Вторая производная функции
и ее физической смысл.

Преподаватель: Нургалиева А. К.

...

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ на некотором интервале $(a; b)$. Тогда ее производная $f'(x)$ на этом интервале является функцией x. Если эта функция также имеет производную на (a, b), то эта производная называется *второй производной, или производной второго порядка функции* $y = f(x)$. При этом $f'(x)$ называется *первой производной, или производной первого порядка функции* $f(x)$.

Определение. ***Второй производной функции*** $y = f(x)$ *называется производная от производной* $f'(x)$.

Обозначение: y'' или $f''(x)$.

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Например, $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$; $(x^4)'' = (4x^3)' = 12x^2$.

ПРИМЕР

1. Найдем значение производной второго порядка для функции $f(x) = x^3 - 2x$ в точке $x_0 = -1$.

Решение. $f''(x) = (x^3 - 2x)'' = (3x^2 - 2)' = 6x$.

Тогда $f''(x_0) = 6x_0 = 6 \cdot (-1) = -6$.

Ответ: -6.

Вы знаете, что физический смысл производной– скорость,

Физический смысл второй производной

Ускорение $a(t) = v'(t) = s''(t)$ равно второй производной длины пути по времени.

ПРИМЕР

2. Найдем скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s = 2\sin\frac{\pi t}{3}$ в момент времени $t = 1$.

Решение. Найдем скорость $v(t)$. Поскольку $v(t) = s'(t)$, то $v(t) = \left(2\sin\frac{\pi t}{3}\right)' = \frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi t}{3}$, тогда $v(1) = \frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Найдем ускорение $a(t)$. Поскольку $a(t) = v'(t) = \left(\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi t}{3}\right)' = -\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi t}{3} = -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3}$, тогда

$$a(1) = -\frac{2\pi^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$.

Производные высших порядков

Вот функция: $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

вот её первая производная: $y' = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 4x + 3$

вторая производная – это производная от 1-й производной: $y'' = (y')' = (3x^2 + 4x + 3)' = 6x + 4$

Аналогично: третья производная – это производная от 2-й производной:
$y''' = (y'')' = (6x + 4)' = 6$

Четвёртная производная – есть производная от 3-й производной:
$y^{IV} = (y''')' = (6)' = 0$

Пятая производная: $y^{V} = (y^{IV})' = (0)' = 0$, и очевидно, что все производные более высоких порядков тоже будут равны нулю:
$y^{VI} = y^{VII} = y^{VIII} = y^{IX} = y^{X} = \ldots = 0$

Помимо римской нумерации на практике часто используют следующие обозначения:
$y^{(4)}, y^{(5)}, y^{(6)}, y^{(7)}, y^{(8)}, y^{(9)}, y^{(10)}, \ldots$, производную же «энного» порядка обозначают через $y^{(n)}$.
При этом надстрочный индекс нужно обязательно заключать в скобки – чтобы отличать производную от «игрека» в степени.

Иногда встречается такая запись: $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}, \ldots$ – третья, четвёртая, пятая, …, «энная» производные соответственно.

Пример 1

Дана функция $y=e^{3x}$. Найти $y^{(4)}$.

Решение:

$y'=(e^{3x})'=e^{3x}\cdot(3x)'=e^{3x}\cdot 3=3e^{3x}$

$y''=(y')'=(3e^{3x})'=3(e^{3x})'=3e^{3x}\cdot 3=3^2e^{3x}$

$y'''=(y'')'=(3^2e^{3x})'=3^2e^{3x}\cdot 3=3^3e^{3x}$

Четыре штриха ставить уже не принято, поэтому переходим на числовые индексы:

$y^{(4)}=(y''')'=(3^3e^{3x})'=3^3e^{3x}\cdot 3=3^4e^{3x}$

Ответ: $y^{(4)}=3^4e^{3x}$

Пример 2

Найти $y^{(5)}$ для функции $y=\ln(2x-1)$.

Решение:

$y'=(\ln(2x-1))'=\dfrac{1}{2x-1}\cdot(2x-1)'=\dfrac{1\cdot 2}{2x-1}$

Полученные числа перемножать не спешим! ;-)

$$y''=\left(\frac{1\cdot 2}{2x-1}\right)'=1\cdot 2\cdot((2x-1)^{-1})'=-1\cdot 2\cdot(2x-1)^{-2}\cdot(2x-1)'=-\frac{1\cdot 2}{(2x-1)^2}\cdot 2=-\frac{1\cdot 2^2}{(2x-1)^2}$$

$$y'''=\left(-\frac{1\cdot 2^2}{(2x-1)^2}\right)'=-1\cdot 2^2\cdot((2x-1)^{-2})'=-1\cdot 2^2\cdot(-2)\cdot(2x-1)^{-3}\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 2^3}{(2x-1)^3}$$

$$y^{(4)}=\left(\frac{1\cdot 2\cdot 2^3}{(2x-1)^3}\right)'=1\cdot 2\cdot 2^3\cdot((2x-1)^{-3})'=1\cdot 2\cdot 2^3\cdot(-3)\cdot(2x-1)^{-4}\cdot 2=-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^4}{(2x-1)^4}$$

$$y^{(5)}=\left(-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^4}{(2x-1)^4}\right)'=-1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^4\cdot((2x-1)^{-4})'=-1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^4\cdot(-4)\cdot(2x-1)^{-5}\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^5}{(2x-1)^5}$$

Домашнее задание:

Выписать конспект из слайда

Решить задачи:

46.1. Найдите производные первого и второго порядка для функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x + 1$;

2) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 7$;

3) $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 2x$.

46.2. Найдите значение производной второго порядка для функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = x^4 - x^3 - x$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $x_0 = -1$; 4) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $x_0 = 4$.

46.3. Точка движется по закону $x(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 1$ (где t — время в секундах, $x(t)$ — координата точки в метрах). Найдите:

1) скорость движения точки в момент времени $t = 3$ с;

2) ускорение движения точки в момент времени $t = 3$ с.