frac{n}{N}\right)$

$u_{0n} = 0$ ,  $u_{m0} = 0$ ,  $u_{Mn} = 0$ ,  $u_{mN} = 0$  – гр. усл.

$L : U \rightarrow U$

$$v_{mn} = Lu_{mn} = \frac{u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h_x^2} + \frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h_y^2},$$

$$h_x = \frac{1}{M}, \quad h_y = \frac{1}{N}$$

Ортонормированный базис

$$u^{(k,l)} = 2 \sin \frac{k\pi m}{M} \sin \frac{l\pi n}{N}, \quad (1 \leq k \leq M-1, \quad 1 \leq l \leq N-1)$$

$$Lu^{(k,l)} = \left( -4M^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M} - 4N^2 \sin^2 \frac{l\pi}{2N} \right) u^{(k,l)}$$

$u^{(k,l)}$  – с.ф. оператора  $L$

с.зн.  $\lambda^{(k,l)} = -4M^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M} - 4N^2 \sin^2 \frac{l\pi}{2N}$

Пусть  $M = N$ ,  $\Delta = h_x = h_y = 1/N \Rightarrow$  аппроксимация ур-я

$$\frac{u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{\Delta^2} + \frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{\Delta^2} = \lambda u_{m,n}$$

$$1 \leq m \leq M - 1, 1 \leq n \leq N - 1.$$

$$Au = \lambda u,$$

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ C_1 & B_2 & C_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & C_{N-3} & B_{N-2} & C_{N-2} \\ & & & C_{N-2} & B_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{-4}{\Delta^2} & \frac{1}{\Delta^2} & & & \\ \frac{1}{\Delta^2} & \frac{-4}{\Delta^2} & & & \\ & & \frac{1}{\Delta^2} & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & \frac{1}{\Delta^2} & \frac{-4}{\Delta^2} & \frac{1}{\Delta^2} \\ & & & \frac{1}{\Delta^2} & \frac{-4}{\Delta^2} \\ & & & & \frac{1}{\Delta^2} \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta^2} & & & & \\ & \frac{1}{\Delta^2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \frac{1}{\Delta^2} & \\ & & & & \frac{1}{\Delta^2} \end{pmatrix}$$



$n$	$\lambda_n^{[c]}(A)$	$\lambda_n(A)$	$\delta$
1	-372.5898981088739	-372.5898981088741	$10^{-16}$
2	-345.3969496365928	-345.3969496365929	$10^{-16}$
3	-345.3969496365928	-345.3969496365929	$10^{-16}$
4	-318.2040011643115	-318.2040011643117	$10^{-16}$
5	-306.1020005821561	-306.1020005821559	$10^{-16}$
6	-306.1020005821561	-306.1020005821559	$10^{-16}$
7	-278.9090521098751	-278.9090521098746	$10^{-16}$
8	-278.9090521098744	-278.9090521098746	$10^{-16}$
9	-262.4878975267180	-262.4878975267182	$10^{-16}$
10	-262.4878975267180	-262.4878975267182	$10^{-16}$
11	-239.6141030554378	-239.6141030554376	$10^{-16}$
12	-235.2949490544369	-235.2949490544370	$10^{-16}$
13	-235.2949490544369	-235.2949490544370	$10^{-16}$
14	-223.1929484722815	-223.1929484722812	$10^{-15}$
15	-223.1929484722815	-223.1929484722812	$10^{-15}$
16	-196.0000000000003	-196.0000000000000	$10^{-15}$
17	-196.0000000000003	-196.0000000000000	$10^{-15}$
18	-196.0000000000003	-196.0000000000000	$10^{-15}$
19	-195.9999999999996	-196.0000000000000	$10^{-15}$
20	-195.9999999999996	-196.0000000000000	$10^{-15}$
21	-195.9999999999996	-196.0000000000000	$10^{-15}$
22	-168.8070515277184	-168.8070515277188	$10^{-15}$
23	-168.8070515277184	-168.8070515277188	$10^{-15}$

