

# **Вторая производная функции и ее физической смысл.**

Преподаватель: Нургалиева А.  
К.

■ ■ ■

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$  на некотором интервале  $(a; b)$ . Тогда ее производная  $f'(x)$  на этом интервале является функцией  $x$ . Если эта функция также имеет производную на  $(a, b)$ , то эта производная называется *второй производной*, или *производной второго порядка* функции  $y = f(x)$ . При этом  $f'(x)$  называется *первой производной*, или *производной первого порядка* функции  $f(x)$ .

**Определение.** *Второй производной* функции  $y = f(x)$  называется *производная от производной*  $f'(x)$ .

Обозначение:  $y''$  или  $f''(x)$ .

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Например,  $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$ ;  $(x^4)'' = (4x^3)' = 12x^2$ .

#### ПРИМЕР

1. Найдем значение производной второго порядка для функции  $f(x) = x^3 - 2x$  в точке  $x_0 = -1$ .

*Решение.*  $f''(x) = (x^3 - 2x)'' = (3x^2 - 2)' = 6x$ .

Тогда  $f''(x_0) = 6x_0 = 6 \cdot (-1) = -6$ .

*Ответ:* -6.

Вы знаете, что физический смысл производной—  
скорость,

**Физический смысл второй производной**

Ускорение  $a(t) = v'(t) = s''(t)$  равно второй производной длины пути по времени.

**ПРИМЕР**

2. Найдем скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону  $s = 2\sin \frac{\pi t}{3}$  в момент времени  $t = 1$ .

*Решение.* Найдем скорость  $v(t)$ . Поскольку  $v(t) = s'(t)$ , то  $v(t) = (2\sin \frac{\pi t}{3})' = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi t}{3}$ , тогда  $v(1) = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ . Найдем ускорение  $a(t)$ . Поскольку  $a(t) = v'(t) = \left(\frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi t}{3}\right)' = -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi t}{3} = -\frac{2\pi^2}{9} \sin \frac{\pi t}{3}$ , тогда

$$a(1) = -\frac{2\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{9}.$$

Ответ:  $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{9}$ .

# Производные высших порядков

Вот функция:  $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

вот её первая производная:  $y' = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 4x + 3$

вторая производная – это производная от 1-й производной:  $y'' = (y')' = (3x^2 + 4x + 3)' = 6x + 4$

Аналогично: третья производная – это производная от 2-й производной:

$$y''' = (y'')' = (6x + 4)' = 6$$

Четвёртая производная – есть производная от 3-й производной:

$$y^{IV} = (y''')' = (6)' = 0$$

Пятая производная:  $y^V = (y^{IV})' = (0)' = 0$ , и очевидно, что все производные более высоких порядков тоже будут равны нулю:

$$y^{VI} = y^{VII} = y^{VIII} = y^{IX} = y^X = \dots = 0$$

Помимо римской нумерации на практике часто используют следующие обозначения:

$y^{(4)}, y^{(5)}, y^{(6)}, y^{(7)}, y^{(8)}, y^{(9)}, y^{(10)}, \dots$ , производную же «энного» порядка обозначают через  $y^{(n)}$ .

**При этом надстрочный индекс нужно обязательно заключать в скобки** – чтобы отличать производную от «игрека» в степени.

Иногда встречается такая запись:  $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}, \dots$  – третья, четвёртая, пятая, ..., «энная» производные соответственно.

### Пример 1

Дана функция  $y = e^{3x}$ . Найти  $y^{(4)}$ .

**Решение:**

$$y' = (e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

$$y'' = (y')' = (3e^{3x})' = 3(e^{3x})' = 3e^{3x} \cdot 3 = 3^2 e^{3x}$$

$$y''' = (y'')' = (3^2 e^{3x})' = 3^2 e^{3x} \cdot 3 = 3^3 e^{3x}$$

Четыре штриха ставить уже не принято, поэтому переходим на числовые индексы:

$$y^{(4)} = (y''')' = (3^3 e^{3x})' = 3^3 e^{3x} \cdot 3 = 3^4 e^{3x}$$

**Ответ:**  $y^{(4)} = 3^4 e^{3x}$

### Пример 2

Найти  $y^{(5)}$  для функции  $y = \ln(2x - 1)$ .

**Решение:**

$$y' = (\ln(2x - 1))' = \frac{1}{2x - 1} \cdot (2x - 1)' = \frac{1 \cdot 2}{2x - 1}$$

Полученные числа перемножать не спешим! ;-)

$$y'' = \left( \frac{1 \cdot 2}{2x - 1} \right)' = 1 \cdot 2 \cdot ((2x - 1)^{-1})' = -1 \cdot 2 \cdot (2x - 1)^{-2} \cdot (2x - 1)' = -\frac{1 \cdot 2}{(2x - 1)^2} \cdot 2 = -\frac{1 \cdot 2^2}{(2x - 1)^2}$$

$$y''' = \left( -\frac{1 \cdot 2^2}{(2x - 1)^2} \right)' = -1 \cdot 2^2 \cdot ((2x - 1)^{-2})' = -1 \cdot 2^2 \cdot (-2) \cdot (2x - 1)^{-3} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{(2x - 1)^3}$$

$$y^{(4)} = \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{(2x - 1)^3} \right)' = 1 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot ((2x - 1)^{-3})' = 1 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot (-3) \cdot (2x - 1)^{-4} \cdot 2 = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4}{(2x - 1)^4}$$

$$y^{(5)} = \left( -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4}{(2x - 1)^4} \right)' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot ((2x - 1)^{-4})' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot (-4) \cdot (2x - 1)^{-5} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^5}{(2x - 1)^5}$$

## Домашнее задание:

Выписать конспект из слайда

Решить задачи:

46.1. Найдите производные первого и второго порядка для функции

$$y = f(x):$$

1)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x + 1;$

2)  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 7;$

3)  $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 2x.$

46.2. Найдите значение производной второго порядка для функции

$y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ :

1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x_0 = -1;$  2)  $f(x) = x^4 - x^3 - x, x_0 = 2;$

3)  $f(x) = \sqrt{3 - x}, x_0 = -1;$  4)  $f(x) = \sqrt{2x + 1}, x_0 = 4.$

46.3. Точка движется по закону  $x(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 1$  (где  $t$  — время в секундах,  $x(t)$  — координата точки в метрах). Найдите:

1) скорость движения точки в момент времени  $t = 3$  с;

2) ускорение движения точки в момент времени  $t = 3$  с.