$$(M - 1) = (N - 1) =$$

24	-156.7050509455630	-156.7050509455629	$10^{-16}$
25	-156.7050509455630	-156.7050509455629	$10^{-16}$
26	-152.3858969445621	-152.3858969445623	$10^{-15}$
27	-129.5121024732819	-129.5121024732817	$10^{-15}$
28	-129.5121024732819	-129.5121024732817	$10^{-15}$
29	-113.0909478901255	-113.0909478901252	$10^{-15}$
30	-113.0909478901255	-113.0909478901252	$10^{-15}$
31	-85.89799941784440	-85.89799941784410	$10^{-15}$
32	-85.89799941784374	-85.89799941784410	$10^{-15}$
33	-73.79599883568837	-73.79599883568822	$10^{-15}$
34	-46.60305036340722	-46.60305036340703	$10^{-15}$
35	-46.60305036340722	-46.60305036340703	$10^{-15}$
36	-19.41010189112606	-19.41010189112585	$10^{-14}$
$\epsilon$	$1.91265 \cdot 10^{-11}$		

Уравнение Шредингера

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U(x, y, z))\psi = 0,$$

$\hbar$  – постоянная Планка,

$\mu$  – масса частицы,

$U = U(x, y, z)$  – потенциальная энергия.

Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2)\psi = 0$$

Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$\omega_0^2$  – собственная частота

## Аналитическое решение

Обозначения:

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}, \quad \xi = \frac{x}{x_0}, \quad \varphi(\xi) = \psi(x_0\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\varphi = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{x_0}$$

$$\varphi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}}, \quad \lambda_n = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Исходные переменные:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}}, \quad E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Дискретная модель

$$u_k = \varphi(k \Delta), \quad \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} \approx \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{\Delta^2}.$$

$$\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{\Delta^2} + (\lambda - (k\Delta)^2)u_k = 0$$

Нормировка  $\Rightarrow$

$$v_k = \begin{cases} u_k, & |k| \leq N, \\ 0, & |k| > N, \end{cases}, \quad u_k \approx v_k$$

$$\frac{-2v_{(-N)} + v_{(-N+1)}}{\Delta^2} + (\lambda - (N\Delta)^2)v_{(-N)} = 0,$$

$$\frac{v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1}}{\Delta^2} + (\lambda - (k\Delta)^2)v_k = 0, \quad |k| < N - 1,$$

$$\frac{v_{(N-1)} - 2v_N}{\Delta^2} + (\lambda - (N\Delta)^2)v_N = 0.$$

При достаточно большом  $N$  ошибка дискретизации  $\approx \Delta^2$

Матричный вид системы

$$Sv = \lambda v$$

$$s_{ij} = s_{ji} = \begin{cases} 0, & j > i + 1, \\ -1/\Delta^2, & j = i + 1, \\ 2/\Delta^2 + (j - N + 1)^2\Delta^2, & j = i, \end{cases}$$

$$\mathcal{M}(S) \leq \frac{3}{\Delta^2} + (N + 1)^2\Delta^2.$$

$$|\lambda_n(S) - \lambda_n(S)^{[c]}| \leq 10.5\varepsilon_1 \mathcal{M}(S) \approx \varepsilon_1/\Delta^2$$

$$\begin{array}{l} \Delta = 10^{-4} \quad \varepsilon \approx 10^{-8}, \quad \delta_\Delta \approx 10^{-8}, \\ \Delta = 10^{-6} \quad \varepsilon \approx 10^{-4}, \quad \delta_\Delta \approx 10^{-12}, \\ \Delta = 10^{-8} \quad \varepsilon \approx 1, \quad \delta_\Delta \approx 10^{-16}, \end{array}$$

## Сингулярные числа

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & & & & & 0 \\ & d_2 & b_3 & & & & \\ & & d_3 & b_4 & & & \\ & & & \dots & \dots & & \\ & & & & d_{N_0-1} & b_{N_0} & \\ 0 & & & & & & d_{N_0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1(\mathcal{D}) = -\sigma_{N_0}(D), \quad \lambda_{N_0+1}(\mathcal{D}) = \sigma_1(D),$$

$$\lambda_2(\mathcal{D}) = -\sigma_{N_0-1}(D), \quad \lambda_{N_0+2}(\mathcal{D}) = \sigma_2(D),$$

...

$$\lambda_{N_0}(\mathcal{D}) = -\sigma_1(D), \quad \lambda_{2N_0}(\mathcal{D}) = \sigma_{N_0}(D)$$

$$\Pi \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N_0} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_{N_0} \\ v_{N_0} \end{pmatrix},$$

$$\Pi \mathcal{D} \Pi^* = S = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & & & & 0 \\ d_1 & 0 & b_2 & & & \\ & b_2 & 0 & d_2 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & b_{N_0} & 0 & d_{N_0} \\ 0 & & & & d_{N_0} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1(D) = \lambda_{N_0+1}(S),$$

$$\sigma_2(D) = \lambda_{N_0+2}(S),$$

...

$$\sigma_{N_0}(D) = \lambda_{2N_0}(S).$$



$$d_i = 1, b_i = 2$$

$M$	$\sigma_1$	$\sigma_M$	$\mu(D_M)$	$\epsilon_\mu$
6	$2.34619 \cdot 10^{-2}$	2.91846	$1.24392 \cdot 10^2$	$7.23906 \cdot 10^{-13}$
12	$3.66211 \cdot 10^{-4}$	2.97841	$8.13304 \cdot 10^3$	$4.69590 \cdot 10^{-11}$
18	$5.72205 \cdot 10^{-6}$	2.99022	$5.22579 \cdot 10^5$	$3.01693 \cdot 10^{-9}$
24	$8.94070 \cdot 10^{-8}$	2.99445	$3.34923 \cdot 10^7$	$1.93356 \cdot 10^{-7}$
30	$1.39699 \cdot 10^{-9}$	2.99643	$2.14493 \cdot 10^9$	$1.23832 \cdot 10^{-5}$
36	$2.18336 \cdot 10^{-11}$	2.99750	$1.37324 \cdot 10^{11}$	$7.93427 \cdot 10^{-4}$

## Кососимметрические матрицы

$$A^* = -A$$

$$a_{ii} = -a_{ii} = 0$$

Упрощение

$$PAP^* = B = \begin{pmatrix} 0 & b_2 & & 0 \\ -b_2 & 0 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & b_M \\ 0 & & -b_M & 0 \end{pmatrix}$$

$$Bw = BPv = PAP^*Pv = \lambda Pv = \lambda w$$

Пусть  $\lambda = a + ib$

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, A^*x) = (x, -Ax) = (x, -\lambda x) = -\bar{\lambda}(x, x)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \lambda(A) = 0$$

$$\lambda(A) = \pm i|\lambda|$$

Сведение к симметрическим матрицам:  $B(u + iv) = i\mu(u + iv)$

$$b_2(u_2 + iv_2) = i\mu(u_1 + iv_1)$$

$$-b_2(u_1 + iv_1) + b_3(u_3 + iv_3) = i\mu(u_2 + iv_2)$$

$$-b_k(u_{k-1} + iv_{k-1}) + b_{k+1}(u_{k+1} + iv_{k+1}) = i\mu(u_k + iv_k)$$

$$-b_n(u_{n-1} + iv_{n-1}) = i\mu(u_n + iv_n)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b_2 & & 0 \\ -b_2 & 0 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & b_M \\ 0 & & -b_M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b_2 & & 0 \\ -b_2 & 0 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & b_M \\ 0 & & -b_M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$Bv = \mu u, \quad -Bu = B^*u = \mu v$$

$$Bv = \mu u, \quad -Bu = B^*u = \mu v$$

$$\mathcal{B} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$$